*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 231–234*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 231–234*

УДК 511.3

# СУМІСНІ НАБЛИЖЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ДВОХ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

**Ярослав ХОЛЯВКА**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
*вул. Університетська, 1, Львів, 79000*
*e-mail: ya_khol@franko.lviv.ua*

Нехай $\mathrm{sn}_i\, z$ – алгебрично незалежні еліптичні функції Якобі з алгебричними еліптичними модулями, $(4K_i, 2iK_i')$ – пара основних періодів $\mathrm{sn}_i\, z$ $(i = 1, 2)$. Отримано оцінку сумісного наближення $\mathrm{sn}_1\, K_2$, $\mathrm{sn}_2\, K_1$.

*Ключові слова:* сумісні наближення, еліптична функція Якобі.

**1. Вступ.** Нехай $\mathrm{sn}_1\, z$, $\mathrm{sn}_2\, z$ – алгебрично незалежні еліптичні функції Якобі, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ – еліптичні модулі цих функцій, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ – алгебричні, $0 < \varkappa_1^2 < 1$, $0 < \varkappa_2^2 < 1$, $(4K_1, 2iK_1')$, $(4K_2, 2iK_2')$ – пари основних періодів $\mathrm{sn}_1\, z$, $\mathrm{sn}_2\, z$ [1].

Позначимо $\xi_i$ – наближувальні алгебричні числа, $n_i = d(\xi_i)$ та $L_i = L(\xi_i)$ – їхні степені та довжини, відповідно, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2, \varkappa_1, \varkappa_2)$.

**Теорема 1.** *Якщо хоча б одне з чисел* $\mathrm{sn}_1\, K_2$, $\mathrm{sn}_2\, K_1$ *трансцендентне і для довільних* $m, n \in \mathbb{N}$ *справджується* $|nK_1 - mK_2| > (|K_1| + |K_2|)(n + m)^{-1}$, *то*

$$\max\{|\,\mathrm{sn}_1\, K_2 - \xi_1|,\ \ |\,\mathrm{sn}_2\, K_1 - \xi_2|\} > \exp\left(-\Lambda\, T^2 \ln T\right), \tag{1}$$

*де*

$$T = n(n_1^{-1} \ln L_1 + n_2^{-1} \ln L_2 + \ln n), \quad \Lambda = \Lambda(\varkappa_1, \varkappa_2), \quad \Lambda > 0. \tag{2}$$

Подібні формулювання задач та оцінки можна знайти в [2].

**2. Доведення Теореми 1.** Доведення теореми будемо проводити другим методом Гельфонда (див., наприклад, [3], [4]). Використовуватимемо властивості еліптичних функцій Якобі та Вейєрштрасса, сформульовані в [1], [3], [4].

Припустимо, що (1) не виконується, тобто для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$

$$\max\{|\,\mathrm{sn}_1\, K_2 - \xi_1|, |\,\mathrm{sn}_2\, iK_1' - \xi_2|\} < \exp\left(-\lambda^7\, T^2 \ln T\right). \tag{3}$$

Приймемо

$$S = L = \lambda^3 \ln \lambda T, \quad N = \lambda\sqrt{\lambda T}. \tag{4}$$

$$F(z) = \sum_{l_1=0}^{L} \sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2}\, \mathrm{sn}_1^{l_1} z\, \mathrm{sn}_2^{l_2} z, \quad C_{l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{l_1,l_2,\tau} \zeta_\tau, \quad C_{l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

де $\zeta_\tau$ – твірні елементи $\mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2, \varkappa_1, \varkappa_2)$.

Позначимо $\varphi_{i,1}(z) = \mathrm{sn}_i(z + \frac{K_i}{2})$, $\varphi_{i,2}(w) = \mathrm{sn}_i(w + \frac{3K_i}{2})$, $i = 1, 2$. Тоді

$$\mathrm{sn}_i(z+w) = \frac{\varphi_{i,1}(z)\varphi'_{i,2}(w) + \varphi_{i,2}(w)\varphi'_{i,1}(z)}{1 - \varkappa_i^2\varphi_{i,1}^2(z)\varphi_{i,2}^2(w)} = \frac{\Lambda_{i,1}(z,w)}{\Lambda_{i,2}(z,w)}, \quad \varphi_{k,i}(0) = (1+\varkappa'_k)^{-0,5}, \quad (6)$$

Існують многочлени $G_{i,s,k,l}(\varkappa_i, z)$ такі, що

$$G_{i,s,k,l}(\varkappa_i, z) = \frac{d^s}{d\,w^s}(\Lambda_{i,1}^k(z,w)\Lambda_{i,2}^l(z,w)|_{w=0}, \quad (7)$$

$$\deg G_{i,s,k,l} \leqslant 4(k+l), \quad \ln L(G_{i,s,k,l}) \leqslant s\ln(s(k+l) + c_1(s+k+l)).$$

З (5), (6), (7) подібно як в [3], [4], отримаємо

$$F^{(s)}(z) = \frac{d^s}{d\,w^s}(\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w)\left(F(z+w)\Lambda_{1,2}^{L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{L}(z,w)\right))|_{w=0} =$$

$$= \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\frac{d^{s-t}}{d\,w^{s-t}}(\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w))|_{w=0}\times$$

$$\times\sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}G_{1,t-i,l_1,L-l_1}(\varkappa_1, z)G_{2,i,l_2,L-l_2}(\varkappa_2, z) =$$

$$= \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\frac{d^{s-t}}{d\,w^{s-t}}(\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w))|_{w=0}F_{s,t}(z). \quad (8)$$

Нехай $\xi_3^2 = (1-\xi_1^2)(1-\varkappa_1^2\xi_1^2)$, $\xi_4^2 = (1-\xi_2^2)(1-\varkappa_2^2\xi_2^2)$. Позначимо через $F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$ і $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$ вирази, отримані з $F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2)$ та $F_{s,t}(4n_1K_1 + 4n_2K_2)$ заміною $\mathrm{sn}_1 K_2$, $\mathrm{sn}_2 K_1$, $\mathrm{sn}'_1 K_2$, $\mathrm{sn}'_2 K_1$ на $\xi_1, \ldots, \xi_4$. Розглянемо $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$ при $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$ як $N^2S$ лінійних форм від $nL^2$ змінних $C_{l_1,l_2,\tau}$. Застосувавши принцип Діріхле ([5], лема 4.1), виберемо не всі рівні нулю $C_{l_1,l_2,\tau}$ такими, що для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant S$

$$F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2) = 0, \quad |C_{l_1,l_2,\tau}| < \exp(c_2\lambda^6\ln\lambda\, T^2\ln T). \quad (9)$$

З (1), (2), (4), (9) одержимо для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant S$

$$|F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2) - F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^7T^2\ln T). \quad (10)$$

З (9), (10) при $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant S$ одержимо

$$|F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^7T^2\ln T). \quad (11)$$

Доведемо, що (11) виконується і для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$.

Нехай $G(z) = F(z)\sigma_1^L(z-\omega_1)\sigma_2^L(z-\omega_2)$, де $\omega_i$ – півперіод $\wp_i(u)$, а $\sigma_i(z)$ – $\sigma$-функції, що відповідають $\mathrm{sn}_i\, z$ [1]. Виберемо найменше $r \in \mathbb{N}$ таке, що $r > 32N(|K_1|+|K_2|)$, $R = 12r$. Тоді з (2), (4), (5), (9) та формули Ерміта ([5], лема 4.7) випливає

$$|G(z)|_{|z|\leqslant R} < \exp(-\lambda^6\ln\lambda\, T^2\ln T). \quad (12)$$

З (12) отримаємо для $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$

$$|G^{(s)}(z)|_{|z|\leqslant r} < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^6\ln\lambda\, T^2\ln T). \quad (13)$$

Для досить малого $\varepsilon$ в $\varepsilon$-околах точок $4n_1K_1$ функція $\sigma_2(z-\omega_2)$ та $\varepsilon$-околах точок $4n_2K_2$ функція $\sigma_1(z-\omega_1)$ не мають нулів, тому для $|n_1|, |n_2| \leqslant 32N$ випливає

$$|\sigma_i(z-\omega_i)|_{z\in V(\varepsilon, 4n_1K_1+4n_2K_2)} > \exp(-c_3\lambda^5 \ln\lambda T^2). \tag{14}$$

З (12)–(14) для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$ отримаємо

$$|F^{(s)}(4n_1K_1+4n_2K_2)| < \exp(-\frac{1}{3}\lambda^6 \ln\lambda T^2 \ln T). \tag{15}$$

Враховуючи (10), для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$ та $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$ з (15) випливає

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)| < \exp(-\frac{1}{4}\lambda^6 \ln\lambda T^2 \ln T). \tag{16}$$

Розглядаючи $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \lambda S$, $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, як значення відповідного многочлена в алгебричних точках, з теореми Ліувілля ([5], лема 9.2) отримаємо для $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2) \neq 0$ оцінку

$$|F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)| > \exp(-\lambda^5 \ln\lambda T^2 \ln T). \tag{17}$$

З (8), (17) одержимо для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)| > \exp(-2\lambda^5 \ln\lambda T^2 \ln T). \tag{18}$$

Оцінки (16) та (18) суперечливі, тому для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \lambda S$ $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2) = 0$. Тоді при $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$

$$F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2) = 0. \tag{19}$$

З (19) випливає, що многочлен $F(z)$ має не менше $c_4\lambda^7 \ln\lambda T^2$ нулів (з врахуванням кратності), але нулів може бути не більше $c_5\lambda^6 \ln\lambda T^2$, тому для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$ припущення (3) приводить до протиріччя, яке й доводить теорему.

## Список використаної літератури

1. *Lawden D.F.* Elliptic functions and applications / *D.F. Lawden* – 1989.
2. *Fel'dman N.I.* Transcendental Numbers / *N.I. Fel'dman, Yu.V. Nesterenko* – Springer, 1998.
3. *Chudnovsky G.V.* Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann-Weierschtrass theorem / *G.V. Chudnovsky* // Inventiones Math. – 1980. – Vol. 61. – P. 267-290.
4. *Нестеренко Ю.В.* О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции / *Ю.В. Нестеренко* // Изв. РАН. Сер. мат. – 1995. – Т. 59, №4. – С. 155-178.
5. *Фельдман Н.И.* Седьмая проблема Гильберта / *Н.И. Фельдман* – Москва: Изд-во МГУ, 1982.

*Стаття: надійшла до редакції 18.10.2012*
*прийнята до друку 12.12.2012*

# SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF VALUE OF TWO ELLIPTIC FUNCTIONS

**Yaroslav KHOLYAVKA**

*Ivan Franko National University of L'viv,*
*Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000*
*e-mail: ya_khol@franko.lviv.ua*

Let $\operatorname{sn}_i z$ be algebraically independent Jacobi elliptic functions with algebraic modulus, $(4K_i, 2iK_i')$ be main periods $\operatorname{sn}_i z$ $(i = 1, 2)$. We estimate from below the simultaneous approximation $\operatorname{sn}_1 K_2$, $\operatorname{sn}_2 K_1$.

*Key words:* simultaneous approximation, Jacobi elliptic function.

# СОВМЕСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**Ярослав ХОЛЯВКА**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
*ул. Университетская, 1, Львов, 79000*
*e-mail: ya_khol@franko.lviv.ua*

Пусть $\operatorname{sn}_i z$ – алгебраически независимые эллиптичекие функции Якоби с алгебраическими эллиптичекими модулями, $(4K_i, 2iK_i')$ – пара основных периодов $\operatorname{sn}_i z$ $(i = 1, 2)$. Получено оценку совместного приближения $\operatorname{sn}_1 K_2$, $\operatorname{sn}_2 K_1$.

*Ключевые слова:* совместные приближения, эллиптичекая функция Якоби.