ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 185–217
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 185–217

УДК 517.9

ФАКТОРИЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ І НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРОВНІ МОДЕЛІ, I

Юрій СИДОРЕНКО, Олександр ЧВАРТАЦЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua

Отримано факторизацію вольтеррівського інтегрального оператора бінарних перетворень елементарними операторами Вольтерра. Профакторизовано оператори Фредгольма скінченного рангу фредгольмівськими операторами рангу 1. Наведено застосування в теорії нелінійних інтегровних систем.

Ключові слова: інтегральні перетворення, факторизація операторів Вольтерра та Фредгольма з виродженим ядром.

1. Вступ. Для побудови точних розв'язків солітонних систем важливу роль відіграють "алгебризовані" методи, найбільш відомими серед яких є метод одягання Захарова-Шабата [1]-[3], метод В.О. Марченка [4], теорія Сато-Вільсона (див. наприклад, [5, 6]), а також метод перетворень Дарбу-Крама-Матвєєва [7]-[11]. Побудова широких класів точних розв'язків нелінійних інтегровних моделей теорії солітонів та їхні (2+1)-вимірні узагальнення, які отримують внаслідок накладання нелокальних редукцій в ієрархії рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі, розглядали в багатьох працях (див. наприклад, [12]-[22]). Як одягаючого оператора використовували класичний диференціальний оператор перетворень Дарбу-Крама-Матвєєва. Проблема факторизації диференціального оператора Дарбу-Матвєєва (матричного диференціального оператора першого порядку) за допомогою найпростіших диференціальних операторів типу Дарбу розглядали в [23]. Найцікавіші з погляду фізичних застосувань нелінійні інтегровні системи (нелінійні рівняння Шредінгера, модифіковані рівняння Кортевега-де Вріза, модель Яджими-Ойкави та інші) не підпадають, безпосередньо, під метод одягання за допомогою диференціальних операторів. Ці рівняння отримують після накладання додаткових редукцій типу ермітового спряження. Усунення цієї прогалини досягається використанням як одягаючого оператора бінарного перетворення типу Дарбу [24]-[26]. В [27]-[29] продемонстровано зв'язок інтегрального оператора бінарних перетворень з операторами перетворень оберненої задачі для деяких гіперболічних систем. Мета нашої праці – дослідити факторизацію вольтеррівського інтегрального оператора бінарних перетворень за допомогою інтегральних операторів Вольтерра першого порядку. Частково цю мету реалізували в алгебрі формальних символів псевдодиференціальних операторів в [23]. Структура така. У Розділі 1 подано деякі відомі теореми про диференціальні оператори перетворень Дарбу-Крама для рівняння Штурма-Ліувілля. В Розділі 2 розглянуто факторизацію операторів бінарних перетворень за допомогою елементарних вольтеррівських інтегральних операторів. У Розділі 3 досліджено фредгольмівські оператори, які утворюються як композиції вольтеррівських операторів з різними полярностями, введеними в Розділі 2. Такі оператори цікаві також тісним зв'язком з операторами розсіяння для деяких нестаціонарних систем диференціальних рівнянь з виродженими даними розсіяння (див., наприклад, [29]-[32]). В цьому ж розділі запропоновано метод факторизації операторів Фредгольма скінченного рангу фредгольмівськими операторами першого рангу. Застосування операторів бінарних перетворень, введених у Розділі 2, для побудови розв'язків рівняння Штурма-Ліувілля та деяких нелінійних інтегровних моделей математичної фізики розглянуто у Розділі 4.

2. Теореми Дарбу-Крама та побудова розв'язків рівнянь Штурма-Ліувілля. Розглянемо рівняння Штурма-Ліувілля (одновимірне рівняння Шредінгера)

$$L\{f\} = \lambda f, \tag{1}$$

де $L := -\mathcal{D}^2 + u(x)$, $\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathcal{D}\{f\} = \frac{\partial f}{\partial x} := f_x$, $\mathcal{D}f := f\mathcal{D} + f_x$.

Для подальшої зручності введемо позначення $u(x) := u[1]$, $f = f(x, \lambda) := f[1]$, $L := L[1]$.

Позначимо фіксований розв'язок рівняння (1) при $\lambda = \lambda_1$ через $\varphi_1[1]$, $\varphi_1[1] = \varphi_1[1](x, \lambda_1)$ і визначимо оператор $W_e[\varphi_1[1]]$ так:

$$W_e[\varphi_1[1]] := \varphi_1[1]\mathcal{D}\varphi_1^{-1}[1] = \mathcal{D} - \varphi_{1x}[1]\varphi_1^{-1}[1]. \tag{2}$$

Тоді перетворення Дарбу (DT) $f := f[1] \to f[2]$ довільного розв'язку (1) набуде такого вигляду:

$$f[2] = W_e[\varphi_1[1]]\{f[1]\} = f_x[1] - \frac{\varphi_{1x}[1]}{\varphi_1[1]} f[1] = \frac{\mathcal{W}(\varphi_1[1], f[1])}{\varphi_1[1]}, \tag{3}$$

де $\mathcal{W}(\varphi_1[1], f[1]) = \varphi_1[1] f_x[1] - \varphi_{1x}[1] f[1]$ – звичайні визначники Вронського.

Теорема 1 (Дарбу, 1882)**.** *Функція $f[2]$ задовольняє диференціальне рівняння*

$$L[2]\{f[2]\} = \lambda f[2], \tag{4}$$

де

$$L[2] := -\mathcal{D}^2 + u[2], \quad u[2] = u[1] - 2(\ln \varphi_1[1])_{xx}. \tag{5}$$

Розглянемо деякі застосування теореми Дарбу. Приймемо в рівнянні Штурма-Ліувілля (1) $u[1] = 0$. Нехай $\lambda_1 = -\chi_1^2$, $\chi_1 > 0$. Тоді розв'язки рівняння (1) набудуть вигляду

$$\varphi_1[1] = \cosh(\chi_1 x), \quad \varphi_2[1] = \sinh(\chi_1 x). \tag{6}$$

Подіявши перетворенням Дарбу (2), побудованим за розв'язком $\varphi_1[1]$ (6), на функції

$$f_1[1] := e^{ikx} \quad (\lambda = k^2, \quad k \in \mathbb{R}); \qquad f_2[1] := \varphi_2[1] \quad (\lambda = -\chi_1^2), \tag{7}$$

отримаємо розв'язки рівняння Штурма-Ліувілля (4)

$$f_1[2] := W_e[\varphi_1[1]]\{f_1[1]\} = (ik - \chi_1 \tanh(\chi_1 x))e^{ikx} \sim (ik \mp \chi_1)e^{ikx}, \quad x \to \pm\infty$$

$$f_2[2] := W_e[\varphi_1[1]]\{f_3[1]\} = \chi_1 \cosh^{-1}(\chi_1 x) \in L_2(\mathbb{R}),$$

при $\lambda = k^2$, $\lambda = -\chi_1^2$, відповідно, з експоненційно спадним на обох нескінченностях потенціалом $u[2]$ (5)

$$u[2] = -2\ln(\varphi_1[1])_{xx} = -\frac{2\chi_1^2}{\cosh^2 \chi_1 x}. \tag{8}$$

Теорему Дарбу можна узагальнити для диференціальних перетворень N-го порядку. Нехай лінійно незалежні функції $\varphi_1[1], \ldots, \varphi_N[1]$ є розв'язками рівняння (1) з власними значеннями $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_N$, відповідно. Визначимо функції

$$\varphi_j[2] = W_e[\varphi_1[1]]\{\varphi_j[1]\}, \quad j = \overline{2, N}. \tag{9}$$

Тепер, використовуючи функції $\varphi_1[1]$, $\varphi_2[2]$, визначимо функції $\varphi_j[3]$, $j = \overline{3, N}$

$$\varphi_j[3] := W_e[\varphi_2[2]]W_e[\varphi_1[1]]\{\varphi_j[1]\}, \quad j = \overline{3, N}. \tag{10}$$

На k-му кроці отримаємо функції

$$\varphi_j[k] := W_e[\varphi_{k-1}[k-1]] \ldots W_e[\varphi_2[2]]W_e[\varphi_1[1]]\{\varphi_j[1]\}, \quad j = \overline{k, N}.$$

Правильна така теорема.

Теорема 2 (Крам, 1955)**.** *Нехай*

$$\varphi_j[j] := W_e[\varphi_{j-1}[j-1]]W_e[\varphi_{j-2}[j-2]] \ldots W_e[\varphi_2[2]]W_e[\varphi_1[1]]\{\varphi_j[1]\}, \quad j = 1, N. \tag{11}$$

Тоді функція

$$f[N+1] := W[\varphi]\{f[1]\} := (\mathcal{D} - \frac{\varphi_{Nx}[N]}{\varphi_N[N]}) \ldots (\mathcal{D} - \frac{\varphi_{2x}[2]}{\varphi_2[2]})(\mathcal{D} - \frac{\varphi_{1x}[1]}{\varphi_1[1]})\{f[1]\} =$$

$$= W_e[\varphi_N[N]] \ldots W_e[\varphi_2[2]]W_e[\varphi_1[1]]\{f[1]\} = \frac{\mathcal{W}(\varphi_1[1], \ldots, \varphi_N[1], f[1])}{\mathcal{W}(\varphi_1[1], \ldots, \varphi_N[1])}, \tag{12}$$

де $\mathcal{W}(\varphi_1[1], \ldots, \varphi_N[1], f[1])$ та $\mathcal{W}(\varphi_1[1], \ldots, \varphi_N[1])$ є визначниками Вронського, побудованими за функціями $\varphi_1[1], \ldots, \varphi_N[1], f[1]$ та $\varphi_1[1], \ldots, \varphi_N[1]$, відповідно, задовольняє диференціальне рівняння

$$L[N+1]\{f\} := -f_{xx}[N+1] + u[N+1]f[N+1] = \lambda f[N+1], \tag{13}$$

з потенціалом

$$u[N+1] = u[1] - 2(\ln \mathcal{W}(\varphi_1[1], \ldots, \varphi_N[1]))_{xx}. \tag{14}$$

Для довільного натурального N зафіксуємо дійсні сталі χ_j, $j = \overline{1, N}$: $0 < \chi_1 < \ldots < \chi_N$. Тоді функції

$$\begin{aligned} \varphi_{2k-1} &= \cosh(\chi_{2k-1}(x - x_{2k-1})), \quad k = 1, ..., \left[\tfrac{N+1}{2}\right], \\ \varphi_{2k} &= \sinh(\chi_{2k}(x - x_{2k})), \quad k = 1, ..., \left[\tfrac{N}{2}\right], \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} f_{2k-1} &= \sinh(\chi_{2k-1}(x - x_{2k-1})), \quad k = 1, ..., \left[\tfrac{N+1}{2}\right]; \\ f_{2k} &= \cosh(\chi_{2k}(x - x_{2k})), \quad k = 1, ..., \left[\tfrac{N}{2}\right], \end{aligned} \tag{16}$$

де $\mathbb{R} \ni x_{2k}, x_{2k-1}$ – фіксовані сталі (початкові фази), будуть розв'язками (лінійно незалежними) задачі Штурма-Ліувілля (1) з $u = 0$ та власними значеннями $\lambda = -\chi_j^2$.

За теоремою Крама (при $u[1]=0$) рівняння (13) з регулярним потенціалом $u[N+1]=-2(\ln\mathcal{W}(\varphi_1[1],\ldots,\varphi_N[1]))_{xx}$ при $\lambda=\lambda_j=-\chi_j^2,\ j=1,\ldots,N$ отримаємо такі розв'язки:

$$f_{2k}[N+1]=\frac{\mathcal{W}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N,\cosh\chi_{2k}(x-x_{2k}))}{\mathcal{W}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)}\sim$$

$$\sim\frac{B_1}{B_2}e^{-\chi_{2k}x}=(-1)^N e^{-\chi_{2k}x}\prod_{i=1}^{N}(\chi_i+\chi_{2k}),\quad x\to+\infty,$$

$$f_{2k-1}[N+1]=\frac{\mathcal{W}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N,\sinh\chi_{2k-1}(x-x_{2k-1}))}{\mathcal{W}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)}\sim$$

$$\sim-\frac{B_1}{B_2}e^{-\chi_{2k-1}x}=(-1)^{N-1}e^{-\chi_{2k-1}x}\prod_{i=1}^{N}(\chi_i+\chi_{2k-1}),\quad x\to+\infty,$$

де $B_1=\begin{vmatrix}1&1&\ldots&1&-1\\ \chi_1&\chi_2&\ldots&\chi_N&\chi_j\\ \chi_1^N&\chi_2^N&\ldots&\chi_N^N&(-1)^{N-1}\chi_j^N\end{vmatrix},\quad B_2=\begin{vmatrix}1&\ldots&1\\ \chi_1&\ldots&\chi_N\\ \chi_1^{N-1}&\ldots&\chi_N^{N-1}\end{vmatrix}.$

$$f_{2k}[N+1]\sim\frac{\widetilde{B}_1}{\widetilde{B}_2}e^{\chi_{2k}x}\sim(-1)^N e^{\chi_{2k}x}\prod_{i=1}^{N}(\chi_i+\chi_{2k}),\quad x\to-\infty,$$

$$f_{2k-1}[N+1]\sim-\frac{\widetilde{B}_1}{\widetilde{B}_2}e^{\chi_{2k-1}x}\sim(-1)^{N-1}e^{\chi_{2k-1}x}\prod_{i=1}^{N}(\chi_i+\chi_{2k-1}),\quad x\to-\infty,$$

де $\widetilde{B}_1=\begin{vmatrix}1&1&\ldots&1&1\\ -\chi_1&-\chi_2&\ldots&-\chi_N&-\chi_j\\ (-1)^N\chi_1^N&(-1)^N\chi_2^N&\ldots&(-1)^N\chi_N^N&(-1)^N\chi_j^N\end{vmatrix},$

$$\widetilde{B}_2=\begin{vmatrix}1&\ldots&1\\ -\chi_1&\ldots&-\chi_N\\ (-1)^{N-1}\chi_1^{N-1}&\ldots&(-1)^{N-1}\chi_N^{N-1}\end{vmatrix}.$$

3. Факторизація вольтеррівських операторів. Введемо деякі поняття та означення, які використовуватимемо надалі. Зафіксуємо довільний інтервал (a,b) $(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$ і точку $x_0\in[a,b]$. Розглянемо оператори Вольтерра і Фредгольма

$$A=\int_{x_0}^{x}A(x,s)\cdot ds,\qquad F=\int_a^b F(x,s)\cdot ds,\tag{17}$$

які діють на довільну функцію $f(x)$ так:

$$A\{f\}=\int_{x_0}^{x}A(x,s)f(s)ds,\qquad F\{f\}=\int_a^b F(x,s)f(s)ds.\tag{18}$$

Означення 1. *Оператор Вольтерра A (17) називатимемо оператором Вольтерра порядку $K \in \mathbb{N}$, якщо його ядро можна подати у вигляді*

$$A(x,s) = \sum_{i=1}^{K} p_i(x) q_i(s) =: p(x) q^{\top}(s), \tag{19}$$

де $p(x) = (p_1(x), \ldots, p_K(x))$, $q(s) = (q_1(s), \ldots, q_K(s))$ – $(1 \times K)$-вектор-функції, кожна з яких складається з лінійно незалежних компонент $p_j(x)$, $j = \overline{1,K}$ та $q_l(s)$, $l = \overline{1,K}$.

Оператор Вольтерра A (17) з ядром (19) надалі позначатимемо так:

$$A := p \int_{x_0}^{x} q^{\top} \cdot ds. \tag{20}$$

Означення 2. *Оператор Фредгольма F (17) називатимемо оператором Фредгольма рангу $K \in \mathbb{N}$, якщо його ядро можна подати у вигляді*

$$F(x,s) = \sum_{i=1}^{K} p_i(x) q_i(s) = p(x) q^{\top}(s), \tag{21}$$

де $p(x) = (p_1(x), \ldots, p_K(x))$, $q(s) = (q_1(s), \ldots, q_K(s))$ – $(1 \times K)$-вектор-функції, кожна з яких складається з лінійно незалежних компонент $p_j(x)$, $j = \overline{1,K}$ та $q_l(s)$, $l = \overline{1,K}$.

Оператор Фредгольма F (17) з ядром (21) надалі позначатимемо аналогічно до формули (20)

$$F := p \int_{a}^{b} q^{\top} \cdot ds. \tag{22}$$

Означення 3. *Оператори $W = I + A$ і $S = I + F$, де A, F є вольтеррівським і фредгольмівським операторами з ядрами вигляду (19), (21), ми називатимемо операторами перетворень порядку K і рангу K, відповідно.*

В Означенні 3 символом I позначено одиничний оператор (перетворення тотожності).

Нехай функції $\varphi_1 = \varphi_1(x) := \varphi_1[1]$, …, $\varphi_K = \varphi_K(x) := \varphi_K[1]$, $\psi_1 = \psi_1(x) := \psi_1[1]$, …, $\psi_K = \psi_K(x) := \psi_K[1]$ – неперервні та інтегровні з квадратом модуля на інтервалі (a,b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ (тобто, належать простору $C(a,b) \cap L_2(a,b)$). Позначимо простір таких функцій через $\mathfrak{L}$. Припустимо також, що функції $\varphi_1, \ldots, \varphi_K$ та $\psi_1, \ldots, \psi_K$ лінійно незалежні. c_1, …, $c_k \in \mathbb{C}$. Розглянемо такі інтегральні оператори:

$$\begin{gathered} W_{11} = W[c_1, \varphi_1[1], \psi_1[1]] := I - \varphi_1[1] \Delta_{11}^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \psi_1[1](s) \cdot ds, \\ \widetilde{W}_{11} = \widetilde{W}[c_1, \varphi_1[1], \psi_1[1]] := I - \psi_1[1] \Delta_{11}^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \varphi_1[1](s) \cdot ds, \\ \Delta_{11} := c_1 + \int\limits_{x_0}^{x} \psi_1[1] \varphi_1[1] ds, \quad x_0 \in [a,b]. \end{gathered} \tag{23}$$

Подієімо перетвореннями (23) на функції $\varphi_1[1],\ldots,\varphi_K[1]$ та $\psi_1[1],\ldots,\psi_K[1]$, відповідно

$$\begin{gathered}\varphi_j[2] := W_{11}\{\varphi_j[1]\} = \varphi_j[1] - \varphi_1[1]\Delta_{11}^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\psi_1[1](s)\varphi_j[1](s)ds,\\ \psi_j[2] := \widetilde{W}_{11}\{\psi_j[1]\} = \psi_j[1] - \psi_1[1]\Delta_{11}^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\varphi_1[1](s)\psi_j[1](s)ds, \quad j=\overline{1,K}.\end{gathered} \tag{24}$$

Далі будуємо перетворення за допомогою функцій $\varphi_2[2]$, $\psi_2[2]$

$$\begin{gathered}W_{22} = W[c_2,\varphi_2[2],\psi_2[2]] := I - \varphi_2[2]\Delta_{22}^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\psi_2[2](s)\cdot ds,\\ \widetilde{W}_{22} = \widetilde{W}[c_2,\varphi_2[2],\psi_2[2]] := I - \psi_2[2]\Delta_{22}^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\varphi_2[2](s)\cdot ds,\\ \Delta_{22} := c_2 + \int\limits_{x_0}^{x}\psi_2[2]\varphi_2[2]ds.\end{gathered} \tag{25}$$

На наступному кроці за допомогою перетворень (25) отримуємо функції $\varphi_j[3]$, $\psi_j[3]$

$$\varphi_j[3] := W_{22}\{\varphi_j[2]\}, \quad \psi_j[3] := \widetilde{W}_{22}\{\psi_j[2]\}, \quad j=\overline{1,K}. \tag{26}$$

Зрозуміло, що попередні міркування можна повторювати K разів. На k-му кроці, де $1 \leqslant k < K$, отримаємо функції $\varphi_j[k]$, $\psi_j[k]$, $j=\overline{1,K}$. За допомогою $\varphi_k[k]$, $\psi_k[k]$ будуємо перетворення

$$\begin{gathered}W_{kk} = W[c_k,\varphi_k[k],\psi_k[k]] := I - \varphi_k[k]\Delta_{kk}^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\psi_k[k](s)\cdot ds,\\ \widetilde{W}_{kk} = \widetilde{W}[c_k,\varphi_k[k],\psi_k[k]] = I - \psi_k[k]\Delta_{kk}^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\varphi_k[k](s)\cdot ds, \quad k=\overline{1,K},\\ \Delta_{kk} := c_k + \int\limits_{x_0}^{x}\psi_k[k](s)\varphi_k[k](s)ds.\end{gathered} \tag{27}$$

На наступному кроці будуємо функції $\varphi_j[k+1]$ та $\psi_j[k+1]$

$$\begin{gathered}\varphi_j[k+1] = W_{kk}\{\varphi_j[k]\} = \varphi_j[k] - \varphi_k[k]\Delta_{kk}^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\psi_k[k](s)\varphi_j[k](s)ds,\\ \psi_j[k+1] = \widetilde{W}_{kk}\{\psi_j[k]\} := \psi_j[k] - \psi_k[k]\Delta_{kk}^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\varphi_k[k](s)\psi_j[k](s)ds,\ j=\overline{1,K}.\end{gathered} \tag{28}$$

Позначимо

$$W_k := W_{kk}\circ W_{k-1\ k-1}\circ\ldots\circ W_{11}, \tag{29}$$

$$\widetilde{W}_k := \widetilde{W}_{kk}\circ \widetilde{W}_{k-1\ k-1}\circ\ldots\circ \widetilde{W}_{11}. \tag{30}$$

Оператори W_k та $\widetilde{W}_k$ діють на довільну скалярну функцію $f=f(x)\in\mathfrak{L}$ так:

$$W_k\{f\} = W_{kk}\{\ldots\{W_{11}\{f\}\}\}, \qquad \widetilde{W}_k\{f\} = \widetilde{W}_{kk}\{\ldots\{\widetilde{W}_{11}\{f\}\}\}. \tag{31}$$

Твердження 1. *Оператори W_k (29) та $\widetilde{W}_k$ (30) можна подати у такому вигляді ($1\leqslant k\leqslant K$):*

$$W_k = I - \hat{\varphi}_k\Delta_k^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\hat{\psi}_k^{\top}(s)\cdot ds, \tag{32}$$

$$\widetilde{W}_k = I - \hat{\psi}_k \widetilde{\Delta}_k^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_k^{\top}(s) \cdot ds, \quad \Delta_k = C_k + \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\psi}_k^{\top}(s) \hat{\varphi}_k(s) ds, \quad \Delta_k^{\top} = \widetilde{\Delta}_k. \tag{33}$$

де $\hat{\varphi}_k = (\varphi_1[1], \ldots, \varphi_k[1])$, $\hat{\psi}_k = (\psi_1[1], \ldots, \psi_k[1])$, $C_k = diag(c_1, \ldots, c_k)$. *Оператори* W_k *(32) та* $\widetilde{W}_k$ *(33) діють на скалярну функцію* $f = f(x)$ *так:*

$$W_k\{f\} = f - \hat{\varphi}_k \Delta_k^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\psi}_k^{\top}(s) f(s) ds, \tag{34}$$

$$\widetilde{W}_k\{f\} = f - \hat{\psi}_k \widetilde{\Delta}_k^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_k^{\top}(s) f(s) ds. \tag{35}$$

Доведення. Доведемо спочатку, що оператор W_2 (29) можна зобразити у вигляді (32). За означенням

$$W_{22} = I - \varphi_2[2] \Delta_{22}^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \psi_2[2](s) \cdot ds. \tag{36}$$

Розглянемо добуток $\psi_2[2]\varphi_2[2]$

$$\psi_2[2]\varphi_2[2] = \left(\psi_2[1] - \left(\int\limits_{x_0}^{x} \psi_2[1](s)\varphi_1[1](s) ds \right) \Delta_{11}^{-1} \psi_1[1] \right) \times$$

$$\times \left(\varphi_2[1] - \varphi_1[1] \Delta_{11}^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \psi_1[1](s)\varphi_2[1](s) ds \right) = \left(\int\limits_{x_0}^{x} \psi_2[1]\varphi_2[1](s) ds - \right.$$

$$\left. - \left(\int\limits_{x_0}^{x} \psi_2[1](s)\varphi_1[1](s) ds \right) \Delta_{11}^{-1} \left(\int\limits_{x_0}^{x} \psi_1[1](s)\varphi_2[1](s) ds \right) \right)_x . \tag{37}$$

Отож,

$$\Delta_{22} = c_2 + \int\limits_{x_0}^{x} \psi_2[2](s)\varphi_2[2](s) ds = c_2 + \int\limits_{x_0}^{x} \psi_2[1](s)\varphi_2[1](s) ds -$$

$$- \left(\int\limits_{x_0}^{x} \psi_2[1](s)\varphi_1[1](s) ds \right) \Delta_{11}^{-1} \left(\int\limits_{x_0}^{x} \psi_1[1](s)\varphi_2[1](s) ds \right). \tag{38}$$

Подіємо оператором W_{11} на функцію f

$$f[2] := W_{11}\{f\} = f - \varphi_1[1] \Delta_{11}^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \psi_1[1] f(s) ds. \tag{39}$$

Використавши рівність

$$\int_{x_0}^{x} \psi_2[2] f[2](s) ds = \int_{x_0}^{x} \psi_2[1] f(s) ds -$$

$$- \left(\int_{x_0}^{x} \psi_2[1](s) \varphi_1[1](s) ds \right) \Delta_{11}^{-1} \left(\int_{x_0}^{x} \psi_1[1](s) f(s) ds \right), \tag{40}$$

яку отримуємо аналогічно до формул (37), (38), одержуємо

$$W_{22}\{f[2]\} = W_{22}\{W_{11}\{f\}\} = f[2] - \varphi_2[2] \Delta_{22}^{-1} \int_{x_0}^{x} \psi_2[2](s) f[2](s) ds =$$

$$= f - \varphi_1[1] \Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^{x} \psi_1[1] f(s) ds - \left(\varphi_2[1] - \varphi_1[1] \Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^{x} \psi_1[1](s) \varphi_2[1](s) ds \right) \Delta_{22}^{-1} \times$$

$$\times \left(\int_{x_0}^{x} \psi_2[1] f(s) ds - \left(\int_{x_0}^{x} \psi_2[1](s) \varphi_1[1](s) ds \right) \Delta_{11}^{-1} \left(\int_{x_0}^{x} \psi_1[1](s) f(s) ds \right) \right) =$$

$$= f - (\psi_1[1], \psi_2[1]) \, A_2(x) \int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} \varphi_1[1](s) \\ \varphi_2[1](s) \end{pmatrix} f(s) ds. \tag{41}$$

Залишається зауважити, що для (2×2)-матричної функції $A_2(x)$, де

$$A_{11}(x) = \Delta_{11}^{-1} + \Delta_{11}^{-1} \left(\int_{x_0}^{x} \psi_1[1](s) \varphi_2[1](s) ds \right) \Delta_{22}^{-1} \left(\int_{x_0}^{x} \psi_2[1](s) \varphi_1[1](s) ds \right) \Delta_{11}^{-1},$$

$$A_{12}(x) = -\Delta_{11}^{-1} \left(\int_{x_0}^{x} \psi_1[1](s) \varphi_2[1](s) ds \right) \Delta_{22}^{-1},$$

$$A_{21}(x) = -\Delta_{22}^{-1} \left(\int_{x_0}^{x} \psi_2[1](s) \varphi_1[1](s) ds \right) \Delta_{11}^{-1},$$

$$A_{22}(x) = \Delta_{22}^{-1}, \tag{42}$$

виконується рівність

$$A_2(x) = \begin{pmatrix} c_1 + \int_{x_0}^{x} \psi_1[1] \varphi_1[1](s) ds & \int_{x_0}^{x} \psi_1[1] \varphi_2[1](s) ds \\ \int_{x_0}^{x} \psi_2[1] \varphi_1[1](s) ds & c_2 + \int_{x_0}^{x} \psi_2[1] \varphi_2[1](s) ds \end{pmatrix}^{-1} = \Delta_2^{-1}. \tag{43}$$

Отож,

$$W_2 := W_{22} \circ W_{11} = I - \hat{\varphi}_2(x)\Delta_2^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\psi}_2^{\top}(s) \cdot ds, \tag{44}$$

де $\hat{\varphi}_2 = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\hat{\psi}_2 = (\psi_1, \psi_2)$, $C_2 = diag(c_1, c_2)$.

Аналогічно можна довести, що

$$\widetilde{W}_2 := \widetilde{W}_{22} \circ \widetilde{W}_{11} = I - \hat{\psi}_2(x)\widetilde{\Delta}_2^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_2^{\top}(s) \cdot ds. \tag{45}$$

Тепер припустимо, що твердження виконується для деякого натурального k. Доведемо, що тоді воно буде виконуватись для $k+1$. За припущенням, одержимо

$$W_k := W_{kk} \circ W_{k-1\ k-1} \circ \ldots \circ W_{11} = I - \hat{\varphi}_k(x)\Delta_k^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\psi}_k^{\top}(s) \cdot ds, \tag{46}$$

$$\widetilde{W}_k := \widetilde{W}_{kk} \circ \widetilde{W}_{k-1\,k-1} \circ \ldots \circ \widetilde{W}_{11} = I - \hat{\psi}_k(x)\widetilde{\Delta}_k^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_k^{\top}(s) \cdot ds. \tag{47}$$

Розглянемо оператори

$$W_{k+1} := W_{k+1\ k+1} \circ W_{kk} \circ W_{k-1\ k-1} \circ \ldots \circ W_{11} = W_{k+1\ k+1} W_k \tag{48}$$

$$\widetilde{W}_{k+1} := \widetilde{W}_{k+1\ k+1} \circ \widetilde{W}_{kk} \circ \widetilde{W}_{k-1\ k-1} \circ \ldots \circ \widetilde{W}_{11} = \widetilde{W}_{k+1\ k+1} \widetilde{W}_k. \tag{49}$$

Перевіримо припущення індукції для оператора $\widetilde{W}_{k+1}$. Для W_{k+1} перевірка проводиться аналогічно.

Введемо позначення

$$f[k+1] := \widetilde{W}_k\{f\} = f - \hat{\psi}_k \widetilde{\Delta}_k^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_k^{\top}(s) f ds, \quad f \in \mathfrak{L}. \tag{50}$$

Тоді

$$\widetilde{W}_{k+1}\{f\} = \widetilde{W}_{k+1\ k+1}\{f[k+1]\} =$$

$$= f[k+1] - \psi_{k+1}[k+1]\widetilde{\Delta}_{k+1\ k+1}^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \varphi_{k+1}[k+1](s) f[k+1](s) ds. \tag{51}$$

Використавши те, що $\varphi_{k+1}[k+1] = W_k\{\varphi_{k+1}\}$, а також формулу (50), отримаємо рівність

$$\int\limits_{x_0}^{x} \varphi_{k+1}[k+1](s) f[k+1](s) ds = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi_{k+1}(s) f(s) ds -$$

$$- \left(\int\limits_{x_0}^{x} \hat{\psi}_k(s) \varphi_{k+1}(s) ds \right) \widetilde{\Delta}_k^{-1} \left(\int\limits_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_k^{\top}(s) f(s) ds \right). \tag{52}$$

Відповідно, з рівностей (51), (52) отримуємо, що

$$\widetilde{W}_{k+1}\{f\} = f - \hat{\psi}_k \widetilde{\Delta}_k^{-1} \int_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_k^{\top}(s) f ds - \left(\psi_{k+1} - \hat{\psi}_k(x) \widetilde{\Delta}_k^{-1} \int_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_k^{\top}(s) \psi_{k+1}(s) ds \right) \times$$

$$\times \widetilde{\Delta}_{k+1\ k+1}^{-1} \left(\int_{x_0}^{x} \varphi_{k+1}(s) f(s) ds - \left(\int_{x_0}^{x} \hat{\psi}_k(s) \varphi_{k+1}(s) ds \right) \widetilde{\Delta}_k^{-1} \left(\int_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_k^{\top}(s) f(s) ds \right) \right) =$$

$$= f - \left(\hat{\psi}_k, \psi_{k+1} \right) A_{k+1}(x) \int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_k^{\top}(s) \\ \varphi_{k+1}(s) \end{pmatrix} f(s) ds, \qquad (53)$$

де $A_{k+1}(x)$ – $(k+1) \times (k+1)$-матрична функція, яка виглядає так:

$$A_{k+1}(x) = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix}, \qquad (54)$$

де $A_{11}(x)$, $A_{12}(x)$, $A_{21}(x)$, $A_{22}(x)$ – $(k \times k)$, $(k \times 1)$, $(1 \times k)$, (1×1)-блоки вигляду:

$$A_{11}(x) = \widetilde{\Delta}_k^{-1} + \widetilde{\Delta}_k^{-1} \left(\int_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_k^{\top}(s) \psi_{k+1}(s) ds \right) \widetilde{\Delta}_{k+1\ k+1}^{-1} \left(\int_{x_0}^{x} \hat{\psi}_k(s) \varphi_{k+1}(s) ds \right) \widetilde{\Delta}_k^{-1},$$

$$A_{12}(x) = -\widetilde{\Delta}_k^{-1} \left(\int_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_k^{\top}(s) \psi_{k+1}(s) ds \right) \widetilde{\Delta}_{k+1\ k+1}^{-1},$$

$$A_{21}(x) = -\widetilde{\Delta}_{k+1\ k+1}^{-1} \left(\int_{x_0}^{x} \hat{\psi}_k(s) \varphi_{k+1}(s) ds \right) \widetilde{\Delta}_k^{-1}, \; A_{22}(x) = \widetilde{\Delta}_{k+1\ k+1}^{-1}.$$

Зрештою, залишається зауважити, що

$$A_{k+1}(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{\Delta}_k & \int_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_k^{\top}(s) \psi_{k+1}(s) ds \\ \int_{x_0}^{x} \hat{\psi}_k(s) \varphi_{k+1}(s) ds & c_{k+1} + \int_{x_0}^{x} \psi_{k+1}(s) \varphi_{k+1}(s) ds \end{pmatrix}^{-1} = \widetilde{\Delta}_{k+1}^{-1}. \qquad (55)$$

Отож,

$$\widetilde{W}_{k+1} := I - \hat{\psi}_{k+1}(x) \widetilde{\Delta}_{k+1}^{-1} \int_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_{k+1}^{\top}(s) \cdot ds.$$

Аналогічно перевіряємо вигляд оператора W_{k+1}. □

Отже, довівши Твердження 1 при $k = K$ ми отримали факторизацію операторів перетворень Вольтерра W_K, $\widetilde{W}_K$ (32)-(33) порядку K з діагональною матрицею C_K у вигляді

$$W_K := W_{KK} \circ W_{K-1\ K-1} \circ \ldots \circ W_{11}, \; \widetilde{W}_K := \widetilde{W}_{KK} \circ \widetilde{W}_{K-1\ K-1} \circ \ldots \circ \widetilde{W}_{11}, \qquad (56)$$

де оператори перетворень Вольтерра першого порядку W_{kk}, $\widetilde{W}_{kk}$ визначають формулами (27)-(28).

Нехай $C=(c_{ij})_{i,j=1}^{K}$ – $(K\times K)$-матриця рангу $r\leqslant K$, головні мінори якої до порядку r включно відмінні від нуля. Розглянемо тепер факторизацію операторів

$$W_k'=I-\hat\varphi_k(x)\left(C_k+\int\limits_{x_0}^{x}\hat\psi_k^\top(s)\hat\varphi_k(s)\right)^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\hat\psi_k^\top(s)\cdot ds,\tag{57}$$

$$\widetilde{W}_k'=I-\hat\psi_k(x)\left(C_k^\top+\int\limits_{x_0}^{x}\hat\varphi_k^\top(s)\hat\psi_k(s)ds\right)^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\hat\varphi_k^\top(s)\cdot ds,\tag{58}$$

де $\hat\varphi_k=(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)$, $\hat\psi_k=(\psi_1,\ldots,\psi_k)$ – вектор-функції, компоненти яких лінійно незалежні, $C_k=(c_{ij})_{i,j=1}^{k}$ – матриця, що відповідає головному мінору D_k порядку k. Тобто, $D_k:=\det(C_k)$. Позначимо

$$C\left(\begin{array}{c} i_1,i_2,\ldots,i_p\\ k_1,k_2,\ldots,k_p\end{array}\right):=\begin{vmatrix} c_{i_1k_1} & c_{i_1k_2} & \ldots & c_{i_1k_p}\\ c_{i_2k_1} & c_{i_2k_2} & \ldots & c_{i_2k_p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{i_pk_1} & c_{i_pk_2} & \ldots & c_{i_pk_p}\end{vmatrix},\tag{59}$$

де $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_p\leqslant k$, $1\leqslant k_1<k_2<\ldots<k_p\leqslant k$. Для подальшого застосування потрібна буде теорема.

Теорема 3 ([33],с. 53)**.** *Для довільної $(K\times K)$-матриці C рангу $r\leqslant K$, в якої всі головні мінори до порядку r включно відмінні від нуля*

$$D_j=\det(C_j)\neq 0,\ j=\overline{1,r},\tag{60}$$

правильна така факторизація за допомогою трьох $(K\times K)$-матриць $F=(f_{sj})_{s,j=1}^{K}$, U та $L=(l_{sj})_{s,j=1}^{K}$

$$C=FUL=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0\\ f_{21} & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{K1} & f_{K2} & \ldots & 1\end{pmatrix} diag\left(D_1,\frac{D_2}{D_1},\ldots,\frac{D_r}{D_{r-1}},0,\ldots,0\right)\times$$
$$\times\begin{pmatrix} 1 & l_{12} & \ldots & l_{1K}\\ 0 & 1 & \ldots & l_{2K}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix},\tag{61}$$

де

$$f_{sj}=\frac{C\left(\begin{array}{c}1,2,\ldots,j-1,s\\ 1,2,\ldots,j-1,j\end{array}\right)}{C\left(\begin{array}{c}1,2,\ldots,j\\ 1,2,\ldots,j\end{array}\right)},\qquad l_{js}=\frac{C\left(\begin{array}{c}1,2,\ldots,j-1,j\\ 1,2,\ldots,j-1,s\end{array}\right)}{C\left(\begin{array}{c}1,2,\ldots,j\\ 1,2,\ldots,j\end{array}\right)},\tag{62}$$

$j=1,2,\ldots r$, $s=j+1,\ldots,K$, а f_{sj}, l_{js} – довільні комлексні числа при $j=r+1$, $\ldots$, K, $s=j+1,\ldots,K$.

Позначатимемо через f^-_{sj} елементи матриці F^{-1}, а через l^-_{js} – елементи матриці L^{-1}. Тобто,

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ f^-_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^-_{K1} & f^-_{K2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & l^-_{12} & \dots & l^-_{1K} \\ 0 & 1 & \dots & l^-_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Зауваження 1. Безпосередньо з вигляду матриць F, L, U випливає, що для матриці $C_k = (c_{ij})^k_{i,j=1}$ $(1 \leqslant k \leqslant K)$ правильна формула

$$C_k = F_k U_k L_k, \tag{64}$$

де U_k, F_k, L_k – блоки розмірності $k \times k$, що стоять у лівому верхньому куті відповідних матриць U, F, L теореми 1.

Використовуючи теорему 1 та твердження 1, ми маємо на меті отримати алгоритм для факторизації операторів W'_k (57) та $\widetilde{W}'_k$ (58). Згідно з теоремою 1 матрицю C, що входить в оператори $W'_k, \widetilde{W}'_k$, можна профакторизувати: $C = FUL$ (див. формулу (61)). Обернені матриці F^{-1} та L^{-1} набудуть вигляду (63).

На першому кроці введемо позначення $\widetilde{\varphi}_1[1] := \varphi_1[1]$ та $\widetilde{\psi}_1[1] := \psi_1[1]$ і приймемо

$$\begin{gathered} W_{11} := I - \widetilde{\varphi}_1[1]\Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^{x} \widetilde{\psi}_1[1](s) \cdot ds, \\ \widetilde{W}_{11} := I - \widetilde{\psi}_1[1]\Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^{x} \widetilde{\varphi}_1[1](s) \cdot ds, \\ \Delta_{11} := c_1 + \int_{x_0}^{x} \widetilde{\psi}_1[1]\widetilde{\varphi}_1[1]ds, \end{gathered} \tag{65}$$

де $c_1 := D_1 = c_{11}$. Тепер введемо дві нові функції $\widetilde{\varphi}_2[1] := l^-_{12}\varphi_1[1] + \varphi_2[1]$, $\widetilde{\psi}_2[1] := f^-_{21}\psi_1[1] + \psi_2[1]$, де коефіцієнти l^-_{12}, f^-_{21} визначають з формул (62) та (63).

Подіємо перетвореннями (65) на функції $\widetilde{\varphi}_1[1]$, $\widetilde{\varphi}_2[1]$ та $\widetilde{\psi}_1[1]$, $\widetilde{\psi}_2[1]$, відповідно

$$\begin{gathered} \widetilde{\varphi}_j[2] := W_{11}\{\widetilde{\varphi}_j[1]\} = \widetilde{\varphi}_j[1] - \widetilde{\varphi}_1[1]\Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^{x} \widetilde{\psi}_1[1](s)\widetilde{\varphi}_j[1](s)ds, \\ \widetilde{\psi}_j[2] := \widetilde{W}_{11}\{\widetilde{\psi}_j[1]\} = \widetilde{\psi}_j[1] - \widetilde{\psi}_1[1]\Delta_{11}^{-1} \int_{x_0}^{x} \widetilde{\varphi}_1[1](s)\widetilde{\psi}_j[1](s)ds, \quad j = \overline{1,2}, \end{gathered} \tag{66}$$

де $\Delta_{11} = c_1 + \int_{x_0}^{x} \widetilde{\psi}_1[1](s)\widetilde{\varphi}_1[1](s)ds$.

Будуємо перетворення за допомогою функцій $\widetilde{\varphi}_2[2]$, $\widetilde{\psi}_2[2]$

$$\begin{gathered} W_{22} = W[c_2, \widetilde{\varphi}_2[2], \widetilde{\psi}_2[2]] := I - \widetilde{\varphi}_2[2]\widetilde{\Delta}_{22}^{-1} \int_{x_0}^{x} \widetilde{\psi}_2[2](s) \cdot ds, \\ \widetilde{W}_{22} = \widetilde{W}[c_2, \widetilde{\varphi}_2[2], \widetilde{\psi}_2[2]] := I - \widetilde{\psi}_2[2]\widetilde{\Delta}_{22}^{-1} \int_{x_0}^{x} \widetilde{\varphi}_2[2](s) \cdot ds, \\ \widetilde{\Delta}_{22} := c_2 + \int_{x_0}^{x} \widetilde{\psi}_2[2]\widetilde{\varphi}_2[2]ds, \end{gathered} \tag{67}$$

де

$$c_2 := \frac{D_2}{D_1} = \frac{\det(C_2)}{c_{11}}. \tag{68}$$

Використовуємо дві нові функції $\widetilde{\varphi}_3[1] := l^-_{13}\varphi_1[1] + l^-_{23}\varphi_2[1] + \varphi_3[1]$, $\widetilde{\psi}_3[1] := f^-_{31}\psi_1[1] + f^-_{32}\psi_2[1] + \psi_3[1]$ (коефіцієнти l^-_{13}, l^-_{32}, f^-_{31}, f^-_{32} визначаються з формул (62) та (63)) та будуємо функції $\widetilde{\varphi}_3[2]$, $\widetilde{\psi}_3[2]$ за допомогою операторів W_{11}, $\widetilde{W}_{11}$

$$\widetilde{\varphi}_3[2] := W_{11}\{\widetilde{\varphi}_3[1]\}, \quad \widetilde{\psi}_3[2] := \widetilde{W}_{11}\{\widetilde{\psi}_3[1]\}. \tag{69}$$

Одержавши функції $\widetilde{\varphi}_j[2]$, $\widetilde{\psi}_j[2]$, $j = \overline{1,3}$, будуємо $\widetilde{\varphi}_j[3]$, $\widetilde{\psi}_j[3]$, $j = \overline{1,3}$

$$\widetilde{\varphi}_j[3] := W_{22}\{\widetilde{\varphi}_j[2]\} = W_{22}\{W_{11}\{\widetilde{\varphi}_j[1]\}\},$$
$$\widetilde{\psi}_j[3] := \widetilde{W}_{22}\{\widetilde{\psi}_j[2]\} = \widetilde{W}_{22}\{\widetilde{W}_{11}\{\widetilde{\psi}_j[1]\}\}, \quad j = \overline{1,3}. \tag{70}$$

Зрозуміло, що попередні міркування можна повторювати K разів. На k-му кроці, де $1 \leqslant k < K$, отримаємо функції $\widetilde{\varphi}_j[k]$, $\widetilde{\psi}_j[k]$, $j = \overline{1,k}$. За допомогою $\widetilde{\varphi}_k[k]$, $\widetilde{\psi}_k[k]$ будуємо перетворення

$$\begin{gathered} W_{kk} = W[c_k, \widetilde{\varphi}_k[k], \widetilde{\psi}_k[k]] := I - \widetilde{\varphi}_k[k]\widetilde{\Delta}^{-1}_{kk}\int\limits_{x_0}^{x} \widetilde{\psi}_k[k](s)\cdot ds, \\ \widetilde{W}_{kk} = \widetilde{W}[c_k, \widetilde{\varphi}_k[k], \widetilde{\psi}_k[k]] = I - \widetilde{\psi}_k[k]\widetilde{\Delta}^{-1}_{kk}\int\limits_{x_0}^{x} \widetilde{\varphi}_k[k](s)\cdot ds, \\ \widetilde{\Delta}_{kk} := c_k + \int\limits_{x_0}^{x} \widetilde{\psi}_k[k](s)\widetilde{\varphi}_k[k](s)ds, \quad k = 1, \ldots, K, \end{gathered} \tag{71}$$

де

$$c_k = \frac{\det(C_k)}{\det(C_{k-1})} = \frac{D_k}{D_{k-1}}, \tag{72}$$

або $c_k = 0$, якщо $\det(C_{k-1}) = 0$. На наступному кроці вводимо дві додаткові функції $\widetilde{\varphi}_{k+1}[1] := l^-_{1k}\varphi_1[1] + \ldots + l^-_{k-1\ k}\varphi_{k-1}[1] + \varphi_k[1]$ та $\widetilde{\psi}_{k+1}[1] := f^-_{k1}\psi_1[1] + \ldots + f^-_{k\,k-1}\psi_{k-1}[1] + \psi_k[1]$. Використовуючи послідовно оператори W_{11}, ..., $W_{k-1\ k-1}$ та $\widetilde{W}_{11}$, ..., $\widetilde{W}_{k-1\ k-1}$, вводимо функції

$$\begin{gathered} \widetilde{\varphi}_{k+1}[2] := W_{11}\{\widetilde{\varphi}_{k+1}[1]\}, \quad \widetilde{\varphi}_{k+1}[3] := W_{22}\{\widetilde{\varphi}_{k+1}[2]\}, \quad \ldots, \\ \widetilde{\varphi}_{k+1}[k] := W_{k-1\ k-1}\{\widetilde{\varphi}_{k+1}[k-1]\}; \end{gathered} \tag{73}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{\psi}_{k+1}[2] := W_{11}\{\widetilde{\psi}_{k+1}[1]\}, \quad \widetilde{\psi}_{k+1}[3] := W_{22}\{\widetilde{\psi}_{k+1}[2]\}, \quad \ldots, \\ \widetilde{\psi}_{k+1}[k] := W_{k-1\ k-1}\{\widetilde{\psi}_{k+1}[k-1]\}. \end{gathered} \tag{74}$$

Після цього за допомогою операторів (71) будуємо функції $\widetilde{\varphi}_j[k+1]$, $\widetilde{\psi}_j[k+1]$

$$\widetilde{\varphi}_j[k+1] := W_{kk}\{\widetilde{\varphi}_j[k]\} = W_{kk} \circ W_{k-1\,k-1} \circ \ldots \circ W_{11}\{\widetilde{\varphi}_j[1]\},$$
$$\widetilde{\psi}_j[k+1] := \widetilde{W}_{kk}\{\widetilde{\psi}_j[k]\} = \widetilde{W}_{kk} \circ \widetilde{W}_{k-1\,k-1} \circ \ldots \circ \widetilde{W}_{11}\{\widetilde{\psi}_j[1]\}, \ j = \overline{1, k+1}. \tag{75}$$

Далі будуємо оператори $W_{k+1\,k+1}$ та $\widetilde{W}_{k+1\,k+1}$. Повторюємо такі міркування K разів. Введемо позначення

$$W_k := W_{kk} \circ \ldots W_{11}, \quad \widetilde{W}_k := \widetilde{W}_{kk} \circ \ldots \circ \widetilde{W}_{11}. \tag{76}$$

Тепер доведемо, що оператори W_k та $\widetilde{W}_k$ (76) збігаються з відповідними операторами W_k', $\widetilde{W}_k'$ (57), (58). Тобто, ми хочемо довести, що

$$W_k = I - \hat{\varphi}_k \left(C_k + \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\psi}_k^{\top}(s)\hat{\varphi}_k(s)ds \right)^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\psi}_k^{\top}(s)\cdot ds = \widetilde{W}_k, \tag{77}$$

$$\widetilde{W}_k = I - \hat{\psi}_k(x) \left(C_k^{\top} + \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_k^{\top}(s)\hat{\psi}_k(s)ds \right)^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\varphi}_k^{\top}(s)\cdot ds = \widetilde{W}_k'. \tag{78}$$

За побудовою для вектор-функцій $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_K)$, $\widetilde{\psi} = (\widetilde{\psi}_1, \ldots, \widetilde{\psi}_K)$ виконуються рівності

$$\widetilde{\varphi} := \varphi L^{-1}, \quad \widetilde{\psi}^{\top} := F^{-1}\psi^{\top}. \tag{79}$$

Застосувавши твердження 1 до операторів (76), отримаємо, що

$$\begin{aligned} W_k &= I - \hat{\widetilde{\varphi}}_k \left(U_k + \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\widetilde{\psi}}_k^{\top}(s)\hat{\widetilde{\varphi}}_k(s)ds \right)^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\widetilde{\psi}}_k^{\top}(s)\cdot ds, \\ \widetilde{W}_k &= I - \hat{\widetilde{\psi}}_k(x) \left(U_k + \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\widetilde{\varphi}}_k^{\top}(s)\hat{\widetilde{\psi}}_k(s)ds \right)^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\widetilde{\varphi}}_k^{\top}(s)\cdot ds. \end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned} W_k = I - \hat{\widetilde{\varphi}}_k \left(U_k + \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\widetilde{\psi}}_k^{\top}(s)\hat{\widetilde{\varphi}}_k(s)ds \right)^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\widetilde{\psi}}_k^{\top}(s)\cdot ds = \\ = \hat{\varphi}_k L_k^{-1} \left(U_k + \int\limits_{x_0}^{x} F_k^{-1}\hat{\psi}_k^{\top}(s)\hat{\varphi}_k(s)ds\, L_k^{-1} \right)^{-1} F_k^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\widetilde{\psi}}_k^{\top}(s)\cdot ds = \\ = I - \hat{\varphi}_k \left(C_k + \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\psi}_k^{\top}(s)\hat{\varphi}_k(s)ds \right)^{-1} \int\limits_{x_0}^{x} \hat{\psi}_k^{\top}(s)\cdot ds = W_k'. \end{aligned} \tag{81}$$

Аналогічно доводимо, що $\widetilde{W}_k' = \widetilde{W}_k$. Отож, ми отримали факторизацію операторів W_k' (57), $\widetilde{W}_k'$ (58). Тобто,

$$W_k' = W_k = W_{kk} \circ \ldots W_{11}, \qquad \widetilde{W}_k' = \widetilde{W}_k = \widetilde{W}_{kk} \circ \ldots \circ \widetilde{W}_{11}. \tag{82}$$

Зауваження 2. Отже, ми довели, що оператори перетворень Вольтерра порядку K W_K', $\widetilde{W}_K'$ з матрицею C_K рангу $r \leqslant K$ (див. формули (57)-(58) при $k = K$) можна профакторизувати у вигляді

$$W_K' = W_{KK} \circ \ldots W_{11}, \qquad \widetilde{W}_K' = \widetilde{W}_{KK} \circ \ldots \circ \widetilde{W}_{11}, \tag{83}$$

де оператори W_{kk}, $\widetilde{W}_{kk}$ є операторами порядку 1 та визначаються формулами (71)-(74). Факторизація (83) є аналогом факторизаційної формули (56).

4. Факторизація фредгольмівських операторів. Досліджуватимемо різні факторизації операторів перетворень Фредгольма скінченного рангу. Розглянемо оператори такого вигляду:

$$W^+ = I - \varphi(x)(\Delta^-(x))^{-1} \int\limits_{-\infty}^{x} \psi^\top(s) \cdot ds, \tag{84}$$

$$W^- = I - \varphi(x)(\Delta^+(x))^{-1} \int\limits_{+\infty}^{x} \psi^\top(s) \cdot ds. \tag{85}$$

де $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$ – $(1 \times K)$-векторні функції, кожна компонента яких є неперервною та інтегровною з квадратом на інтервалі (a, b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$;

$$\Delta^\pm(x) = C^\pm + \int\limits_{\pm\infty}^{x} \psi^\top(s)\varphi(s)ds, \tag{86}$$

$C^\pm$ – $(K \times K)$-сталі матриці.

Обернені оператори до W^+ (84), W^- (85) набувають вигляду

$$(W^+)^{-1} = I + \varphi(x) \int\limits_{-\infty}^{x} (\Delta^-(s))^{-1}\psi^\top(s) \cdot ds. \tag{87}$$

$$(W^-)^{-1} = I + \varphi(x) \int\limits_{+\infty}^{x} (\Delta^+(s))^{-1}\psi^\top(s) \cdot ds. \tag{88}$$

Надалі вважатимемо, що матриці $C^\pm$ задовольняють рівність

$$C^+ := C^- + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi^\top(s)\varphi(s)ds, \tag{89}$$

наслідком якої є рівність потенціалів: $\Delta^+ = \Delta^- =: \Delta$.

Твердження 2. *Нехай матриці $C^\pm$ – невироджені. Тоді композиції операторів (84)-(88) набудуть такого вигляду:*

$$S_1 := W^+ \circ (W^-)^{-1} = I - H_1 = I - \varphi(x)\Delta^{-1}(x) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C^-\Delta^{-1}(s)\psi^\top(s) \cdot ds,$$

$$S_2 := (W^-)^{-1} \circ W^+ = I - H_2 = I - \varphi(x)(C^+)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi^\top(s) \cdot ds,$$

$$S_3 := (W^+)^{-1} \circ W^- = I + H_3 = I + \varphi(x)(C^-)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi^\top(s) \cdot ds,$$

$$S_4 := W^- \circ (W^+)^{-1} = I + H_4 = I + \varphi(x)\Delta^{-1}(x)C^+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(s)\psi^\top(s) \cdot ds. \qquad (90)$$

Доведення. Перевіримо першу композицію (90)

$$W^+ \circ (W^-)^{-1} = \left(I - \varphi(x)\Delta^{-1}(x) \int\limits_{-\infty}^{x} \psi^\top(s) \cdot ds\right) \circ \left(I + \varphi(x) \int\limits_{+\infty}^{x} \Delta^{-1}(z)\psi^\top(z) \cdot dz\right) =$$

$$= I - \varphi(x)\Delta^{-1}(x) \int\limits_{-\infty}^{x} \psi^\top(s) \cdot ds + \varphi(x) \int\limits_{+\infty}^{x} \Delta^{-1}(z)\psi^\top(z) \cdot dz -$$

$$-\varphi(x)\Delta^{-1}(x) \int\limits_{-\infty}^{x} \psi^\top(s)\varphi(s) \left(\int\limits_{+\infty}^{s} \Delta^{-1}(z)\psi^\top(z) \cdot dz\right) \cdot ds =$$

$$= I - \varphi(x)\Delta^{-1}(x) \int\limits_{-\infty}^{x} \psi^\top(s) \cdot ds + \varphi(x) \int\limits_{+\infty}^{x} \Delta^{-1}(z)\psi^\top(z) \cdot dz -$$

$$-\varphi(x)\Delta^{-1}(x) \int\limits_{+\infty}^{x} \left(\Delta(x) - C^-\right) \Delta^{-1}(z)\psi^\top(z) \cdot dz + \varphi(x)\Delta^{-1}(x) \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\Delta(z) - C^-\right) \times$$

$$\times \Delta^{-1}(z)\psi^\top(z) \cdot dz = I - \varphi(x)\Delta^{-1}(x)C^- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{-1}(z)\psi^\top(z)dz.$$

Подібно перевіряємо решту композицій (90). □

Тепер дослідимо можливість факторизації фредгольмівського оператора S_2 перетворення (90) рангу K

$$S_2 = I - H_2 = I - \varphi(x) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(C^+\right)^{-1} \psi^\top(s) \cdot ds, \qquad (91)$$

за допомогою фредгольмівських операторів перетворень рангу 1. Вважатимемо, що матриці $C^\pm$ – невироджені і матриця $C^- = diag(c_1^-, c_2^-, \ldots, c_K^-)$ – діагональна. Позначимо $\varphi_1[1] := \varphi_1, \ldots, \varphi_K[1] := \varphi_K$. Далі розглянемо такий оператор перетворень Фредгольма:

$$S_{11} := I - \varphi_1[1](x)(c_1^+)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1[1](s) \cdot ds, \qquad c_1^+ := c_1^- + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1[1](s)\varphi_1[1](s)ds. \quad (92)$$

Введемо функції $\varphi_1[2], \ldots, \varphi_K[2]$ так:

$$\varphi_j[2] := S_{11}\{\varphi_j[1]\} = \varphi_j[1](x) - \varphi_1[1](x)(c_1^+)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1[1](s)\varphi_j[1](s)ds, \quad j = \overline{1, K}. \quad (93)$$

Побудуємо новий оператор S_{22}

$$S_{22} := I - \varphi_2[2](x)(c_2^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2[1](s) \cdot ds, \ c_2^+ = c_2^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2[1](s)\varphi_2[2](s)ds. \tag{94}$$

Далі будуємо функції $\varphi_j[3],\ j = \overline{1,K}$

$$\varphi_j[3] := S_{22}\{\varphi_j[2]\} = \varphi_j[2](x) - \varphi_2[2](x)(c_2^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2[1](s)\varphi_j[2](s)ds, \ j = \overline{1,K}. \tag{95}$$

На k-му кроці ($1 \leqslant k < K$) одержуємо функції $\varphi_1[k], \ldots, \varphi_K[k]$. Будуємо перетворення S_{kk}

$$S_{kk} := I - \varphi_k[k](x)(c_k^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k[1](s) \cdot ds, \ c_k^+ = c_k^- + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k[1](s)\varphi_k[k](s)ds. \tag{96}$$

Далі будуємо нові функції

$$\varphi_j[k+1] := S_{kk}\{\varphi_j[k]\} = \varphi_j[k](x) - \varphi_k[k](x)(c_k^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k[1](s)\varphi_j[k](s)ds, \tag{97}$$

$j = \overline{1,K}$. Через K кроків отримаємо оператори $S_{11}, \ldots, S_{KK}$. Для композиції $\hat{S}_k := S_{kk} \circ S_{k-1\,k-1} \circ S_{22} \circ S_{11}$ правильне твердження.

Твердження 3. *Оператор $\hat{S}_k := S_{kk} \circ S_{k-1\,k-1} \circ S_{22} \circ S_{11}$, де оператори S_{kk}, $k = \overline{1,K}$ визначаютъся формулами (96)-(97), можна зобразити так:*

$$\hat{S}_k = I - \hat{\varphi}_k(x)(C_k^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds, \tag{98}$$

де $\hat{\varphi}_k := (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, $\hat{\psi}_k := (\psi_1, \ldots, \psi_k)$, $C_k^+ = diag(c_1^-, \ldots, c_k^-) + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s)\hat{\varphi}_k(s)ds$. Зокрема, при $k = K$ отримаємо: $\hat{S}_K = S_2$, де оператор S_2 визначений формулою (91).

Доведення. Припустимо, що твердження правильне для деякого $k < K$. Тобто,

$$\hat{S}_k = I - \hat{\varphi}_k(x)(C_k^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds, \tag{99}$$

де $C_k^+ = diag(c_1^-, \ldots, c_k^-) + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s)\hat{\varphi}_k(s)ds$. Тепер знайдемо композицію оператора

$$S_{k+1\,k+1} = I - \varphi_{k+1}[k+1](c_{k+1}^+)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{k+1}[1](s) \cdot ds, \tag{100}$$

де $\varphi_{k+1}[k+1] = \hat{S}_k\{\varphi_{k+1}[1]\} = \varphi_{k+1}[1] - \hat{\varphi}_k(x)(C_k^+)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_k^\top(s)\varphi_{k+1}[1](s)ds$, та оператора $\hat{S}_k$ (99):

$$S_{k+1\,k+1}\circ\hat{S}_k = I - \varphi_{k+1}[k+1](c_{k+1}^+)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_{k+1}[1](s)\cdot ds - \hat{\varphi}_k(x)(C_k^+)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_k^\top(s)\cdot ds +$$

$$+\varphi_{k+1}[k+1](c_{k+1}^+)^{-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_{k+1}(z)\hat{\varphi}_k(z)dz\right)(C_k^+)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_k^\top(s)\cdot ds =$$

$$= I - (\hat{\varphi}_k, \varphi_{k+1}[1])B_{k+1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}\hat{\psi}_k^\top(s)\\ \psi_{k+1}[1](s)\end{pmatrix}\cdot ds. \tag{101}$$

Тут B_{k+1} – стала $(k+1)\times(k+1)$-матриця вигляду:

$$B_{k+1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}, \tag{102}$$

де B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} – $(k\times k)$, $(k\times 1)$, $(1\times k)$, (1×1)-блоки такого вигляду:

$$B_{11} = (C_k^+)^{-1} + (C_k^+)^{-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_k^\top(z)\varphi_{k+1}[1](z)dz\right)(c_{k+1}^+)^{-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_{k+1}[1](z)\hat{\varphi}_k(z)dz\right)(C_k^+)^{-1},$$

$$B_{12} = -(C_k^+)^{-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_k(z)\varphi_{k+1}[1](z)dz\right)(c_{k+1}^+)^{-1},$$

$$B_{21} = -(c_{k+1}^+)^{-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_{k+1}(z)\hat{\varphi}_k(z)dz\right)(C_k^+)^{-1},$$

$$B_{22} = (c_{k+1}^+)^{-1}.$$

Залишається зауважити, що

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} (C_k^+) & \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_k^\top(s)\varphi_{k+1}[1](s)ds \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}_k(s)\psi_{k+1}[1](s)ds & c_{k+1}^- + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_{k+1}[1](s)\varphi_{k+1}[1](s)ds\end{pmatrix} =$$

$$= diag(c_1^-, \ldots, c_k^-, c_{k+1}^-) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_{k+1}^\top(s)\hat{\varphi}_{k+1}(s)ds = C_{k+1}^+. \tag{103}$$

Відповідно,

$$\hat{S}_{k+1} = S_{k+1\,k+1}\circ\hat{S}_k = I - \hat{\varphi}_{k+1}(C_{k+1}^+)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_{k+1}^\top(s)\cdot ds.$$

□

Отже, ми отримали факторизацію оператора Фредгольма S_2 рангу K (91)

$$S_2 = \hat{S}_K = S_{KK} \circ \ldots \circ S_{11}, \tag{104}$$

де оператори S_{kk} є операторами Фредгольма рангу 1 і визначаються формулами (96)-(97).

Використовуючи факторизацію оператора S_2 (91), можна профакторизувати оператор S_3 (90) з невиродженою діагональною матрицею C^-

$$S_3 = I + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(C^-)^{-1}\psi^\top(s) \cdot ds. \tag{105}$$

Тут φ, ψ – $(1 \times K)$ – вектор-функції, $C^- = diag(c_1^-, \ldots, c_K^-)$.

Позначимо $\varphi_1[1] := \varphi_1$, …, $\varphi_K[1] := \varphi_K$, $\psi_1[1] := \psi_1$, …, $\psi_K[1] := \psi_K$ та розглянемо такий оператор:

$$S_{11} := I + \varphi_1[1](x)(c_1^-)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1[1](s) \cdot ds. \tag{106}$$

Для факторизації введемо допоміжний оператор $\widetilde{S}_{11}$

$$\widetilde{S}_{11} := I - \psi_1[1] \left(c_1^- + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1[1]\varphi_1[1] ds \right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1[1] \cdot ds \tag{107}$$

і визначимо функції $\psi_j[2]$, $j = \overline{1, K}$ так:

$$\psi_j[2] := \widetilde{S}_{11}\{\psi_2[1]\} = \psi_j[1](x) - \psi_1[1](x) \left(c_1^- + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1[1](s)\varphi_1[1](s) ds \right) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1[1](s)\psi_j[1](s) ds. \tag{108}$$

Далі побудуємо оператор S_{22}, використовуючи функції $\varphi_2[1]$, $\psi_2[2]$ та сталу c_2^-

$$S_{22} := I + \varphi_2[1](x)(c_2^-)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_2[2](s) \cdot ds \tag{109}$$

і допоміжний оператор $\widetilde{S}_{22}$

$$\widetilde{S}_{22} := I - \psi_2[2] \left(c_2^- + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_2[2](s)\varphi_2[1](s) ds \right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2[1](s) \cdot ds, \tag{110}$$

та визначаємо функцію $\psi_j[3]$, $j = \overline{1, K}$

$$\psi_j[3] := \widetilde{S}_{33}\{\psi_3[2]\}. \tag{111}$$

На k-му кроці ($1 \leqslant k < K$) отримаємо набір функцій $\psi_j[k]$, $j = \overline{1, K}$. Визначаємо оператори

$$S_{kk} = I + \varphi_k[1](c_k^-)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_k[k](s) \cdot ds,$$

$$\widetilde{S}_{kk} := I - \psi_k[k] \left(c_k^- + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_k[k](s) \varphi_k[1](s) ds \right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k[1](s) \cdot ds. \tag{112}$$

Далі будуємо функції $\psi_j[k+1]$, $j = \overline{1, K}$,

$$\psi_j[k+1] := \widetilde{S}_{kk}\{\psi_j[k]\}, \tag{113}$$

та оператори

$$S_{k+1\ k+1} = I + \varphi_{k+1}(c_{k+1}^-)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_{k+1}[k+1](s) \cdot ds,$$

$$\widetilde{S}_{k+1\ k+1} := I -$$

$$-\psi_{k+1}[k+1] \left(c_{k+1}^- + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_{k+1}[k+1](s) \varphi_{k+1}[1](s) ds \right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{k+1}[1](s) \cdot ds. \tag{114}$$

Через K кроків отримаємо оператори S_{kk}, $k = \overline{1, K}$. Правильне таке твердження.

Твердження 4. *Оператор $S_k := S_{kk} \circ S_{k-1\ k-1} \circ \ldots \circ S_{11}$, де S_{kk}, $k = \overline{1, K}$, набувають вигляду (112), можна зобразити так:*

$$S_k = I + \hat{\varphi}_k (C_k^-)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds, \tag{115}$$

де $C_k^- = diag(c_1^-, \ldots, c_k^-)$.

Доведення. Доведення проводимо як і у випадку твердження 14 за допомогою індукції по k. □

Використовуючи твердження 15 та теорему 1, проведемо факторизацію оператора S_3

$$S_3 = I + \varphi(x)(C^-)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi^\top(s) \cdot ds \tag{116}$$

з довільною невиродженою матрицею C^-, усі головні мінори якої відмінні від нуля. Нехай $C^- = (c^-_{ij})^K_{i,j=1}$, $C^-_k := (c^-_{ij})^k_{i,j=1}$, $det(C^-_k) \neq 0$, $k = \overline{1, K}$,
$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_K) = (\varphi_1[1], \ldots, \varphi_K[1])$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_K) = (\psi_1[1], \ldots, \psi_K[1])$ – $(1 \times K)$-вектор-функції, компоненти яких лінійно незалежні функції з простору $\mathfrak{L}$. Позначимо $\widetilde{\varphi}_1[1] := \varphi_1[1]$ та введемо оператори

$$S_{11} := I + \varphi_1[1](x)(c^-_1)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1[1](s) \cdot ds, \tag{117}$$

де $c^-_1 = c^-_{11}$, і допоміжний оператор $\widetilde{S}_{11}$

$$\widetilde{S}_{11} := I - \widetilde{\psi}_1 \left(c^-_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\psi}_1[1]\widetilde{\varphi}_1[1]ds \right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\varphi}_1 \cdot ds. \tag{118}$$

Далі розглядаємо функції $\widetilde{\varphi}_1[1] := \varphi_1[1]$, $\widetilde{\varphi}_2[1] := l^-_{12}\varphi_1[1] + \varphi_2[1]$, $\widetilde{\psi}_1[1] := \psi_1[1]$, $\widetilde{\psi}_2[1] := f^-_{21}\psi_1[1] + \psi_2[1]$, де коефіцієнти l^-_{12}, f^-_{21} визначаються через матрицю C^- з формул (63) та (62) теореми 1. Означуємо функцію $\widetilde{\psi}_j[2]$, $j = 1, 2$ так:

$$\widetilde{\psi}_j[2] := \widetilde{S}_{11}\{\widetilde{\psi}_j[1]\} =$$

$$= \widetilde{\psi}_j[1] - \widetilde{\psi}_1[1] \left(c^-_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\psi}_1[1]\widetilde{\varphi}_1[1]ds \right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\varphi}_1[1](s)\widetilde{\psi}_j[1](s)ds. \tag{119}$$

Використовуючи функції $\widetilde{\varphi}_2[1]$, $\widetilde{\psi}_2[2]$ та сталу $c^-_2 = \frac{det(C^-_2)}{det(C^-_1)}$, побудуємо оператор S_{22}

$$S_{22} := I + \widetilde{\varphi}_2[1](c^-_2)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\psi}_2[2](s) \cdot ds. \tag{120}$$

Оператор $\widetilde{S}_{22}$ визначимо так:

$$\widetilde{S}_{22} := I - \widetilde{\psi}_2[2] \left(c^-_2 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\psi}_2[2](s)\widetilde{\varphi}_2[1](s)ds \right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\varphi}_2[1](s) \cdot ds, \tag{121}$$

та вводимо дві нові функції $\widetilde{\varphi}_3[1] := l^-_{13}\varphi_1[1] + l^-_{23}\varphi_2[1] + \varphi_3[1]$, $\widetilde{\psi}_3[1] := f^-_{31}\psi_1[1] +$ $+ f^-_{32}\psi_2[1] + \psi_3[1]$. Визначимо функцію $\widetilde{\psi}_3[2]$ так:

$$\widetilde{\psi}_3[2] := \widetilde{S}_{11}\{\widetilde{\psi}_3[1]\}. \tag{122}$$

Функції $\widetilde{\psi}_j[3]$, $j = \overline{1, 3}$ задаємо через функції $\widetilde{\psi}_j[2]$, $j = \overline{1, 3}$ так:

$$\widetilde{\psi}_j[3] := \widetilde{S}_{22}\{\widetilde{\psi}_j[2]\} = \widetilde{S}_{22}\{\widetilde{S}_{11}\{\widetilde{\psi}_3[1]\}\}. \tag{123}$$

Далі продовжуємо аналогічні кроки. На k-му кроці ($1 \leqslant k < K$) отримаємо набори функцій $\widetilde{\varphi}_j[1]$, $\widetilde{\psi}_j[k]$, $j = \overline{1,k}$. Визначаємо оператори

$$S_{kk} = I + \widetilde{\varphi}_k (c_k^-)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\psi}_k[k](s) \cdot ds,$$

$$\widetilde{S}_{kk} := I - \widetilde{\psi}_k[k] \left(c_k^- + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\psi}_k[k] \widetilde{\varphi}_k ds \right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\varphi}_k \cdot ds. \tag{124}$$

Далі вводимо функції
$\widetilde{\varphi}_{k+1}[1] := l_{1\,k+1}^- \varphi_1[1] + \ldots + l_{k\,k+1}^- \varphi_k[1] + \varphi_{k+1}[1]$,
$\widetilde{\psi}_{k+1}[1] := f_{k+1\,1}^- \psi_1[1] + \ldots + f_{k+1\,k}^- \psi_k[1] + \psi_{k+1}[1]$,
де коефіцієнти $l_{1\,k+1}^-, \ldots, l_{k\,k+1}^-, f_{k+1\,1}^-, \ldots, f_{k+1\,k}^-$ знаходять з формул (62) і (63). Тепер будуємо $\widetilde{\psi}_{k+1}[j]$, $j = \overline{1,k}$ так:

$$\widetilde{\psi}_{k+1}[2] := \widetilde{S}_{11}\{\widetilde{\psi}_{k+1}[1]\}, \quad \widetilde{\psi}_{k+1}[3] := \widetilde{S}_{22}\{\widetilde{\psi}_{k+1}[2]\}, \quad \ldots,$$

$$\widetilde{\psi}_{k+1}[k] := \widetilde{S}_{k-1\,k-1}\{\widetilde{\psi}_{k+1}[k-1]\}. \tag{125}$$

Далі визначаємо функції $\widetilde{\psi}_j[k+1]$, $j = \overline{1,k+1}$

$$\widetilde{\psi}_j[k+1] := \widetilde{S}_{kk}\{\widetilde{\psi}_j[k]\} = \widetilde{S}_{kk} \circ \widetilde{S}_{k-1\,k-1} \circ \widetilde{S}_{11}\{\widetilde{\psi}_j[1]\}, \tag{126}$$

та оператори

$$S_{k+1\ k+1} = I + \widetilde{\varphi}_{k+1}[1](c_{k+1}^-)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\psi}_{k+1}[k+1](s) \cdot ds,$$

$$\widetilde{S}_{k+1\ k+1} := I - \widetilde{\psi}_{k+1}[k+1] \left(c_{k+1}^- + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\psi}_{k+1}[k+1] \widetilde{\varphi}_{k+1}[1] ds \right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\varphi}_{k+1}[1](s) \cdot ds, \tag{127}$$

де

$$c_k^- = \frac{\det(C_k^-)}{\det(C_{k-1}^-)}. \tag{128}$$

Через K кроків отримаємо оператори S_{kk}, $k = \overline{1,K}$. Для оператора $\hat{S}_k := S_{kk} \circ S_{k-1\,k-1} \ldots \circ S_{11}$ виконується таке твердження.

Твердження 5. *Оператор $\hat{S}_k := S_{kk} \circ S_{k-1,\,k-1} \circ \ldots \circ S_{11}$, де оператори S_{kk} визначаються рівностями (126)-(128), можна зобразити у вигляді*

$$\hat{S}_k = I + \hat{\varphi}_k(x)(C_k^-)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^\top(s) \cdot ds, \tag{129}$$

де $\hat{\varphi}_k = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, $\hat{\psi}_k = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$, $C_k^- = (c_{ij}^-)_{i,j=1}^k$.

Доведення. За зауваженням 1 матриця C_k^- факторизується так: $C_k^- = F_k U_k L_k$. Згідно з побудовою функцій $\hat{\widetilde{\varphi}}_k := (\widetilde{\varphi}_1 \ldots, \widetilde{\varphi}_k)$ та $\hat{\widetilde{\psi}}_k := (\widetilde{\psi}_1 \ldots, \widetilde{\psi}_k)$ їх можна записати у вигляді

$$\hat{\widetilde{\varphi}}_k = \hat{\varphi}_k L_k^{-1}, \quad \hat{\widetilde{\psi}}_k^{\top} = F_k^{-1} \hat{\psi}_k^{\top}. \tag{130}$$

Скориставшись твердженням 5, формулами (130), та факторизацією матриці C^-, отримаємо рівності

$$\hat{S}_k = I + \hat{\widetilde{\varphi}}_k(x) U_k^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\widetilde{\psi}}_k^{\top}(s) \cdot ds = I + \hat{\varphi}_k(x) L_k^{-1} U_k^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_k^{-1} \hat{\psi}_k^{\top}(s) \cdot ds =$$

$$= I + \hat{\varphi}_k(x) (C_k^-)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_k^{\top}(s) \cdot ds. \tag{131}$$

Якщо $k = K$, то отримаємо, що $\hat{S}_K = S_3$. □

Отож, одержали факторизацію оператора Фредгольма S_3 рангу К (90)

$$S_3 = \hat{S}_K = S_{KK} \circ S_{K-1\, K-1} \circ \ldots \circ S_{11}, \tag{132}$$

де оператори S_{kk} – оператори Фредгольма рангу 1, визначаються рівностями (124).

5. Інваріантні перетворення інтегро-диференціальних виразів. Дослідимо застосування інтегральних операторів Розділу 2 для інваріантних перетворень лінійних диференціальних та інтегро-диференціальних виразів і побудови розв'язків рівнянь теорії солітонів.

5.1. Перетворення еволюційних диференціальних виразів за допомогою вольтеррівських операторів скінченного порядку. Розглянемо еволюційний диференціальний вираз такого вигляду:

$$L = \alpha \partial_t - \sum_{i=0}^{n} u_i D^i, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \qquad D := \frac{\partial}{\partial x}, \tag{133}$$

коефіцієнти $u_i = u_i(x,t)$ якого є скалярними функціями. Під формально транспонованим розумітимемо вираз такого вигляду:

$$L^{\tau} = -\alpha \partial_t - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i D^i u_i. \tag{134}$$

Нехай $(1 \times K)$-векторні функції $\varphi = \varphi(x,t)$, $\psi = \psi(x,t)$ є розв'язками рівнянь

$$L\{\varphi\} = \varphi \Lambda, \quad L^{\tau}\{\psi\} = \psi \widetilde{\Lambda}, \quad \Lambda, \widetilde{\Lambda} \in Mat_{K \times K}(\mathbb{C}). \tag{135}$$

Позначимо через $W^{\pm}$ оператори бінарних перетворень порядку K (див. формули (57) та (84), (85)) такого вигляду:

$$W^{\pm} = I - \varphi (\Delta^{\mp})^{-1} \int\limits_{\mp\infty}^{x} \psi^{\top}(s) \cdot ds, \tag{136}$$

де $\Delta^{\pm} = C^{\pm} + \int_{\pm\infty}^{x} \psi^{\top}(s,t)\varphi(s,t)ds$, а матриці C^+, C^- задовольняють рівність (89), наслідком якої є те, що $\Delta^+ = \Delta^-$. В теоремі 4 отримуємо структуру операторів $L^{\pm}$, одержаних після одягання оператора L (133) за допомогою вольтеррівських інтегральних перетворень вигляду (136).

Теорема 4. *Нехай* $(1\times K)$*-вектор-функції* ψ, φ *спадають на обох нескінченностях і задовольняють умову*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi^{\top}\varphi\Lambda - \widetilde{\Lambda}^{\top}\psi^{\top}\varphi)ds = 0. \tag{137}$$

Тоді оператори $L^+ = W^+L(W^+)^{-1}$ *та* $L^- = W^-L(W^-)^{-1}$ *набудуть вигляду*

$$L^{\pm} = (L^{\pm})_{\geqslant 0} + \Phi\mathcal{M}\int_{\mp\infty}^{x} \Psi^{\top}\cdot ds, \tag{138}$$

де

$$\begin{gathered}\Phi = W^+\{\varphi\}(C^-)^{-1} = W^-\{\varphi\}(C^+)^{-1},\\ \Psi = (W^+)^{-1,\tau}\{\psi\}(C^-)^{\top,-1} = (W^-)^{-1,\tau}\{\psi\}(C^+)^{\top,-1},\\ \mathcal{M} = C^+\Lambda - \widetilde{\Lambda}^{\top}C^+ = C^-\Lambda - \widetilde{\Lambda}^{\top}C^-,\end{gathered} \tag{139}$$

а символом $(L^{\pm})_{\geqslant 0}$ *позначили диференціальну частину відповідного оператора* $L^{\pm}$. *Причому диференціальні частини операторів* L^+ *та* L^- *збігаються:* $(L^+)_{\geqslant 0} = (L^-)_{\geqslant 0}$.

Доведення. Спочатку перевіримо еквівалентності різних зображень у формулі (139) з використанням двох операторів W^+, W^-. Прямими обчисленнями отримуємо, що

$$W^+\{\varphi\}(C^-)^{-1} = \varphi(\Delta^-)^{-1} = \varphi(\Delta^+)^{-1} = W^-\{\varphi\}(C^+)^{-1}.$$

Еквівалентність зображень для вектор-функції Ψ перевіряємо аналогічно

$$\mathcal{M} = C^+\Lambda - \widetilde{\Lambda}^{\top}C^+ = C^-\Lambda - \widetilde{\Lambda}^{\top}C^- + \int_{-\infty}^{+\infty}(\psi^{\top}\varphi\Lambda - \widetilde{\Lambda}^{\top}\psi^{\top}\varphi)ds = C^-\Lambda - \widetilde{\Lambda}^{\top}C^-.$$

За Твердженням 2 отримуємо, що композиція операторів $(W^+)^{-1}$ та W^- дає оператор перетворень Фредгольма рангу K такого вигляду (див. формулу (90)):

$$S_3 = (W^+)^{-1}W^- = I + \varphi(C^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^{\top}(s,t)\cdot ds \tag{140}$$

Обчислимо комутатор

$$\begin{aligned}[L,S_3] := LS_3 - S_3L = L\{\varphi\}(C^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^{\top}(s,t)\cdot ds - \varphi(C^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}(L^{\tau}\{\psi(s,t)\})^{\top}\cdot ds =\\ = \varphi(\Lambda(C^-)^{-1} - (C^-)^{-1}\widetilde{\Lambda}^{\top})\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^{\top}(s,t)\cdot ds.\end{aligned} \tag{141}$$

Отож, комутатор оператора Фредгольма S_3 рангу K та диференціального оператора L дорівнює знову оператору Фредгольма рангу K. Розглянемо перетворення подібності для комутатора $[L, S_3]$ такого вигляду:

$$W^+[L,S_3](W^-)^{-1} = W^+\left(\varphi(\Lambda(C^-)^{-1} - (C^-)^{-1}\widetilde{\Lambda}^\top)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi^\top(s,t)\cdot ds\right)(W^-)^{-1} =$$

$$= W^+\{\varphi\}(\Lambda(C^-)^{-1} - (C^-)^{-1}\widetilde{\Lambda}^\top)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}((W^+)^{-1,\tau}\{\psi\})^\top\cdot ds.$$

Використавши позначення $\Phi = W^\pm\{\varphi\}(C^\mp)^{-1}$, $\Psi = (W^\pm)^{-1,\tau}\{\psi\}(C^\mp)^{\top,-1}$, $\mathcal{M} = C^\pm\Lambda - \widetilde{\Lambda}^\top C^\pm$, останню рівність можна записати так:

$$W^+[L,S_3](W^-)^{-1} = \Phi\mathcal{M}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi^\top\cdot ds. \tag{142}$$

Використавши формулу (142) та означення оператора S_3 (140), отримаємо, що

$$W^+L(W^+)^{-1} - W^-L(W^-)^{-1} = W^+[L,S_3](W^-)^{-1} = \Phi\mathcal{M}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi^\top\cdot ds. \tag{143}$$

Скориставшись властивостями оператора Вольтерра та останньою рівністю, одержуємо формулу (138). □

Зауваження 3. В теоремі 4 можна розглядати функції φ та ψ інтегровні лише на правій (лівій) півосі. В цьому випадку для одягання оператора L використовується оператор Вольтерра на відповідній півосі W^- (W^+). Зауважимо, що оператори $W^\pm$ також можна використовувати для інваріантного перетворення інтегро-диференціального оператора L з відповідною полярністю

$$L = \alpha\partial_t - \sum_{i=0}^{n}u_iD^i + \mathbf{q}(x)\mathcal{M}_0\int\limits_{\mp\infty}^{x}\mathbf{r}^\top(s)\cdot ds, \tag{144}$$

де $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ – $(1\times K)$-вектор-функції; $\mathcal{M}_0$ – $(K\times K)$-стала матриця. В алгебрі формальних символів інваріантне перетворення для оператора L проводили в [26].

5.2. Побудова точних розв'язків рівняння Штурма-Ліувілля та нелінійного рівняння Шредінгера. Зафіксуємо довільні точки a, b ($a < b$) з $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ і позначимо через L_1 лінійний інтегро-диференціальний вираз вигляду

$$L_1 := L_1[1] = D + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\int\limits_{x_0}^{x}\mathbf{r}^\top(s)\cdot ds,\ x_0\in(a,b), \tag{145}$$

де $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x) = \mathbf{q}[1]$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x) = \mathbf{r}[1]$ – $(1\times K)$-вектор-функції, які неперервні та інтегровні з квадратом модуля на інтервалі (a,b), тобто належать простору $\mathfrak{L} = C(a,b)\cap L_2(a,b)$.

Правильне таке твердження.

Твердження 6. *Нехай $(1\times K)$-векторні функції φ, ψ компоненти яких належать простору $\mathfrak{L}$, є фіксованими розв'язками рівнянь*

$$L_1\{\varphi\} := L_1[1]\{\varphi\} = \varphi_x + \mathbf{q}[1]\mathcal{M}_0 \int\limits_{x_0}^{x} \mathbf{r}^\top[1](s)\varphi(s)ds = \varphi\Lambda,$$

$$(L_1^\tau\{\psi\})^\top := (L_1^\tau[1]\{\psi\})^\top = -\psi_x^\top - \left(\int\limits_{x_0}^{x} \psi^\top(s)\mathbf{q}[1](s)ds\right)\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top[1] = \widetilde{\Lambda}^\top\psi^\top. \quad (146)$$

з $(K\times K)$-матрицями Λ, $\widetilde{\Lambda}$, а функція f – довільний скалярний розв'язок задачі $L_1\{f\} := L_1[1]\{f\} = f\lambda$ з параметром $\lambda\in\mathbb{C}$. Тоді функція

$$F = W\{f\} = f-\varphi\Delta^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\psi^\top(s)f(s)ds, \quad \Delta = C+\int\limits_{x_0}^{x}\psi^\top(s)\varphi(s)ds, \quad \det(C)\neq 0, \quad (147)$$

де оператор W є оператором перетворень Вольтерра порядку K, є розв'язком інтегро-диференціального рівняння

$$L_1[2]\{F\} = F_x + \varphi\Delta^{-1}\mathcal{M}\int\limits_{x_0}^{x}\Delta^{-1}(s)\psi^\top(s)F(s)ds + \mathbf{q}[2]\mathcal{M}_0\int\limits_{x_0}^{x}\mathbf{r}^\top[2](s)F(s)ds = $$
$$= F\lambda - \Phi\mathcal{K}, \quad (148)$$

де $\Phi = \varphi\Delta^{-1}$, $\mathcal{M} = C\Lambda - \widetilde{\Lambda}^\top C - \psi^\top\varphi(x_0)$, $\mathcal{K} = \psi^\top f(x_0)$, $\mathbf{q}[2] = \mathbf{q}[1] - \varphi\Delta^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\psi^\top(s)\mathbf{q}[1](s)ds$,

$$\mathbf{r}^\top[2] = \mathbf{r}^\top[1] - \left(\int\limits_{x_0}^{x}\mathbf{r}^\top[1](s)\varphi(s)ds\right)\Delta^{-1}\psi^\top.$$

Функція $\Phi = \varphi\Delta^{-1} = W\{\varphi\}C^{-1}$ задовольнятиме таке рівняння:

$$L_1[2]\{\Phi\} = \Phi_x + \varphi\Delta^{-1}\mathcal{M}\int\limits_{x_0}^{x}\Delta^{-1}(s)\psi^\top(s)\Phi(s)ds +$$
$$+\mathbf{q}[2]\mathcal{M}_0\int\limits_{x_0}^{x}\mathbf{r}^\top[2](s)\Phi(s)ds = \Phi C\Lambda C^{-1} - \Phi(\psi^\top\varphi(x_0))C^{-1}. \quad (149)$$

З останнього рівняння отримуємо такий наслідок:

$$\Phi_x - \Phi\mathcal{M}\Delta^{-1} + \mathbf{q}[2]\mathcal{M}_0\int\limits_{x_0}^{x}\mathbf{r}^\top[2](s)\Phi(s)ds = \Phi\widetilde{\Lambda}^\top. \quad (150)$$

Оператор L_1 (145) використовують для побудови розв'язків деяких нелінійних рівнянь математичної фізики (див [34]). Приймемо $\mathcal{M}_0 = 0$ в операторі L_1 і розглянемо з ним в парі еволюційний оператор вигляду

$$M_2 = i\partial_{t_2} - D^2. \quad (151)$$

Використовуючи оператори L_1, M_2 та інтегральні перетворення аналогічного вигляду як у Розділі 2, можна отримати розв'язки нелінійного рівняння Шредінгера. Правильне твердження.

Твердження 7. [34] *Нехай функція φ є фіксованим розв'язком системи*

$$\begin{cases} L_1\{\varphi\} := \varphi_x = \varphi\Lambda, \\ M_2\{\varphi\} := i\varphi_{t_2} - \varphi_{xx} = 0. \end{cases} \tag{152}$$

Приймемо

$$\Delta_2 = C + \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi^* \varphi dx,$$

де ермітову матрицю C визначаємо з рівності: $C\Lambda + \Lambda^* C = \mathbf{1}^\top \mathbf{1}$, $\mathbf{1}$ – вектор-стрічка довжини K. Тоді функція вигляду

$$q = \varphi \Delta_2^{-1} \mathbf{1}^\top = -\frac{\det \begin{pmatrix} \Delta_2 & \mathbf{1}^\top \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}}{\det(\Delta_2)} \tag{153}$$

задовольнятиме нелінійне рівняння Шредінгера

$$iq_{t_2} = q_{xx} + 2|q|^2 q. \tag{154}$$

Зокрема, прийнявши у твердженні 7 $\Lambda_1 = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_K)$, де $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, K}$, $C = \left(\frac{2}{\lambda_s + \bar{\lambda}_j}\right)_{j,s=1}^{K}$ та вибравши як розв'язок системи (152) вектор-стрічку

$$\varphi = (e^{\lambda_1 x - i\lambda_1^2 t_2}, \ldots, e^{\lambda_K x - i\lambda_K^2 t_2}),$$

отримаємо регулярний K-солітонний розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера (154) вигляду (153).

5.3. Інваріантні перетворення інтегро-диференціальних виразів другого порядку. Розглянемо інтегро-диференціальний вираз вигляду

$$L_2 := L_2[1] = -\mathcal{D}^2 + u + \mathbf{q}\mathcal{M}_0 \int\limits_{x_0}^{x} \mathbf{r}^\top(s) \cdot ds, \quad x_0 \in (a, b), \tag{155}$$

де $\mathbf{q} := \mathbf{q}[1](x)$, $\mathbf{r} := \mathbf{r}[1](x)$ – $(1 \times K)$-вектор-функції, компоненти яких інтегровні з квадратом модуля на інтервалі (a, b); $u = u[1](x)$ – скалярна функція, інтегровна з квадратом модуля на (a, b). Для виразу L_2 (155) правильний аналог твердження 6.

Твердження 8. *Нехай $(1 \times K)$-матричні функції φ, ψ компоненти яких належать простору $\mathfrak{L}$, є фіксованими розв'язками рівнянь*

$$L_2\{\varphi\} = L_2[1]\{\varphi\} = \varphi\Lambda, \ (L_2^\tau\{\psi\})^\top := (L_2^\tau[1]\{\psi\})^\top =$$

$$= -\psi_{xx}^\top + \psi^\top u[1] - \left(\int\limits_{x_0}^{x} \psi^\top(s)\mathbf{q}[1](s) ds \right) \mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top[1] = \widetilde{\Lambda}^\top \psi^\top, \tag{156}$$

з відповідними $(K\times K)$*-матрицями* Λ, $\widetilde{\Lambda}$, *а функція* f *– довільний скалярний розв'язок задачі* $L_1\{f\} = L_1[1]\{f\} = f\lambda$ *з параметром* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Тоді функція*

$$F := W\{f\} = f - \varphi\Delta^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\psi^\top(s)f(s)ds, \quad \Delta = C + \int\limits_{x_0}^{x}\psi^\top(s)\varphi(s)ds, \quad \det(C) \neq 0, \tag{157}$$

де оператор W *є оператором перетворень Вольтерра порядку* K, *є розв'язком інтегро-диференціального рівняння*

$$L_2[2]\{F\} := -F_{xx} + u[2]F + \varphi\Delta^{-1}\mathcal{M}\int\limits_{x_0}^{x}\Delta^{-1}(s)\psi^\top(s)F(s)ds +$$

$$+\mathbf{q}[2]\mathcal{M}_0\int\limits_{x_0}^{x}\mathbf{r}^\top[2](s)F(s)ds = F\lambda - \Phi\mathcal{K}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{158}$$

з потенціалом

$$u[2] = u[1] - 2(\varphi\Delta^{-1}\psi^\top)_x, \tag{159}$$

де $\Phi = \varphi\Delta^{-1}$, $\mathcal{M} = C\Lambda - \widetilde{\Lambda}^\top C + (\psi^\top\varphi_x - \psi_x^\top\varphi)(x_0)$, $\mathcal{K} = (\psi_x^\top f - \psi^\top f_x)(x_0)$,

$$\mathbf{q}[2] = \mathbf{q}[1] - \varphi\Delta^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\psi^\top(s)\mathbf{q}[1](s)ds, \quad \mathbf{r}^\top[2] = \mathbf{r}^\top[1] - \left(\int\limits_{x_0}^{x}\mathbf{r}^\top[1](s)\varphi(s)ds\right)\Delta^{-1}\psi^\top(s).$$

Функція $\Phi := \varphi\Delta^{-1} = W\{\varphi\}C^{-1}$ *задовольнятиме таке рівняння:*

$$L_2[2]\{\Phi\} := -\Phi_{xx} + u[2]\Phi + \varphi\Delta^{-1}\mathcal{M}\int\limits_{x_0}^{x}\Delta^{-1}(s)\psi^\top(s)\Phi(s)ds +$$

$$+\mathbf{q}[2]\mathcal{M}_0\int\limits_{x_0}^{x}\mathbf{r}^\top[2](s)\Phi(s)ds = \Phi C\Lambda C^{-1} - \Phi(\psi_x^\top\varphi - \psi^\top\varphi_x)(x_0)C^{-1}.$$

З останнього рівняння отримаємо такий наслідок:

$$-\Phi_{xx} + u[2]\Phi - \Phi\mathcal{M}\Delta^{-1} + \mathbf{q}[2]\mathcal{M}_0\int\limits_{x_0}^{x}\mathbf{r}^\top[2](s)\Phi(s)ds = \Phi\widetilde{\Lambda}^\top. \tag{160}$$

Нас цікавитимуть два характерні випадки попереднього твердження. Тобто, розглянемо випадок, коли вихідний і перетворений оператори $L_2[1]$ (155) та $L_2[2]$ (158) – чисто диференціальні. Це допоможе будувати розв'язки рівнянь Штурма-Ліувілля з ненульовими потенціалами. У випадку ненульової інтегральної частини, використовуючи в парі з оператором L_2 еволюційний диференціальний оператор другого порядку, зможемо будувати розв'язки моделі Яджими-Ойкави (див. [34]).

3.2.1 Побудова розв'язків рівняння Штурма-Ліувілля

Для побудови розв'язків рівняння Штурма-Ліувілля ми використовуватимемо зауваження 4.

Зауваження 4. Приймемо в операторі L_2 (155) $\mathcal{M}_0 = 0$. Завдяки симетричності оператора Шредінгера $-D^2+u$ у випадку дійснозначного потенціалу можемо накласти додаткову редукцію у Твердженні 8: $\Lambda = \widetilde{\Lambda}$, $\psi = \varphi$. Якщо $\mathcal{M} = C\Lambda - \Lambda^\top C = 0$, то функції F та Φ задовольнятимуть рівняння (див. формули (158), (160))

$$-F_{xx} + u[2]F = F\lambda - \Phi\mathcal{K}, \qquad -\Phi_{xx} + u[2]\Phi = \Phi\Lambda^\top. \tag{161}$$

Безпосередньо з рівнянь (161) отримуємо, що функція

$$\widetilde{F} = F + \Phi(\Lambda^\top - I_K\lambda)^{-1}\mathcal{K} = f - \varphi\Delta^{-1}(\Lambda^\top - I_K\lambda)^{-1}\left(\varphi^\top f_x - \varphi_x^\top f\right), \tag{162}$$

де I_K – одинична $(K \times K)$-матриця, за умови невиродженості матриці $(\Lambda^\top - I_K\lambda)$ буде розв'язком рівняння

$$-\widetilde{F}_{xx} + u[2]\widetilde{F} = \widetilde{F}\lambda. \tag{163}$$

Використовуючи твердження 8 та зауваження 3, можемо будувати розв'язки рівняння Штурма-Ліувілля (163) з ненульовими потенціалами. Приймемо в операторі L_2 (155) $u = 0$, $\mathcal{M}_0 = 0$. Тоді функція $\varphi = e^{\chi_1 x}$ буде розв'язком рівняння Штурма-Ліувілля $L_2\{\varphi\} = \varphi\Lambda$ (156) з $\Lambda = -\chi_1^2 \in \mathbb{R}$, $\chi_1 > 0$. За Твердженням 8 та Зауваженням 3 для рівняння Штурма-Ліувілля (163) з потенціалом $u[2]$ (159)

$$u[2] = -\frac{4\chi_1 c_1 e^{2\chi_1 x}}{\left(c_1 + \frac{1}{2\chi_1}e^{2\chi_1 x}\right)^2}, \tag{164}$$

де $c_1 = C - \frac{1}{2\chi_1}e^{2\chi_1 x_0}$, отримаємо такі розв'язки з відповідними власними значеннями (див. формулу (162) при $f = e^{kx}$ та $f = e^{ikx}$, відповідно):

$$\widetilde{F} = \begin{cases} \frac{c_1(k+\chi_1)e^{kx} + \frac{k-\chi_1}{2\chi_1}e^{(k+2\chi_1)x}}{(c_1 + \frac{1}{2\chi_1}e^{2\chi_1 x})(k+\chi_1)}, & \lambda = -k^2, \\ \frac{c_1(ik+\chi_1)e^{ikx} + \frac{ik-\chi_1}{2\chi_1}e^{(ik+2\chi_1)x}}{(c_1 + \frac{1}{2\chi_1}e^{2\chi_1 x})(ik+\chi_1)}, & \lambda = k^2, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}. \tag{165}$$

При $c_1 = \frac{1}{2\chi_1}$ потенціал $u[2]$ (164) набуде вигляду

$$u[2] = -\frac{\chi_1^2}{\cosh(\chi_1 x)^2} \in L_2(\mathbb{R}). \tag{166}$$

Функція F (165) при $k = \chi_1$, $\lambda = -\chi_1^2$ набуде такого вигляду:

$$F = \frac{2}{\cosh(\chi_1 x)}, \tag{167}$$

і буде швидкоспадним розв'язком задачі Штурма-Ліувілля з потенціалом (166) і $\lambda = -\chi_1^2$.

Розглянемо для рівняння Штурма-Ліувілля з потенціалом (166) дві пари розв'язків F_{1+}, F_{2+} та F_{1-}, F_{2-} при $\lambda = k^2$, які мають таку поведінку на безмежностях:

$$F_{1+} = e^{-ikx} + 0(1), x \to +\infty,\ F_{2+} = e^{ikx} + 0(1), x \to +\infty,$$

$$F_{1-} = e^{-ikx} + 0(1), x \to -\infty,\ F_{2-} = e^{ikx} + 0(1), x \to -\infty.$$

Матриця, яка переводить пару розв'язків F_{1+}, F_{2+} в F_{1-}, F_{2-}, називається матрицею монодромії

$$\begin{pmatrix} F_{1-} \\ F_{2-} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} F_{1+} \\ F_{2+} \end{pmatrix}. \tag{168}$$

Як відомо з теорії оберненої задачі розсіяння для оператора Шредінгера $-D^2 + u$, матриця T має таку структуру:

$$T = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ \overline{b(k)} & \overline{a(k)} \end{pmatrix}, \tag{169}$$

де коефіцієнт $a(k)$ називається коефіцієнтом проходження, а коефіцієнт $b(k)$ – коефіцієнтом відбиття. Введемо позначення для функції $\widetilde{F}$ (165) при $\lambda = k^2$: $\widetilde{F}_1 = \widetilde{F}_1(k, x) := \widetilde{F} = \frac{c_1(ik+\chi_1)e^{ikx} + \frac{ik-\chi_1}{2\chi_1}e^{(ik+2\chi_1)x}}{(c_1+\frac{1}{2\chi_1}e^{2\chi_1 x})(ik+\chi_1)}$, та розглянемо в парі з нею функцію $\widetilde{F}_2 = \widetilde{F}_1(-k, x)$. Безпосередньо з формули (165) випливає, що

$$F_{1+} = \frac{-ik+\chi_1}{-ik-\chi_1}\widetilde{F}_2, \quad F_{2+} = \frac{ik+\chi_1}{ik-\chi_1}\widetilde{F}_1, \quad F_{1-} = \widetilde{F}_2, \quad F_{2-} = \widetilde{F}_1. \tag{170}$$

З формул (170) ми отримуємо, що матриця T (169) – діагональна і $a(k) = \frac{-ik-\chi_1}{-ik+\chi_1}$. Тобто, потенціал (166) – так званий прозорий потенціал, коефіцієнт відбиття для якого дорівнює нулю.

3.2.2. Побудова розв'язків моделі Яджими-Ойкави

Тепер розглянемо оператор L_2 (155) при $u = 0$, $\mathcal{M}_0 = 0$ в парі з оператором M_2 (151). Розглянемо рівняння

$$\begin{gathered} L_2\{\varphi\} := -\varphi_{xx} = \varphi\Lambda_2, \qquad M_2\{\varphi\} := i\varphi_{t_2} - \varphi_{xx} = 0, \\ (L_2^\tau\{\psi\})^\top = -\psi_{xx}^\top = \widetilde{\Lambda}_2^\top\psi^\top, \qquad (M_2^\tau\{\psi\}) = M_2\{\psi\} = 0. \end{gathered} \tag{171}$$

Приймемо $\Lambda_2 = \overline{\widetilde{\Lambda}}_2 = diag(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_K^2)$, $\lambda_{j1} := \mathrm{Re}\lambda_j$, $\lambda_{j2} := \mathrm{Im}\lambda_j$, $j = \overline{1, K}$. Тоді функції $\psi = \bar{\varphi}$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_K)$, де

$$\varphi_j = \gamma_j e^{\lambda_{j1}x + 2\lambda_{j1}\lambda_{j2}t_2 + i(\lambda_{j2}x - (\lambda_{j1}^2 - \lambda_{j2}^2)t_2)}, \;\; \gamma_j = e^{k_j + i\theta_j}, \;\; k_j, \theta_j \in \mathbb{R}, \;\; j = \overline{1, K}, \tag{172}$$

будуть розв'язками системи (171). В [34] доведено, що, використовуючи аналоги інтегральних перетворень, введених в розділі 2, отримаємо функції q, u

$$q = \varphi\Delta_2^{-1}\mathbf{1}^\top = -\frac{\det\begin{pmatrix} \Delta_2 & \mathbf{1}^\top \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}}{\det(\Delta_2)}; \tag{173}$$

$$u := (\varphi\Delta^{-1}\varphi^*)_x = -\left[\det\begin{pmatrix} \Delta_2 & \varphi^* \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}(\det\Delta_2)^{-1}\right]_x = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det\Delta_2,$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{1}{\lambda_s^2 - \bar{\lambda}_j^2}((\lambda_s - \bar{\lambda}_j)\bar{\varphi}_j\varphi_s + i)\right)_{j,s=1}^K, \tag{174}$$

які будуть K-солітонними розв'язками моделі Яджими-Ойкави

$$\begin{cases} iq_{t_2} = q_{xx} + 2uq, \\ u_{t_2} = (|q|^2)_x. \end{cases} \tag{175}$$

6. Завершальні зауваження. Інтегральні оператори перетворень Вольтерра та Фредгольма, які досліджували в Розділах 2 та 3, тісно пов'язані з основними об'єктами оберненої задачі розсіяння. В [31, 32] продемонстровано тісний зв'язок оператора S_3 (90) з операторами розсіяння та операторів $W^{\pm}$ (84)-(85) з операторами перетворень оберненої задачі для нестаціонарної системи Дірака, отриманих Л.П. Нижником [30]. Твердження 1 для інтегрального вольтеррівського оператора перетворень є аналогом теореми Крама про факторизацію диференціального одягаючого оператора та теореми з [23] про оператор бінарних перетворень і його факторизацію в алгебрі формальних символів. Застосування результатів другого та третього розділів для інтегрування конкретних інтегровних систем наведено у пунктах 1-3 Розділу 4. Теорема 4 – природне розширення відповідної теореми про одягаюче перетворення Захарова-Шабата з [1]. Без значних змін отримані результати можна узагальнити на випадок матричних операторів перетворення Вольтерра та Фредгольма, що зробимо в наступній праці.

Список використаної літератури

1. *Захаров В.Е.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния / *В.Е. Захаров, А.Б. Шабат* // Функц. анал. и его прил. – 1974. – Т. 8, №3. – С. 43-53.
2. *Захаров В.Е.* Теория солитонов. Метод обратной задачи / *В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский* – М.: Наука, 1980.
3. Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. – М.: Мир, 1983.
4. *Марченко В.А.* Нелинейные уравнения и операторные алгебры / *В.А. Марченко* – К.: Наук. думка, 1986.
5. *Dickey L.A.* Soliton equations and Hamiltonian systems / *L.A. Dickey* // Adv. Math. Phys. – 1991. – Vol. 12.
6. *Ohta Y.* An elementary introduction to Sato theory / *Y. Ohta, D. Takahashi, T. Tokihiro* // Prog. Theor. Phys. Suppl. – 1988. – Vol. 94. – P. 210-241.
7. *Darboux G.* Lecons sur la Theorie Generale de Surface et les Applications Geometriques du Calcul Infinitesimal II / *G. Darboux* – Paris: Gauthiers-Villars, 1889.
8. *Crum M.M.* Associated Sturm-Liouville systems / *M.M. Crum* // Quart. J. Math. Oxford. – 1955. – Vol. 2, №6. – P. 121-127.
9. *Matveev V.B.* Darboux transformations and explicit solutions of the Kadomtsev-Petviashvily equation depending on the functional parameters / *V.B. Matveev* // Letter in Math. Physics. – 1979. – Vol. 3. – P. 213-216.
10. *Matveev V.B.* Darboux transformations and solitons / *V.B. Matveev, M.A. Salle* – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.
11. *Сидоренко Ю.Н.* Метод одевания и преобразования Дарбу / *Ю.Н. Сидоренко* // Диф. уравн. – 2001. – Т. 37, №6. – С. 853-854.
12. *Melnikov V.K.* On equations for wave interactions / *V.K. Melnikov* // Letters in Math. Physics. – 1983. – Vol. 7, №2. – P. 129-136.
13. *Melnikov V.K.* A direct method for deriving a multi-soliton solution for the problem of interaction of waves on the x, y plane / *V.K. Melnikov* // Communications in Math. Physics. – 1987. – Vol. 112, №4 – P. 639-652.
14. *Sidorenko J.* Symmetry constraints of the KP-hierarchy / *J. Sidorenko* // Inverse Problems. – 1991. – Vol. 7. – P. L37-L43.

15. *Konopelchenko B.* (1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems / *B. Konopelchenko, J. Sidorenko, W. Strampp* // Phys. Lett. A. – 1991. – Vol. 157. – P. 17-21.
16. *Cheng Yi.* Constrained of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy / *Yi. Cheng* // J. Math. Phys. – 1992. – Vol.33. – P. 3774-3787.
17. *Sidorenko J.* Multicomponent integrable reductions in Kadomtsev-Petviashvilli hierarchy / *J. Sidorenko, W. Strampp* // J. Math. Phys. – 1993. – Vol. 34, №4. – P. 1429-1446.
18. *Oevel W.* Wronskian solutions of the constrained KP hierarchy / *W. Oevel, W. Strampp* // J. Math. Phys. – 1996. – Vol. 37 – P. 6213-6219
19. *Самойленко А.М.* Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями: багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем / *А.М. Самойленко, В.Г. Самойленко, Ю.М. Сидоренко* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, №1. – С. 78-97.
20. *Митропольський Ю.О.* Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями / *Ю.О. Митропольський, В.Г. Самойленко, Ю.М. Сидоренко* // Доп. НАН України. – 1999. – №8. – С. 19-23.
21. *Liu X.* A generalized dressing approach for solving the extended KP and the extended mKP hierarchy / *X. Liu, R. Lin, B. Jin, and Yu. Zeng* // J. Math. Phys. – 2009. – Vol. 50. – 053506-1 - 053506-14.
22. *Liu X.* A new extended KP hierarchy / *X. Liu, Yu. Zeng, R. Lin* // Physics Letters A. – 2008. – Vol. 372, №21 – P. 3819–3823.
23. *Sidorenko Yu.M.* Factorization of matrix differential operators and Darboux-like transformations / *Yu.M. Sidorenko* // Мат. студії. – 2003. – Т. 19, №2. – С. 181-192.
24. *Oevel W.* Darboux Theorems and the KP Hierarchy / *W. Oevel, W. Schief* // Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations. (ed. P.A. Clarkson). – 1993. – P. 193-205.
25. *Беркела Ю.Ю.* Теореми типу Дарбу і оператори перетворень для нелокально редукованої ермітової ієрархії Кадомцева–Петвіашвілі (Hk-cKP) / *Ю.Ю. Беркела, Ю.М. Сидоренко* // Мат. студії. – 2006. – Т. 25, №1. – С. 38-64.
26. *Сидоренко Ю.* Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегродиференціальних операторів і рівнянь Лакса / *Ю. Сидоренко, О. Чвартацький* // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Мат. Мех. – 2009. -– Вип. 22. – С. 32-35.
27. *Починайко М.Д.* Побудова операторів розсіяння методом бінарних перетворень Дарбу / *М.Д. Починайко, Ю.М. Сидоренко* // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, №8. – С. 1238-1260.
28. *Sydorenko Yu.* Darboux transformations and scattering operators for Dirac's systems / *Yu. Sydorenko, M. Pochynayko* // Мат. вісн. НТШ. – 2006. – Т. 3. – С. 278-288.
29. *Сидоренко Ю.* Оператори перетворень для гіперболічної системи двох рівнянь / *Ю. Сидоренко, О. Чвартацький* // Мат. вісн. НТШ – 2010. – Т. 7. – С. 289-317.
30. *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений / *Л.П. Нижник* – К.: Наук. думка, 1991.
31. *Сидоренко Ю.М.* Обернена задача розсіяння для просторово-двовимірної системи Дірака і метод бінарних перетворень / *Ю.М. Сидоренко, М.Д. Починайко, О.І. Чвартацький* // Вісн. НУ "Львівська політехніка". Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – № 287. – С. 28-59.
32. *Сидоренко Ю.* Конструктивний метод побудови оператора розсіяння для нестаціонарної гіперболічної системи рівнянь / *Ю. Сидоренко* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 72. – С. 263-274.
33. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / *Ф.Р. Гантмахер* – М.: Наука, 1967.

34. *Сидоренко Ю.М.* Інтегрування скалярної ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі методом інтегральних перетворень типу Дарбу / *Ю.М. Сидоренко, О.І. Чвартацький* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2011. – Вип. 75. – С. 181-225.

Стаття: надійшла до редакції 17.09.2012
прийнята до друку 12.12.2012

FACTORIZATION OF INTEGRAL OPERATORS AND NONLINEAR INTEGRABLE EQUATIONS, I

Yuriy SYDORENKO, Oleksandr CHVARTATSKYI

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua

A factorization of the Volterra integral operator of binary transformations by elementary Volterra operators is obtained. Finite rank Fredholm operators is decomposed into the first rank Fredholm operators. Applications to the theory of nonlinear integrable systems is demonstrated.

Key words: integral transformations, factorization of Volterra and Fredholm operators with degenerate kernel.

ФАКТОРИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ, I

Юрий СИДОРЕНКО, Александр ЧВАРТАЦКИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua

Получено факторизацию интегрального оператора Вольтерра бинарных преобразований элементарными интегральными операторами Вольтерра. Профакторизирован оператор Фредгольма конечного ранга операторами Фредгольма ранга 1. Продемонстрировано применение в теории нелинейных интегрируемых систем.

Ключевые слова: интегральные преобразования, факторизация операторов Вольтерра и Фредгольма с вырожденным ядром.