ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 157–166
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 157–166

УДК 517.37.72

ВЛАСТИВОСТІ АДАМАРОВИХ КОМПОЗИЦІЙ ПОХІДНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Оксана МУЛЯВА[1], Мирослав ШЕРЕМЕТА[2]

[1] *Київський національний університет харчових технологій,*
вул. Володимирівська, 68, Київ, 01004
e-mail: info@nuft.edu.ua
[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Досліджено збіжність і зростання адамарових композицій рядів Діріхле з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками та довільною абсцисою абсолютної збіжності. Знайдено зв'язок між зростанням максимального члена похідної адамарової композиції та зростанням максимального члена адамарової композиції похідних.

Ключові слова: адамарова композиція, ряди Діріхле, максимальний член.

1. Вступ. Для степеневих рядів $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ і $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k z^k$ з радіусами збіжності $R[f]$ і $R[g]$ ряд $(f{*}g)(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k g_k z^k$ називається адамаровою композицією. Добре відомо [1-2], що $R[f * g] \geq R[f]R[g]$. Отримані Ж. Адамаром властивості цієї композиції знайшли застосування [2-3] в теорії аналітичного продовження функцій, зображених степеневими рядами. За умови $R[f] > 0$ і $0 \leq r < R[f]$ нехай $\mu_f(r) = \max\{|f_k|r^k : k \geq 0\}$ – максимальний член степеневого розвинення функції f. Дослідженню асимптотичного поводження функцій $\mu_{f^{(n)} * g^{(n)}}(r)$ і $\mu_{(f*g)^{(n)}}(r)$ у випадку, коли f і g – цілі функції, присвятив свої праці М. Сен [4-5]. Зокрема він довів [5] таке: якщо функція $(f * g)$ має порядок ϱ і нижній порядок λ, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх $r \geq r_0(\varepsilon)$

$$\mu_{(f*g)^{(n)}}(r) r^{(n+2)\lambda-1-\varepsilon} \leq \mu_{f^{(n+1)} * g^{(n+1)}}(r) \leq \mu_{(f*g)^{(n)}}(r) r^{(n+2)\varrho-1+\varepsilon}.$$

Безпосереднім узагальненням степеневих рядів є ряди Діріхле з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками. Тому задача про властивості адамарової композиції таких рядів Діріхле є природною і їй ми присвячуємо нашу статтю.

2. Збіжність адамарової композиції. Нехай (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0 = 0$), а ряди Діріхле

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

і

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \exp\{s\lambda_k\}$$

мають абсциси абсолютної збіжності $\sigma_a[F]$ і $\sigma_a[G]$. Адамаровою композицією цих рядів будемо називати ряд Діріхле

$$(F * G)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k g_k \exp\{s\lambda_k\}. \tag{2}$$

Твердження 1. *Якщо $\sigma_a[F] > -\infty$ і $\sigma_a[G] > -\infty$, то $\sigma_a[F * G] \geq \sigma_a[F] + \sigma_a[G]$.*

Доведення. Справді, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |g_k| \exp\{\sigma^* \lambda_k\} < +\infty$ для довільного $\sigma^* < \sigma_a[G]$, а $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |f_k| \exp\{(\sigma - \sigma^*)\lambda_k\} < +\infty$ для довільного $\sigma < \sigma_a[F] + \sigma^*$. Тому

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k||g_k| e^{\sigma\lambda_k} = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| e^{(\sigma-\sigma^*)\lambda_k} |g_k| e^{\sigma^*\lambda_k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| e^{(\sigma-\sigma^*)\lambda_k} \sum_{k=0}^{\infty} |g_k| e^{\sigma^*\lambda_k} < +\infty,$$

для довільного $\sigma < \sigma_a[F] + \sigma^*$, тобто $\sigma_a[F * G] \geq \sigma_a[F] + \sigma^*$, а з огляду на довільність σ^* отримуємо потрібну нерівність. □

Зауважимо, що нерівність $\sigma_a[F * G] \geq \sigma_a[F] + \sigma_a[G]$ правильна також, коли $\sigma_a[F] = -\infty$ і $\sigma_a[G] < +\infty$, якщо $\sigma_a[F] = -\infty$ і $\sigma_a[G] = +\infty$, то $\sigma_a[F * G]$ може дорівнювати будь-якому $c \in [-\infty, +\infty]$. Зауважимо ще, що обернена нерівність $\sigma_a[F * G] \leq \sigma_a[F] + \sigma_a[G]$ загалом не є правильною.

Твердження 2. *Рівності $\sigma_a[F * G] = \sigma_a[(F * G)^{(n)}] = \sigma_a[F^{(n)} * G^{(n)}]$ правильні для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Оскільки

$$(F * G)^{(n)}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n f_k g_k \exp\{s\lambda_k\} \tag{3}$$

і

$$(F^{(n)} * G^{(n)})(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2n} f_k g_k \exp\{s\lambda_k\}, \tag{4}$$

то

$$(F^{(n)} * G^{(n)})(s) = (F * G)^{(2n)}(s). \tag{5}$$

Звідси випливає, що достатньо довести рівність $\sigma_a[F * G] = \sigma_a[(F * G)']$, тобто, що для кожного ряду Діріхле (1) $\sigma_a[F] = \sigma_a[F']$.

Оскільки $F'(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k \exp\{s\lambda_k\}$, то зрозуміло, що $\sigma_a[F'] \le \sigma_a[F]$ і $\sigma_a[F] = \sigma_a[F']$, якщо $\sigma_a[F] = -\infty$. Якщо ж $\sigma_a[F] > -\infty$, то для довільного числа $\sigma < \sigma_a[F]$ існує таке натуральне число $k_0(\sigma)$, що $\dfrac{\ln \lambda_k}{\lambda_k} \le \dfrac{\sigma_a[F]-\sigma}{2}$ для $k \ge k_0(\sigma)$, і отже,

$$\sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty} \lambda_k |f_k| \exp\{\sigma\lambda_k\} = \sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty} |f_k| \exp\left\{\lambda_k \left(\sigma + \frac{\ln \lambda_k}{\lambda_k}\right)\right\} \le$$

$$\le \sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty} |f_k| \exp\left\{\lambda_k \frac{\sigma_a[F]+\sigma}{2}\right\} < +\infty.$$

З огляду на довільність σ звідси випливає, що $\sigma_a[F'] \ge \sigma_a[F]$, і отже,
$\sigma_a[F'] = \sigma_a[F]$. □

3. Нижній R-порядок і R-порядок адамарової композиції рядів Діріхле. Для цілого ($\sigma_a[F] = +\infty$) ряду Діріхле (1) величини

$$\lambda_R[F] = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\sigma}, \quad \varrho_R[F] = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\sigma},$$

де $M(\sigma,F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$, називаються [6] відповідно нижнім R-порядком і R-порядком. Добре відомо (див., наприклад, [7, с. 176-178], [8, с. 30]) таке: якщо

$$\ln k = o(\lambda_k \ln \lambda_k), \quad k \to \infty, \tag{6}$$

то правильна формула Рітта $\varrho_R[F] = \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\lambda_k \ln \lambda_k}{-\ln |f_k|}$, причому для кожної зростаючої до $+\infty$ послідовності (λ_k) додатних чисел, для якої умова (6) не виконується, існує [9] цілий ряд Діріхле з цією послідовністю показників, для якого формула Рітта неправильна. Якщо F і G – цілі ряди Діріхле, то за твердженням 1 їхня композиція $F * G$ – також цілий ряд Діріхле. Неважко довести, що за умови (6) $\dfrac{1}{\varrho_R[F*G]} \ge \dfrac{1}{\varrho_R[F]} + \dfrac{1}{\varrho_G[F]}$ і, зрозуміло, обернена нерівність не завжди правильна.

Твердження 3. *Рівності* $\lambda_R[F*G] = \lambda_R[(F*G)^{(n)}] = \lambda_R[F^{(n)}*G^{(n)}]$ *і* $\varrho_R[F*G] = \varrho_R[(F*G)^{(n)}] = \varrho_R[F^{(n)}*G^{(n)}]$ *правильні для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. З огляду на (5), як у доведенні твердження 2, достатньо довести, що для цілого ряду Діріхле (1) $\lambda_R[F] = \lambda_R[F']$ і $\varrho_R[F] = \varrho_R[F']$. Для цього розглянемо спочатку ряд (1) з $\sigma_a[F] > -\infty$. За формулою Коші для $\sigma < \sigma_a[F]$ і $\delta(\sigma) \in (0, \sigma_a[F]-\sigma)$ – отримаємо

$$|F'(\sigma+it)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau-\sigma-it|=\delta(\sigma)} \frac{F(\tau)d\tau}{(\tau-\sigma-it)^2} \right| \le \frac{\max\{|F(\tau)| \,:\, |\tau-\sigma-it| = \delta(\sigma)\}}{\delta(\sigma)},$$

звідки

$$M(\sigma,F') \le \frac{M(\sigma+\delta(\sigma),F)}{\delta(\sigma)}. \tag{7}$$

З іншого боку, якщо $s = \sigma + it$, $s_0 = \sigma_0 + it$ і $\sigma_0 < \sigma$, то

$$|F(s)| \le |F(s_0)| + \left|\int_{s_0}^{s} F'(\tau)d\tau\right| \le |s - s_0| \max\{|F'(\tau)| : \tau \in [s_0, s]\},$$

звідки

$$M(\sigma, F) \le (\sigma - \sigma_0)M(\sigma, F') + M(\sigma_0, F). \tag{8}$$

Якщо $\sigma_a[F] = +\infty$, то виберемо $\delta(\sigma) = 1$ і $\sigma_0 = 0$. Тоді для $\sigma > 0$ отримаємо нерівності $M(\sigma, F') \le M(\sigma + 1, F)$ і $M(\sigma, F) \le \sigma M(\sigma, F') + M(0, F)$, з яких випливають потрібні рівності.

Для ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності нижній R-порядок і R-порядок вводяться [10] за формулами

$$\lambda_R^0[F] = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F), \quad \varrho_R^0[F] = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F).$$

Відомо [10] таке: якщо

$$\ln k = o(\lambda_k / \ln \lambda_k), \quad k \to \infty, \tag{9}$$

то правильна формула $\varrho_R^0[F] = \varlimsup\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\ln \lambda_k}{\lambda_k} \ln^+ |f_k|$. □

За твердженням 1 з рівностей $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = 0$ випливає тільки, що $\sigma_a[F * G] \ge 0$. Рівність $\sigma_a[F * G] = 0$ може не виконуватись. Легко довести також, що за умови (9) $\varrho_R^0[F * G] \le \varrho_R^0[F] + \varrho_R^0[G]$, обернена нерівність не завжди правильна.

Твердження 4. *Якщо $\sigma_a[F * G] = 0$, то рівності $\lambda_R^0[F * G] = \lambda_R^0[(F * G)^{(n)}] = \lambda_R^0[F^{(n)} * G^{(n)}]$ і $\varrho_R^0[F * G] = \varrho_R^0[(F * G)^{(n)}] = \varrho_R^0[F^{(n)} * G^{(n)}]$ правильні для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Як у доведенні твердження 3, достатньо довести, що для ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолюної збіжності $\lambda_R^0[F] = \lambda_R^0[F']$ і $\varrho_R^0[F] = \varrho_R^0[F']$.

Виберемо $\delta(\sigma) = |\sigma|/2$ і $\sigma_0 = -1$. Тоді з (7) і (8) отримуємо нерівності $M(\sigma, F') \le \dfrac{2}{|\sigma|} M\left(\dfrac{\sigma}{2}, F\right)$ і $M(\sigma, F) \le M(\sigma, F') + M(-1, F)$, звідки легко випливають потрібні рівності. □

Для ряду Діріхле (1) з $\sigma_a[F] > -\infty$ і для $\sigma < \sigma_a[F]$ нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|f_n| \times \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \ge 0\}$ – максимальний член, $\nu(\sigma, F) = \max\{n : |f_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} = \mu(\sigma, F)\}$ – центральний індекс, а $\Lambda(\sigma, F) = \lambda_{\nu(\sigma,F)}$ – центральний показник. Відомо ([7, с. 182], [8, с. 17]), що за умови зростання $\mu(\sigma, F)$

$$\ln \mu(\sigma, F) = \ln \mu(\sigma_0, F) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \Lambda(x, F)dx. \tag{10}$$

Якщо в означеннях R-порядку $\varrho_R[F]$ і нижнього R-порядку $\lambda_R[F]$ цілого ряду Діріхле (1) замість $\ln M(\sigma, F)$ поставимо $\ln \mu(\sigma, F)$, то отримаємо величини, які позначимо відповідно через $\varrho_R[\ln \mu]$ і $\lambda_R[\ln \mu]$. Заміною $\ln M(\sigma, F)$ на $\Lambda(\sigma, F)$ подібно визначаємо $\varrho_R[\Lambda]$ і $\lambda_R[\Lambda]$.

Лема 1. *За умови (6) для цілого ряду Діріхле (1) правильні рівності* $\varrho_R[F] = \varrho_R[\ln\,\mu] = \varrho_R[\Lambda]$*, якщо, крім того,* $\varrho_R[F] < +\infty$*, то* $\lambda_R[F] = \lambda_R[\ln\,\mu] = \lambda_R[\lambda]$.

Доведення. З нерівності Коші $\mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F)$ випливає, що $\varrho_R[\ln\,\mu] \le \varrho_R[F]$ і $\lambda_R[\ln\,\mu] \le \lambda_R[F]$.

Для доведення протилежних нерівностей через Ω позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Для $\Phi \in \Omega$ нехай ϕ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [11], *якщо* $\ln\,\mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ *для* $\sigma \ge \sigma_0$ *і* $\ln k = o(\lambda_k \Psi(\phi(\lambda_k)))$ *при* $k \to \infty$*, то для кожного* $\varepsilon > 0$

$$M(\sigma, F) \le \mu((1+\varepsilon)\sigma, F), \quad \sigma \ge \sigma_1(\varepsilon). \tag{11}$$

Якщо тепер $\varrho_R[\ln\,\mu] < +\infty$, то для кожного $\varrho > \varrho_R[\ln\,\mu]$ і всіх $\sigma \ge \sigma_0(\varrho)$ правильна нерівність $\ln\,\mu(\sigma, F) \le \exp\{\varrho\sigma\}$. Якщо виберемо $\Phi(\sigma) = \exp\{\varrho\sigma\}$, то $\Psi(\sigma) = \sigma - \dfrac{1}{\varrho}$, $\phi(x) = \dfrac{1}{\varrho}\ln\dfrac{x}{\varrho}$ і $\lambda_k\Psi(\phi(\lambda_k)) = \dfrac{\lambda_k}{\varrho}\ln\dfrac{\lambda_k}{e\varrho}$, а з наведеного вище твердження з [11] випливає, що за умови (6) правильна нерівність (11), звідки з огляду на довільність $\varepsilon > 0$ легко отримуємо нерівності $\varrho_R[F] \le \varrho_R[\ln\,\mu]$ і $\lambda_R[F] \le \lambda_R[\ln\,\mu]$. Якщо $\varrho_R[\ln\,\mu] = +\infty$, то нерівність $\varrho_R[F] \le \varrho_R[\ln\,\mu]$ очевидна. Рівності $\varrho_R[F] = \varrho_R[\ln\,\mu]$ і $\lambda_R[F] = \lambda_R[\ln\,\mu]$ доведено.

Рівності $\varrho_R[\ln\,\mu] = \varrho_R[\Lambda]$ і $\lambda_R[\ln\,\mu] = \lambda_R[\Lambda]$ легко випливають з таких отриманих з (10) оцінок $\ln\,\mu(\sigma, F) \le \sigma\Lambda(\sigma, F) + \ln\,\mu(0, F)$ і

$$\ln\,\mu(\sigma, F) \ge \frac{\varepsilon\sigma}{1+\varepsilon}\Lambda\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}, F\right) + \ln\,\mu(0, F).$$

Лему 1 доведено. □

З твердження 3 і леми 1 випливає таке твердження.

Твердження 5. *Нехай* $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = +\infty$*. Тоді за умови (6) для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\,\Lambda(\sigma, F^{(n)} * G^{(n)})}{\sigma} = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\,\Lambda(\sigma, (F*G)^{(n)})}{\sigma} = \varrho_R[F*G],$$

якщо, крім того, $\varrho_R[F*G] < +\infty$*, то*

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\,\Lambda(\sigma, F^{(n)} * G^{(n)})}{\sigma} = \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\,\Lambda(\sigma, (F*G)^{(n)})}{\sigma} = \lambda_R[F*G].$$

Перейдемо до рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності. На відміну від цілих рядів Діріхле у випадку, коли $\sigma_a[F] = 0$, максимальний член може бути обмеженою функцією, а центральний показник може прямувати до $+\infty$. У цьому випадку послідовність коефіцієнтів обмежена, тому з огляду на тривіальність ми його не розглядатимемо. Отже, надалі будемо вважати, що

$$\varlimsup_{k\to\infty} |f_k| = +\infty. \tag{12}$$

Величини $\varrho_R^0[\ln\mu]$, $\lambda_R^0[\ln\mu]$, $\varrho_R^0[\Lambda]$ і $\lambda_R^0[\Lambda]$ визначимо, як вище, замінивши в означеннях R-порядку $\varrho_R^0[F]$ і нижнього R-порядку $\lambda_R^0[F]$ ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності $\ln M(\sigma,F)$, відповідно, на $\ln\mu(\sigma,F)$ і $\Lambda(\sigma,F)$.

Лема 2. *За умов (9) і (12) для ряду Діріхле (1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності правильні рівності $\varrho_R^0[F]=\varrho_R^0[\ln\mu]=\varrho_R^0[\Lambda]$ і $\lambda_R^0[F]=\lambda_R^0[\ln\mu]=\lambda_R^0[\Lambda]$.*

Доведення. З нерівності Коші випливає, що $\varrho_R^0[\ln\mu]\le\varrho_R^0[F]$ і $\lambda_R^0[\ln\mu]\le\lambda_R^0[F]$. Для доведення протилежних нерівностей використаємо такий результат з [12]: *якщо $\ln k=o(\lambda_k\gamma(\lambda_k))$ при $k\to\infty$, де γ – додатна, неперевна і спадна до 0 на $[0,+\infty)$ функція, то для кожного $\varepsilon>0$ і всіх $\sigma<0$*

$$\ln M(\sigma,F)\le\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right)+\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\gamma^{-1}\left(\frac{|\sigma|}{\varepsilon(1+\varepsilon)^2}\right)+K(\varepsilon),$$

де $K(\varepsilon)$ – додатна стала, залежна тільки від $\varepsilon>0$. Вибравши $\gamma(x)=1/\ln x$ $(x\ge2)$, звідси за умови (9) отримуємо оцінку

$$\ln M(\sigma,F)\le\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right)+\exp\left\{\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)^2}{\sigma}\right\}+K(\varepsilon),$$

тобто

$$|\sigma|\ln\ln M(\sigma,F)\le\max\left\{|\sigma|\ln\ln\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\right),\quad\varepsilon(1+\varepsilon)^2,\quad|\sigma|K(\varepsilon)\right\},$$

звідки з огляду на довільність $\varepsilon>0$ легко отримуємо нерівності $\varrho_R^0[F]\le\varrho_R^0[\ln\mu]$ і $\lambda_R^0[F]\le\lambda_R^0[\ln\mu]$. Рівності $\varrho_R^0[F]=\varrho_R^0[\ln\mu]$ і $\lambda_R^0[F]=\lambda_R^0[\ln\mu]$ доведено.

З умови (12) випливає зростання функції $\ln\mu(\sigma,F)$, а з (10) легко отримуємо оцінки

$$\ln\mu(\sigma,F)\le\ln\mu(-1,F)+(1-|\sigma|)\Lambda(\sigma,F)\quad\text{і}\quad\ln\mu(\sigma,F)\ge|\sigma|\Lambda(2\sigma,F)+\ln\mu(-1,F),$$

з яких випливають рівності $\varrho_R^0[\ln\mu]=\varrho_R^0[\Lambda]$ і $\lambda_R^0[\ln\mu]=\lambda_R^0[\Lambda]$. Лему 2 доведено. □

Аналогом твердження 5 є таке твердження.

Твердження 6. *Нехай $\sigma_a[F]=\sigma_a[G]=0$ і $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|f_k||g_k|=+\infty$. Тоді за умови (9) для будь-якого $n\in\mathbb{N}$*

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow0}}|\sigma|\ln\Lambda(\sigma,F^{(n)}*G^{(n)})=\overline{\lim_{\sigma\uparrow0}}|\sigma|\ln\Lambda(\sigma,(F*G)^{(n)})=\varrho_R^0[F*G],$$

і

$$\underline{\lim_{\sigma\uparrow0}}|\sigma|\ln\Lambda(\sigma,F^{(n)}*G^{(n)})=\underline{\lim_{\sigma\uparrow0}}|\sigma|\ln\Lambda(\sigma,(F*G)^{(n)})=\lambda_R^0[F*G].$$

Це твердження випливає з твердження 4 і леми 2, якщо зауважити, що з умов $\sigma_a[F]=\sigma_a[G]=0$ і $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|f_k||g_k|=+\infty$ випливає, що $\sigma_a[F*G]=0$.

4. Зв'язок між зростанням максимальних членів адамарової композиції похідних і похідної адамарової композиції. Цей результат є основним у нашій статті.

Теорема 1. *Нехай $n \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$ і $m > n$. Якщо $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = +\infty$ і виконується умова (6), то*

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})} = (m-n)\varrho_R[F*G]$$

і (за умови $\varrho_R[F*G] < +\infty$)

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})} = (m-n)\lambda_R[F*G].$$

Якщо ж $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = 0$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} |f_k||g_k| = +\infty$ і виконується умова (9), то

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln \frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})} = (m-n)\varrho_R^0[F*G]$$

і

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln \frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})} = (m-n)\lambda_R^0[F*G].$$

Доведення. Оскільки

$$\mu(\sigma,(F*G)^{(m)}) = \lambda^m_{\nu(\sigma,(F*G)^{(m)})}|f_{\nu(\sigma,(F*G)^{(m)})}||g_{\nu(\sigma,(F*G)^{(m)})}|\exp\{\sigma\lambda_{\nu(\sigma,(F*G)^{(m)})}\} =$$
$$= \lambda^{m-n}_{\nu(\sigma,(F*G)^{(m)})}\lambda^{n}_{\nu(\sigma,(F*G)^{(m)})}|f_{\nu(\sigma,(F*G)^{(m)})}||g_{\nu(\sigma,(F*G)^{(m)})}|\exp\{\sigma\lambda_{\nu(\sigma,(F*G)^{(m)})}\} \le$$
$$\le \lambda^{m-n}_{\nu(\sigma,(F*G)^{(m)})}\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})$$

і, подібно,

$$\mu(\sigma,(F*G)^{(n)}) \le \lambda^{n-m}_{\nu(\sigma,(F*G)^{(n)})}\mu(\sigma,(F*G)^{(m)}),$$

то

$$\Lambda^{m-n}(\sigma,(F*G)^{(n)}) \le \frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})} \le \Lambda^{m-n}(\sigma,(F*G)^{(m)}),$$

тобто

$$(m-n)\ln\Lambda(\sigma,(F*G)^{(n)}) \le \ln\frac{\mu(\sigma,(F*G)^{(m)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})} \le (m-n)\ln\Lambda(\sigma,(F*G)^{(m)}).$$

Звідси, використовуючи твердження 5, отримуємо першу частину теореми. Другу її частину отримаємо, якщо використаємо твердження 6. Теорему доведено. □

З огляду на (5) з теореми для $m = 2n$ випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$. Якщо $\sigma_a[F] = \sigma_a[G] = +\infty$ і виконується умова (6), то*

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\mu(\sigma,F^{(n)}*G^{(n)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})} = n\varrho_R[F*G]$$

і (за умови $\varrho_R[F*G] < +\infty$)

$$\varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\mu(\sigma,F^{(n)}*G^{(n)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})} = n\lambda_R[F*G].$$

Якщо ж $\sigma_a[F]=\sigma_a[G]=0$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|f_k||g_k|=+\infty$ *і виконується умова (9), то*

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}}|\sigma|\ln\frac{\mu(\sigma,F^{(n)}*G^{(n)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}=n\varrho_R^0[F*G],\quad \underline{\lim_{\sigma\uparrow 0}}|\sigma|\ln\frac{\mu(\sigma,F^{(n)}*G^{(n)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}=n\lambda_R^0[F*G].$$

Якщо ж виберемо $m=2(n+1)$, то отримаємо такий наслідок, який є аналогом наведеного результату М. Сена.

Наслідок 2. *Нехай* $n\in\mathbb{N}$. *Якщо* $\sigma_a[F]=\sigma_a[G]=+\infty$ *і виконується умова (6), то*

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{1}{\sigma}\ln\frac{\mu(\sigma,F^{(n+1)}*G^{(n+1)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}=(n+2)\varrho_R[F*G]$$

і (за умови $\varrho_R[F*G]<+\infty$*)*

$$\underline{\lim_{\sigma\to+\infty}}\frac{1}{\sigma}\ln\frac{\mu(\sigma,F^{(n+1)}*G^{(n+1)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}=(n+2)\lambda_R[F*G].$$

Якщо ж $\sigma_a[F]=\sigma_a[G]=0$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|f_k||g_k|=+\infty$ *і виконується умова (9), то*

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}}|\sigma|\ln\frac{\mu(\sigma,F^{(n+1)}*G^{(n+1)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}=(n+2)\varrho_R^0[F*G],$$

і

$$\underline{\lim_{\sigma\uparrow 0}}|\sigma|\ln\frac{\mu(\sigma,F^{(n+1)}*G^{(n+1)})}{\mu(\sigma,(F*G)^{(n)})}=(n+2)\lambda_R^0[F*G].$$

5. Властивості адамарових композицій похідних Салагена аналітичних в одиничному крузі функцій. Нехай S – клас аналітичних в крузі $\mathbb{D}=\{z:\,|z|<1\}$ функцій вигляду

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}f_kz^k,\quad z=re^{i\theta}. \tag{13}$$

Для $f\in A$ похідні Салагена визначаються [13] рівностями $D^{(1)}f(z)=zf'(z)$ і $D^{(n)}f(z)=D^{(1)}D^{(n-1)}f(z)$, тобто

$$D^{(n)}f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}k^nf_kz^k, \tag{14}$$

і отже, $D^{(n)}f\in A$. Якщо в ряді (13) зробимо заміну $z=e^s$, то отримаємо ряд Діріхле

$$F(s)=f(e^s)=e^s+\sum_{k=2}^{\infty}f_k\exp\{sk\}, \tag{15}$$

показники $\lambda_k=k$ якого задовольняють умову (9). Зрозуміло, що

$$F^{(n)}(s)=f(e^s)=e^s+\sum_{k=2}^{\infty}k^nf_k\exp\{sk\}=D^{(n)}f(z)\big|_{z=e^s}. \tag{16}$$

Тому з теореми можемо одержати відповідний результат для адамарових композицій похідних Салагена аналітичних в одиничному крузі функцій.

Для функції (13) приймемо $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $0 \le r < 1$, і нехай $\mu_f(r)$ – максимальний член ряду (13). За умови (12) $M_f(r) \ge \mu_f(r) \to +\infty$ при $r \uparrow 1$. Порядок $\varrho^0[f]$ і нижній порядок $\lambda^0[f]$ визначимо формулами

$$\lambda^0[f] = \varliminf_{r\uparrow 0}(1-r)\ln\ln M_f(r), \quad \varrho^0[f] = \varlimsup_{r\uparrow 1}(1-r)\ln\ln M_f(r).$$

Оскільки $1-r = (1+o(1))|\ln r|$ при $r \uparrow 1$, то в цих формулах замість $1-r$ можна поставити $|\ln r|$, оскільки $F(s) = f(e^s)$ і $r = e^\sigma$, то $|\sigma| = |\ln r|$, $M_f(r) = M(\ln r, F)$, $\mu_f(r) = \mu(\ln r, F)$, $\lambda^0[f] = \lambda^0_R[F]$ і $\varrho^0[f] = \varrho^0_R[F]$. Тому з теореми з огляду на (16) випливає такий наслідок.

Наслідок 3. *Нехай $n \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$ і $m > n$. Якщо $f \in A$, $g \in A$ і $\varlimsup_{k\to\infty} |f_k||g_k| = +\infty$, то*

$$\varliminf_{r\uparrow 1}(1-r)\ln\frac{\mu_{D^{(m)}(f*g)}(r)}{\mu_{D^{(n)}(f*g)}(r)} = (m-n)\lambda^0[f*g]$$

і

$$\varlimsup_{r\uparrow 1}(1-r)\ln\frac{\mu_{D^{(m)}(f*g)}(r)}{\mu_{D^{(n)}(f*g)}(r)} = (m-n)\varrho^0[f*g].$$

Список використаної літератури

1. *Hadamard J.* Theoreme sur le series entieres / *J. Hadamard* // Acta math. – 1899. – Bd. 22. – P. 55-63.
2. *Hadamard J.* La serie de Taylor et son prolongement analitique / *J. Hadamard* // Scientia phys.-math. – 1901. – №12. – P. 1-100.
3. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение / *Л. Бибербах* – М.: Наука, 1967.
4. *Sen M.K.* On some properties of an integral function $f * g$ / *M.K. Sen* // Riv. Math. Univ. Parma (2). – 1967. – Vol. 8. – P. 317-328.
5. *Sen M.K.* On the maximum term of a class of integral functions and its derivatives / *M.K. Sen* // Ann. Pol. Math. – 1970. – Vol. 22. – P. 291-298.
6. *Ritt J.* On certain points in the theory of Dirichlet series / *J. Ritt* // Amer. J. of Math. – 1928. – Vol. 50, №1. – P. 73-86.
7. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент / *А.Ф. Леонтьев* – М.: Наука, 1976.
8. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле / *М.М. Шеремета* – К.: ІСДО, 1993.
9. *Грече Ф.И.* Замечания о формулах для определения линейного порядка целой функции, представленной рядом Дирихле / *Ф.И. Гече* // Укр. мат. журн. – 1964. – Т. 16, №5. – С. 7-12.
10. *Гайсин А.М.* Оценки роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуплоскости / *А.М. Гайсин* // Матем. сб. – 1982. – Т. 117, №3. – С. 412-424.
11. *Мулява О.М.* Оцінки максимуму модуля цілого ряду Діріхле / *О.М. Мулява, Я.Я. Притула* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 49. – С. 65-70.
12. *Мулява О.М.* Про класи збіжності рядів Діріхле / *О.М. Мулява* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, №11. – С. 1485-1494.
13. *Sălăgean G.St.* Subclasses of univalent functions / *G.St. Sălăgean* // Lecture Notes in Math. – 1983. – Vol. 1013. – P. 362-372.

Стаття: надійшла до редакції 30.05.2012
прийнята до друку 12.12.2012

PROPERTIES OF HADAMARD COMPOSITIONS OF THE DERIVATIVES OF DIRICHLET SERIES

Oksana MULYAVA[1], Myroslav SHEREMETA[2]

[1]*Kyiv Nastional Ubniversity of Food Technologies,*
Volodymyrska Str., 68, Kyiv, 01004
e-mail: info@nuft.edu.ua
[2]*Ivan Franko National University of L'viv,*
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

The convergence and the growth of Hadamard's compositions of Dirichlet series with nonnegative and increasing to $+\infty$ exponents and arbitrary abscissa of absolute convergence are investigated. A connection between the growth of the maximal term of the derivative of Hadamard's composition and the growth of the maximal term of Hadamard's composition of the derivatives is established.

Key words: Hadamard's composition, Dirichlet series, maximal term.

СВОЙСТВА АДАМАРОВСКИХ КОМПОЗИЦИЙ ПРОИЗВОДНЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

Оксана МУЛЯВА[1], Мирослав ШЕРЕМЕТА[2]

[1]*Киевский национальный университет пищевых технологий,*
ул. Владимирская, 68, Киев, 01004
e-mail:info@nuft.edu.ua
[2]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Исследованы сходимость и рост адамаровских композиций рядов Дирихле с неотрицательными возрастающими к $+\infty$ показателями и произвольной абсциссой абсолютной сходимости. Установлена связь между ростом максимального члена производной адамаровской композиции и ростом максимального члена адамаровской композиции производных.

Ключевые слова: адамаровская композиция, ряды Дирихле, максимальный член.