ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 11–23
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 11–23

УДК 517.95

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ І НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНО-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ ВИРОДЖУЮТЬСЯ В ПОЧАТКОВИЙ МОМЕНТ ЧАСУ

Микола БОКАЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com

Доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків задачі без початкових умов для лінійних і нелінійних анізотропних еліптично-параболічних рівнянь другого порядку, які задані в необмежених за просторовими змінними областях і вироджуються в початковий момент часу. Накладаються умови на поведінку розв'язків задачі та зростання її вихідних даних в околі початкового моменту часу та на нескінченності за просторовими змінними. Рівняння мають показники нелінійності, які залежать від точок області визначення рівнянь і напряму диференціювання, а їхні узагальнені розв'язки отримують з узагальнених просторів Лебега-Соболєва.

Ключові слова: лінійне рівняння, нелінійне рівняння, еліптично-параболічне рівняння, вироджене параболічне рівняння, задача без початкових умов, узагальнений простір Лебега-Соболєва, необмежена область.

1. Вступ. Нехай Ω – необмежена область в арифметичному просторі $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) з евклідовою нормою $|\cdot|$ ($|x| := (|x_1|^2 + ... + x_n|^2)^{1/2}$ для $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$). Припускаємо, що межа $\partial\Omega$ області Ω є C^1 многовидом розмірності $n-1$. Нехай Γ_0 – замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема, Γ_0 може бути порожньою множиною або збігатися з $\partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$; $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі. Нехай $S := (0, T]$, де $T > 0$ – деяке число. Приймемо $Q := \Omega \times S$, $\widetilde{Q} := \overline{\Omega} \times S$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times S$.

Розглянемо питання про *відшукання функції* $u : \widetilde{Q} \to \mathbb{R}$, *яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння*

$$\varphi(t)\frac{\partial}{\partial t}(b(x)u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + a_0(x, t, u, \nabla u) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \qquad (1)$$

© Бокало М., 2012

та крайові умови

$$u\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_a}\Big|_{\Sigma_1} = 0, \tag{2}$$

де $a_i(x,t,s,\xi)$, $(x,t,s,\xi) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f(x,t)$, $(x,t) \in Q$, – задані дійснозначні функції, $\partial u(y,t)/\partial \nu_a := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(y,t,u,\nabla u)\,\nu_i(y)$, $(y,t) \in \Sigma_1$, – похідна по "конормалі", а φ, b – функції, які задовольняють умови

Φ: $\varphi \in C([0,T]) \cap C^1((0,T])$, $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$, $\varphi(0) = 0$ і $\int_0^T [\varphi(t)]^{-1} dt = +\infty$;

B: $b \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $b \geqslant 0$.

Зауважимо, що типовим прикладом функції φ, яка задовольняє умову Φ, є $\varphi(t) = t^\alpha$, $t \in [0,T]$, де $\alpha \geqslant 1$, а прикладом функції b, що задовольняє умову **B**, є характеристична функція довільної вимірної підмножини Ω, тобто рівність $b = 0$ може виконуватися на будь-якій вимірній підмножині Ω. Це разом з припущенням, що просторова частина диференціального виразу в лівій частині рівняння (1) є еліптичною, дає підстави стверджувати, що рівняння (1) *еліптично-параболічне* з виродженням у початковий момент часу [1]. Зазначимо, що параболічні рівняння, системи та варіаційні нерівності з виродженням у початковий момент розглядали, зокрема, в [2] – [7].

Зауваження 1. Нехай $\Omega = (0,+\infty)$, $\Gamma_0 = \{0\}$, $\Gamma_1 = \emptyset$ і задано рівняння

$$tu_t - u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in (0,+\infty) \times (0,T], \tag{3}$$

та крайову умову

$$u|_{x=0} = 0. \tag{4}$$

Очевидно, що функція $u_{\lambda,A}(x,t) = At^{-\lambda} \sin\sqrt{\lambda}x$, $(x,t) \in (0,+\infty) \times (0,T]$, де $\lambda > 0$, A – довільні сталі, є розв'язком рівняння (3), який задовольняє його в класичному сенсі і для якого виконується умова (4). Також очевидно, що функція $u_A(x,t) = Ax$, де A – довільна стала, теж є розв'язком рівняння (3) і задовольняє умову (4). Звідси випливає, що для єдиності розв'язку рівняння (3) з крайовою умовою (4) потрібні додаткові умови на його поведінку при $|x| \to +\infty$ та $t \to +0$, які можна трактувати як аналоги крайової умови на нескінченності та стандартної початкової умови. Можна довести, що такими умовами може бути вимога обмеженості розв'язку.

На підставі цього зауваження можна зробити такий висновок. Оскільки умова єдиності розв'язку є визначальною для коректного формулювання задачі у випадку еволюційних рівнянь, то природно розглядати таку задачу: знайти розв'язок рівняння (1) в області Q, який задовольняє крайову умову (2) та деяку умову на його поведінку при $|x| \to +\infty$ і $t \to +0$ [8]. Такою додатковою умовою може бути умова належності розв'язку до певного вагового функційного простору [2] – [4], [6], [7]. Однак серед нелінійних рівнянь вигляду (1) є такі, для яких їхні розв'язки визначаються однозначно тільки крайовими умовами вигляду (2) [9], [10]. Наприклад, рівняння

$$tu_t - u_{xx} + |u|^{p-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = (0,+\infty) \times (0,T],$$

де $p > 2$ – яке-небудь число, з крайовою умовою (4) має не більше одного розв'язку. Зауважимо, що задачі обох видів називають *задачами без початкових умов*.

Рівняння вигляду (1) тісно пов'язані з рівняннями, які мають вигляд відмінний від (1) тільки в тому, що $\varphi = 1$ і область задання необмежена знизу за часовою змінною, наприклад, має вигляд $\Omega \times (-\infty, 0]$ [1]. Детальніше це розглядатимемо пізніше. Для рівнянь, заданих в необмежених знизу за часовою змінною областях, також розглядаються задачі без початкових умов або, як їх ще називають, задачі Фур'є (див. [12] – [16] і бібліографію там) і ці задачі у відповідному сенсі еквівалентні згаданим вище. Ми, зробивши додаткові припущення на вихідні дані, виділили класи еліптично-параболічних рівнянь вигляду (1), елементами яких є лінійні та нелінійні анізотропні рівняння, для яких задачі без початкових умов за певних обмежень на поведінку розв'язків при $|x| \to +\infty$ і $t \to +0$ є однозначно розв'язними. Отримані тут результати є перенесенням на випадок рівнянь вигляду (1) результатів, отриманих в [5] для слабко нелінійних параболічних рівнянь.

Прикладами рівнянь типу (1), які тут вивчають, є анізотропні рівняння

$$\varphi(t)\frac{\partial}{\partial t}(b(x)u) - \sum_{i=1}^{n}\Big(\hat{a}_i(x,t)|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i}\Big)_{x_i} + \hat{a}_0(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u = f(x,t), \tag{5}$$

де $\hat{a}_i$ $(i=\overline{0,n})$ – деякі вимірні додатні та відділені від нуля функції, $p_i > 1$ $(i = \overline{0,n})$ – вимірні обмежені функції (так звані показники нелінійності).

В останні десятиліття дуже активно почали вивчати нелінійні диференціальні рівняння зі змінними показниками нелінійності, частковими випадками яких є рівняння (5) (див., наприклад, [11], [17], [18]). Це пов'язано з тим, що такі рівняння виникають при математичному моделюванні різних типів фізичних процесів і, зокрема, описують потоки електрореологічних речовин, процеси відновлення зображень, електричний струм у кондукторі під впливом змінного температурного поля [19].

Ми розглядатимемо *узагальнені розв'язки* рівняння (1), що задовольняють умови (2), а для їхнього означення та дослідження нам будуть потрібні деякі лінійні локально опуклі простори. Тому спочатку подамо означення цих просторів.

Нехай G – довільна область в $\mathbb{R}^m$, де $m = n$ або $m = n+1$. Для будь-якої функції $r \in L_\infty(G)$ такої, що $r(z) \geqslant 1$ для майже всіх $z \in G$, на просторі $C_{\rm c}(\overline{G}) := \{v \in C(\overline{G}) \,|\, \operatorname{supp} v$ – обмежена множина$\}$ вводимо норму

$$\|v\|_{L_{r(\cdot)}} := \inf\{\lambda > 0 \,|\, \rho_{G,r}(v/\lambda) \leqslant 1\},$$

де $\rho_{G,r}(v) := \int_G |v(z)|^{r(z)}\,dz$. Зауважимо таке: коли $r(z) = r_0 \equiv \mathrm{const} \geqslant 1$ для м.в. $z \in G$, то $\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(G)} = \|\cdot\|_{L_{r_0}(G)}$. Поповнення отриманого нормованого лінійного простору – так званий *узагальнений простір Лебега* (див., наприклад, [20], [21]) – позначимо через $L_{r(\cdot)}(G)$. Зауважимо таке: $\operatorname*{ess\,inf}_{z\in\Omega} r(z) > 1$, то спряжений до $L_{r(\cdot)}(G)$ можна ототожнити з $L_{r^*(\cdot)}(G)$, де $r^*(z)$, $z \in G$ – функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{r(z)} + \frac{1}{r^*(z)} = 1$, $z \in G$. Легко переконатися, що правильним є таке твердження: коли G – обмежена множина, то $L_{r(\cdot)}(G)$ є підпростором простору $L_1(G)$.

Якщо G є необмеженою областю, то через $L_{r(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{G})$ позначатимемо поповнення $C(\overline{G})$ в топології, що породжена системою півнорм: $\{\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(G')} \,|\, G' \in Bd(G)\}$, де під $Bd(G)$ розуміємо множину всіляких можливих обмежених підобластей області G. Зрозуміло, що $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{G}) \subset L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{G})$.

Визначимо

$$C(S;L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) := \{v : S \to L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \mid v \in C([\sigma,T];L_2(\Omega'))\ \forall\,\sigma \in (0,T),\ \forall\,\Omega' \in Bd(\Omega)\}$$

з системою півнорм $\{\|\cdot\|_{C([\sigma,T];L_2(\Omega'))} \mid \sigma \in (0,T),\ \Omega' \in Bd(\Omega)\}$.

Нехай $p = (p_0,\ldots,p_n)$ – вектор-функція, яка задовольняє умову

P: для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ функція $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна, $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega'} p_i(x) > 1, \quad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega'} p_i(x) < \infty$ для будь-яких $\Omega' \in Bd(\Omega)$.

Позначимо через $W^1_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_0)$ поповнення простору $C^1(\overline{\Omega},\Gamma_0) := \big\{v \in C^1(\overline{\Omega}) \big| \, v\big|_{\Gamma_0} = 0\big\}$ в топології, яка породжена системою півнорм

$$\Big\{\|v\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega')} + \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega')} \mid \Omega' \in Bd(\Omega)\Big\}.$$

Легко довести, що $W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_0) \subset W^1_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Введемо лінійний локально опуклий простір $\mathbb{U}^{b,0}_{p,\mathrm{loc}}$ як поповнення простору $C^{1,0}(\overline{Q},\Sigma_0) := \{u \in C(\overline{Q}) \,\big|\, u_{x_i} \in C(\overline{Q})\ (\,i = \overline{1,n}\,),\ u|_{\Sigma_0} = 0\}$ за топологією, породженою системою півнорм

$$\big\{\|u\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega'\times(\sigma,T))} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega'\times(\sigma,T))} + \sup_{t\in[\sigma,T]} \|b^{1/2}(\cdot)u(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega')} \mid \sigma \in (0,T),\ \Omega' \in Bd(\Omega)\,\big\}.$$

Очевидно, якщо u – будь-який елемент простору $\mathbb{U}^{b,0}_{p,\mathrm{loc}}$, то $u \in (S \to W^1_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_0))$, $b^{1/2}u \in C(S;L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$ та $u \in L_{p_0(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega\times(\sigma,T)})$, $u_{x_i} \in L_{p_i(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega\times(\sigma,T)})$ $(\,i = \overline{1,n}\,)$ для довільного $\sigma \in (0,T)$.

Позначимо через $\mathbb{U}^{1,0}_{p,\mathrm{c}}$ простір, складений з елементів $v \in \mathbb{U}^{b,0}_{p,\mathrm{loc}}$ таких, що $\operatorname{supp} v$ є обмеженою множиною, яка розташована на додатній відстані від гіперплощини $\{t = 0\}$, $v_t \in L_2(Q)$, $v(\cdot,T) = 0$.

2. Формулювання задачі й основних результатів. Спочатку введемо відповідні обмеження на вихідні дані задачі, а точніше, визначимо класи вихідних даних задачі, які ми будемо розглядати.

Нехай $p = (p_0,p_1,\ldots,p_n)$ – вектор-функція, яка задовольняє умову **P**. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину впорядкованих наборів дійснозначних функцій $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$, які визначені на $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ і задовольняють умови:

$\mathbf{A_1}$: для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ функція $a_i(x,t,s,\xi)$, $(x,t,s,\xi) \in Q\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, є каратеодорівською, тобто, для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_i(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \equiv \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – неперервна і для будь-яких $(s,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ функція $a_i(\cdot,\cdot,s,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ – вимірна;

$\mathbf{A_1^*}$: $a_i(x,t,0,0) = 0$ $(i = \overline{0,n})$ для майже всіх $(x,t) \in Q$;

$\mathbf{A_2}$: для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, будь-яких $(s,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ і майже всіх $(x,t) \in Q$ виконується нерівність

$$|a_i(x,t,s,\xi)| \leqslant h^a_{1,i}(x,t)\Big(|s|^{p_0(x)/p_i^*(x)} + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p_j(x)/p_i^*(x)}\Big) + h^a_{2,i}(x,t),$$

де $h^a_{1,i} \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $h^a_{2,i} \in L_{p^*_i(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $1/p_i(x) + 1/p^*_i(x) = 1$, $x \in \Omega$.

Зауваження 2. Умова $\mathbf{A_1^*}$ не є принциповою, ми її вводимо лише для спрощення викладення матеріалу.

Приймемо

$$\mathbb{F}_{0,\mathrm{loc}} := L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}).$$

Означення 1. *Нехай* $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}_p$, $f \in \mathbb{F}_{0,loc}$. *Скажемо, що функція* $u \in \mathbb{U}^{b,0}_{p,loc}$ *є узагальненим розв'язком рівняння (1), що задовольняє крайові умови (2), якщо виконується інтегральна рівність*

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u)\, v_{x_i} + a_0(x,t,u,\nabla u)\, v - b\, u\, (\varphi v)_t \Big\}\, dxdt = \iint\limits_Q f\, v\, dxdt \qquad (6)$$

для будь-яких $v \in \mathbb{U}^{1,0}_{p,c}$.

Мета нашої праці – за додаткових умов на вихідні дані, які не виключають з розгляду лінійні рівняння, зазначити "аналоги крайової на нескінченності та початкової умов" такі, що задача, яка полягає у знаходженні узагальненого розв'язку рівняння (1), який задовольняє крайові умови (2) та ці "аналоги $\ldots$", є однозначно розв'язною.

Нехай $k \in \{1, \ldots, n\}$ – число таке, що множина $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_k^2 < \tau^2\}$ обмежена для будь-якого $\tau > 0$. Зокрема, коли $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, де Ω_1 – необмежена область в $\mathbb{R}^k$, Ω_2 – обмежена область в $\mathbb{R}^{n-k}$, то k – саме те, про яке тільки що говорилося.

Вважатимемо, що $0 \in \Omega$ і позначимо для будь-якого $\tau > 0$ через Ω_τ зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_k^2 < \tau^2\}$, що містить 0.

Стосовно вектор-функції $p = (p_0, \ldots, p_n)$ додатково до умови $\mathbf{P}$ припустимо, що
$\mathbf{P}^*$: $p_0(x) = p_1(x) = \ldots = p_k(x) = 2$ для м.в. $x \in \Omega$.

Нехай $\mathbb{K}$ – множина впорядкованих наборів (b, g, q, μ), де b з умови $\mathbf{B}$, $g := \big((g_{1,1}, g_{2,1}), \ldots, (g_{1,k}, g_{2,k})\big)$ – вектор-функція, компонентами якої є пари невід'ємних функцій з простору $C\big(\widetilde{Q}\big)$, $q := (q_1, q_2)$ – вектор-функція, компоненти якої $q_1, q_2 \in C\big(\widetilde{Q}\big)$ такі, що $q_1(x,t) > 0$ при $(x,t) \in \widetilde{Q}$ і для дійсного числа μ отримаємо

$$q_2(x,t) + \mu b(x) > 0 \quad \text{для м.в.} \quad (x,t) \in Q.$$

Приймемо

$$E_{k,\mu}(v) := q_1 \sum_{i=1}^k v^2_{x_i} + (q_2 + \mu b) v^2.$$

Для кожних $\tau \in (0, +\infty)$, $t_0 \in (0, T)$ приймемо

$$\Gamma_{j,\tau} := \Gamma_j \cap \partial\Omega_\tau \ (j = 0, 1), \quad \Gamma_{*,\tau} := \Omega \cap \partial\Omega_\tau, \quad Q_{\tau,t_0} := \Omega_\tau \times (t_0, T],$$
$$\Sigma_{j,\tau,t_0} := \Gamma_{j,\tau} \times (t_0, T] \ (j = 0, 1), \quad \Sigma_{*,\tau,t_0} := \Gamma_{*,\tau} \times (t_0, T]$$

і визначимо

$$d_1(\tau, t_0) := \sup_{\Sigma_{*,\tau,t_0}} \Big(\sum_{i=1}^k g^2_{1,i}/q_1 \Big)^{1/2}, \quad d_2(\tau, t_0) := \sup_{\Sigma_{*,\tau,t_0}} \Big(\sum_{i=1}^k g^2_{2,i} \Big)^{1/2};$$

$$\lambda(\tau,t_0):=\inf_{t,v}\Big\{\Big[\int_{\Gamma_{*,\tau}}E_{k,\mu}(v)\,d\Gamma\Big]\Big[\int_{\Gamma_{*,\tau}}v^2\,d\Gamma\Big]^{-1}\Big\},$$

де інфімум беремо по всіх неперервно-диференційовних в околі $\overline{\Gamma_{*,\tau}}$ функціях v, які дорівнюють нулю на $\partial\Gamma_{*,\tau}\cap\Gamma_0$, і всіх $t\in[t_0,T]$;

$$\Theta(\tau,t_0):=\sup_{v}\Big\{\Big[\int_{\Omega_\tau}E_{k,\mu}(v)|_{t=t_0}\,dx\Big]^{-1}\Big[\int_{\Omega_\tau}b\,v^2\,dx\Big]\Big\},$$

де супремум береться по всіх функціях $v\in C^1(\overline{\Omega_\tau})$, які дорівнюють нулю в околі $\Gamma_{0,\tau}$.

Через $\mathbb{K}^*$ позначимо підмножину множини $\mathbb{K}$, для кожного елемента (b,g,q,μ) якої існують неперервні додатні функції $A_1(\tau,t_0)$, $A_2(\tau,t_0)$, $(\tau,t_0)\in\Pi:=[1,+\infty)\times(0,T/2]$ такі, що для будь-яких $(\tau,t_0)\in\Pi$ виконуються нерівності

$$d_1(\tau,t_0)\lambda^{-1/2}(\tau,t_0)+d_2(\tau,t_0)\lambda^{-1}(\tau,t_0)\leqslant A_1(\tau,t_0), \tag{7}$$

$$\Theta(\tau,t_0)\leqslant 2A_2(\tau,t_0), \tag{8}$$

і задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\tau}{d\alpha}=A_1(\tau,t_0),\quad \frac{dt_0}{d\alpha}=-\varphi(t_0)A_2(\tau,t_0), \tag{9}$$

$$\tau(0)=1,\qquad t_0(0)=T/2 \tag{10}$$

має єдиний розв'язок $\tau(\alpha),t_0(\alpha)$, $\alpha\in[0,+\infty)$, і цей розв'язок задовольняє умову

$$\tau(\alpha)\to+\infty,\ t_0(\alpha)\to+0\quad\text{при}\quad\alpha\to+\infty.$$

Далі *всюди вважаємо*, що (b,g,q,μ) – який-небудь елемент $\mathbb{K}^*$.

Нехай $\mathbb{A}_p^1(b,g,q,\mu)$ – підмножина $\mathbb{A}_p$, будь-який елемент якої задовольняє ще дві умови, які ми зараз сформулюємо:

$\mathbf{A_3}$: для кожного $i\in\{1,\dots,k\}$, будь-яких $(s_1,\xi^1),(s_2,\xi^2)\in\mathbb{R}^{1+n}$ і майже всіх $(x,t)\in Q$

$$|a_i(x,t,s_1,\xi^1)-a_i(x,t,s_2,\xi^2)|\leqslant g_{1,i}(x,t)\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^1-\xi_i^2|+g_{2,i}(x,t)|s_1-s_2|;$$

$\mathbf{A_4}$: для будь-яких $(s_1,\xi^1),(s_2,\xi^2)\in\mathbb{R}^{1+n}$ і майже всіх $(x,t)\in Q$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,t,s_1,\xi^1)-a_i(x,t,s_2,\xi^2))(\xi_i^1-\xi_i^2)+(a_0(x,t,s_1,\xi^1)-a_0(x,t,s_2,\xi^2))(s_1-s_2)\geqslant$$

$$\geqslant q_1(x,t)\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^1-\xi_i^2|^2+q_2(x,t)|s_1-s_2|^2.$$

Нехай $\tau(\alpha),t_0(\alpha)$, $\alpha\in[0,+\infty)$, – розв'язок задачі (9), (10). Введемо ще такі позначення:

$$\Omega^\alpha:=\Omega_{\tau(\alpha)},\quad Q^\alpha:=Q_{\tau(\alpha),t_0(\alpha)}\quad\text{при}\quad\alpha\geqslant 0.$$

Приймемо

$$\langle v\rangle_\alpha:=\Big(\iint\limits_{Q^\alpha}E_{k,\mu}(v)e^{-2\mu\int_T^t[\varphi(\sigma)]^{-1}d\sigma}[\varphi(t)]^{-1}\,dxdt\Big)^{1/2}\equiv$$

$$\equiv \Big(\int\limits_{t_0(\alpha)}^{T} e^{-2\mu \int_T^t [\varphi(\sigma)]^{-1} d\sigma} [\varphi(t)]^{-1} dt \int\limits_{\Omega_{\tau(\alpha)}} E_{k,\mu}(v)\, dx \Big)^{1/2}$$

для всіх $\alpha \geqslant 0$.

Сформулюємо основні результати роботи. Вони стосуються однозначної розв'язності *задачі на знаходження узагальненого розв'язку рівняння (1), яке задовольняє умови (2) та*

$$\langle u \rangle_R = o(1) e^{R/2} \quad \textit{при} \quad R \to +\infty. \tag{11}$$

Далі цю задачу коротко будемо називати *задачею (1),(2),(11)*, а шукану функцію u – *узагальненим розв'язком* цієї задачі (тут через $o(1)$ позначено довільну нескінченно малу при $R \to +\infty$ функцію).

Детальніше, умова (11) означає, що існує (залежна від u) нескінченно мала при $R \to +\infty$ функція $\gamma(R)$, $R \geqslant 0$, така, що для будь-яких $R \geqslant 0$

$$\int\limits_{t_0(R)}^{T} e^{-2\mu \int_T^t [\varphi(\sigma)]^{-1} d\sigma} [\varphi(t)]^{-1} dt \int\limits_{\Omega_{\tau(R)}} \Big[q_1(x,t) \sum_{i=1}^{k} |u_{x_i}|^2 +$$

$$+ (q_2(x,t) + \mu b(x))|u|^2 \Big] dx = \gamma(R) e^{R/2}.$$

Теорема 1 (єдиність розв'язку)**.** *Нехай $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^1(b,g,q,\mu)$ для деякого набору $(b,g,q,\mu) \in \mathbb{K}^*$. Тоді задача (1),(2),(11) має не більше одного узагальненого розв'язку.*

Перейдемо до формулювання теореми існування розв'язку задачі (1), (2), (11).

Нехай $\mathbb{A}^2_p(b,g,q,\mu)$ – підмножина множини $\mathbb{A}^1_p(b,g,q,\mu)$, кожний елемент якої $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ додатково задовольняє умову

$\mathbf{A_5}$: для будь-яких $(s,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ і майже всіх $(x,t) \in Q$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,s,\xi)\xi_i + a_0(x,t,s,\xi)s \geqslant q_1(x,t) \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2 + q_2(x,t)|s|^2 + q_3^a(x,t) \sum_{i=k+1}^{n} |\xi_i|^{p_i(x)},$$

де $q_3^a \in L_\infty(Q)$, $\operatorname*{ess\,inf}_{x \in Q^m} q_3^a(x,t) > 0$ для кожного $m \in \mathbb{N}$.

Для кожного натурального m приймемо

$$\Lambda_m = \inf_{t,v} \Big\{ \Big[\int_{\Omega^m} E_{k,\mu}(v)\, dx \Big] \Big[\int_{\Omega^m} v^2\, dx \Big]^{-1} \Big\}, \tag{12}$$

де інфімум береться по всіх функціях v з $C^1(\overline{\Omega^m})$, які дорівнюють нулю на $\Gamma_{0,\tau(m)}$, і всіх $t \in [t_0(m), T]$.

Позначимо через $\mathbb{F}^*_{0,\mathrm{loc}}$ підмножину множини $\mathbb{F}_{0,\mathrm{loc}}$, яка складається з тих функцій f, для яких існують сталі $C_1 > 0$, $\varepsilon \in (0,1)$ такі, що

$$\iint\limits_{Q^m} |f(x,t)|^2 e^{-2\mu \int_T^t [\varphi(\sigma)]^{-1} d\sigma} [\varphi(t)]^{-1}\, dxdt \leqslant C_1\, \Lambda_m\, e^{(1-\varepsilon)m}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Теорема 2 (існування розв'язку). *Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_p^2(b, g, q, \mu)$ для деякого набору $(b, g, q, \mu) \in \mathbb{K}^*$ і припустимо, що $f \in \mathbb{F}^*_{0,loc}$, тобто виконується нерівність (13) з деякими сталими $\varepsilon \in (0,1)$, $C_1 > 0$. Тоді існує (єдиний) узагальнений розв'язок задачі (1),(2),(11) і він задовольняє оцінку*

$$\iint\limits_{Q^m} E_{k,m}(u) e^{-2\mu \int_T^t [\varphi(\sigma)]^{-1} d\sigma} [\varphi(t)]^{-1}\, dxdt \leqslant C_2\, e^{(1-\varepsilon)m}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

де $C_2 > 0$ – стала, яка залежить тільки від ε та C_1.

Зауваження 3. Очевидно, що рівняння

$$\varphi(t)(bu)_t - \sum_{i=1}^{k} (\widehat{a}_{ij}(x,t) u_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=k+1}^{n} (\widehat{a}_i(x,t) |u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i})_{x_i} +$$
$$+ \widehat{a}_0(x,t) u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

є частковим прикладом рівняння (1). Для нього правильні твердження теорем 1 і 2, якщо $\widehat{a}_{ij} \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\widehat{a}_{ij} = \widehat{a}_{ji}$, $|\widehat{a}_{ij}| \leqslant g_{1,i}\,(i, j = \overline{1,k})$ і для майже всіх $(x,t) \in Q$

$$\sum_{i,j=1}^{k} \widehat{a}_{ij}(x,t) \eta_i \eta_j \geqslant q_1(x,t) \sum_{i=1}^{k} |\eta_i|^2 \quad \forall \eta_i \in \mathbb{R}\,(i = \overline{1,k}),$$

$\widehat{a}_0 \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\widehat{a}_0 \geqslant q_2$, $\widehat{a}_i \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})\,(i = \overline{k+1,n})$, $\operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in Q^m} \widehat{a}_i(x,t) > 0$ для кожного $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ та $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{F}^*_{0\mathrm{loc}}$.

3. Обґрунтування основних результатів. Нехай $\widehat{S} := (-\infty, 0]$. Приймемо $\widehat{Q} := \Omega \times \widehat{S}$, $\quad \widehat{\Sigma}_0 = \Gamma_0 \times \widehat{S}$, $\quad \widehat{\Sigma}_1 = \Gamma_1 \times \widehat{S}$.

Визначимо лінійний локально опуклий простір

$$C(\widehat{S}; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) := \{\widehat{v} : \widehat{S} \to L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \mid \widehat{v} \in C([-l,0]; L_2(\Omega'))\ \forall\, l \in \mathbb{N},\ \forall\, \Omega' \in Bd(\Omega)\}$$

із системою півнорм $\{\|\cdot\|_{C([-l,0];L_2(\Omega'))} \mid l \in \mathbb{N},\ \Omega' \in Bd(\Omega)\}$.

Введемо лінійний локально опуклий простір $\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}$ як поповнення лінійного простору $C^{1,0}(\overline{\widehat{Q}}, \widehat{\Sigma}_0) := \{\widehat{v} \in C(\overline{\widehat{Q}}) \mid \widehat{v}_{x_i} \in C(\overline{\widehat{Q}})\ (i = \overline{1,n}),\ \widehat{v}|_{\widehat{\Sigma}_0} = 0\}$ за топологією, породженою системою півнорм

$$\Big\{ \|\widehat{v}\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega' \times (-l,0))} + \sum_{i=1}^{n} \|\widehat{v}_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega' \times (-l,0))} + \sup_{t \in [-l,0]} \|b^{1/2}(\cdot) \widehat{v}(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega')} \ \Big|$$
$$l \in \mathbb{N},\ \Omega' \in Bd(\Omega) \Big\}.$$

Очевидно, що для будь-якого $\widehat{u} \in \mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}$ отримаємо $\widehat{u} \in (\widehat{S} \to W^1_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}, \Gamma_0)) \cap L_{p_0(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{\widehat{Q}})$, $\widehat{u}_{x_i} \in L_{p_i(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{\widehat{Q}})\,(\,i = \overline{1,n}\,)$, $b^{1/2}\widehat{u} \in C(\widehat{S}; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$.

Визначимо ще два простори

$$\mathbb{U}^*_{p,\mathrm{c}} := \big\{ \widehat{v} \in \mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}} \mid \operatorname{supp} \widehat{v} - \text{ обмежена множина},\ \widehat{v}_t \in L_2(\widehat{Q}),\ \widehat{v}(\cdot,0) = 0 \big\}.$$

$$\mathbb{F}_{\mathrm{loc}} := L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\widehat{Q}}).$$

Нехай

$$\theta(t) := \int\limits_T^t \frac{ds}{\varphi(s)}, \quad t \in S, \tag{15}$$

і позначимо через θ^{-1} функцію, яка є оберненою до функції θ, заданої в (15).

Тепер введемо лінійний оператор Z, який взаємно однозначно переводить лінійний простір функцій $F := \{h : \widetilde{Q} \to \mathbb{R}\}$ на лінійний простір функцій $\widehat{F} := \{\widehat{h} : \overline{\widehat{Q}} \to \mathbb{R}$ за правилом

$$Zh = \widehat{h}, \quad \text{де} \quad \widehat{h}(s) := h(t)|_{t=\theta^{-1}(s)}, \quad s \in \widehat{S}, \quad t \in S,$$

тобто оператор Z функції з простору F ставить у відповідність функцію з $\widehat{F}$, отриману з цієї внаслідок заміни змінної

$$s = \theta(t), \quad t \in S, \quad s \in \widehat{S}. \tag{16}$$

Легко переконатися, що звуження оператора Z на простори $\mathbb{U}^{b,0}_{p,\mathrm{loc}}$, $\mathbb{U}^{1,0}_{p,\mathrm{c}}$, $\mathbb{F}_{0,\mathrm{loc}}$, $\mathbb{F}^*_{0,\mathrm{loc}}$ взаємно однозначно переводить ці простори на простори, відповідно, $\mathbb{U}^{b}_{p,\mathrm{loc}}$, $\mathbb{U}^{*}_{p,\mathrm{c}}$, $\mathbb{F}_{\mathrm{loc}}$, $\mathbb{F}^*_{\mathrm{loc}}$.

Зробимо в інтегральній тотожності (6) заміну змінної t за правилом (16). У підсумку, прийнявши $\widetilde{u} := Zu \in \mathbb{U}^{b}_{p,\mathrm{loc}}$, $\widetilde{f} := Zf \in \mathbb{F}_{\mathrm{loc}}$ та позначивши через $\widehat{a}_i(x,s,\xi,\eta), (x,s,\xi,\eta) \in \widehat{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ $(i = \overline{0,n})$, – функції, отримані після зазначеної заміни змінної t у функціях, відповідно, $a_i(x,t,\xi,\eta), (x,t,\xi,\eta) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ $(i = \overline{0,n})$, одержимо

$$\iint\limits_{\widehat{Q}} \Big\{ \sum_{i=1}^n \widehat{a}_i(x,s,\widehat{u},\nabla\widehat{u})\, \widehat{v}_{x_i} + \widehat{a}_0(x,t,\widehat{u},\nabla\widehat{u})\, \widehat{v} - b\, \widehat{u}\, \widehat{v}_s \Big\}\, dxds = \iint\limits_{Q} \widehat{f}\, v\, dxds \tag{17}$$

для будь-яких $\widehat{v} \in \mathbb{U}^*_{p,\mathrm{c}}$. Звідси легко випливає, що функція $\widetilde{u}$ є узагальненим розв'язком рівняння

$$\frac{\partial}{\partial s}(b(x)\widehat{u}) - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \widehat{a}_i(x,s,\widehat{u},\nabla\widehat{u}) + \widehat{a}_0(x,s,\widehat{u},\nabla\widehat{u}) = \widehat{f}(x,s), \quad (x,t) \in Q, \tag{18}$$

що задовольняє крайові умови

$$\widehat{u}\Big|_{\widehat{\Sigma}_0} = 0, \qquad \frac{\partial\widehat{u}}{\partial\nu_{\widehat{a}}}\Big|_{\widehat{\Sigma}_1} = 0, \tag{19}$$

де $\partial\widehat{u}(y,s)/\partial\nu_{\widehat{a}} := \sum\limits_{i=1}^n \widehat{a}_i(y,s,u,\nabla u)\, \nu_i(y)$, $(y,s) \in \widehat{\Sigma}_1$.

Неважко переконатися, що внаслідок заміни (16) змінної t умова (11) перейде в умову

$$\int\limits_{t_0(R)}^{T} \int\limits_{\Omega_{\tau(R)}} \Big[\widehat{q}_1(x,s) \sum_{i=1}^k |\widehat{u}_{x_i}|^2 + (\widehat{q}_2(x,s) + \mu b(x))|\widehat{u}|^2\Big] e^{-2\mu s}\, dxds = o(1)e^{R/2} \tag{20}$$

при $R \to +\infty$, де $\widetilde{q}_j := Zq_j$ $(j = 1,2)$.

Очевидно, що правильним є таке твердження: якщо u є розв'язком задачі (1), (2), (11), то $\widehat{u}$ є розв'язком задачі (18)-(20), і навпаки. Задачу (18)-(20) розглядали (з точністю до позначень) в [16] і припущення щодо вихідних даних задачі, які зроблені у згаданій праці, відповідають тим, що є в цій праці. Тому правильність теорем 1 і 2 випливає з теорем, відповідно, 1 і 2 [16].

4. Ілюстрація основних результатів. Отримані результати проілюструємо на одному простому прикладі задачі (1),(2),(11).

Нехай $n = 1$, $\Omega := (0, +\infty)$, $\Gamma_0 := \{0\}$, $\Gamma_1 := \emptyset$, $T := 2$. Тоді $Q = (0, \infty) \times (0, 2]$, $\Sigma_0 = \{(0, t) \,\big|\, t \in (0, 2]\}$, $\Sigma_1 = \emptyset$. Приймемо $b(x) := 1$, якщо $x \in (0, 1)$, і $b(x) := 0$, якщо $x \in [1, +\infty)$, а також $\varphi(t) := t$, $t \in [0, T]$. Припустимо, що для будь-яких $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R}^2$ отримаємо $a_0(x, t, s, \xi) = s$, $a_1(x, t, s, \xi) = \xi$. Тоді рівняння (1) набуде вигляду

$$t(b(x)u)_t - u_{xx} + u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{21}$$

а умови (2) –

$$u\big|_{x=0} = 0. \tag{22}$$

Очевидно, що в такому випадку умови A_1,A_1^*,A_2 виконуються з $p_0(x) = p_1(x) = 2$, $x \in (0, +\infty)$. Це, зокрема, означає, що виконуються умови P^*.

Тепер конкретизуємо умову (11). Легко переконатися, що умови A_3, A_4, а також A_5, виконуються з $g_{1,1} = 1$, $g_{2,1} = 0$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$. Приймемо $\mu = 0$. Очевидно, що цей набір (b, g, q, μ) належить $\mathbb{K}$ і $E_{1,0}(v) = {v'}^2 + v^2$.

Далі зауважимо, що в цьому випадку $k = 1$, $\Omega_\tau = (0, \tau)$, $\Gamma_{0,\tau} = \{0\}$, $\Gamma_{1,\tau} = \emptyset$, $\Gamma_{*,\tau} = \{\tau\}$ для всіх $\tau > 0$. Отож, для будь-яких $\tau \in (0, +\infty)$, $t_0 \in (0, 2)$ одержимо $Q_{\tau,t_0} = (0, \tau) \times (0, 2]$, $\Sigma_{0,\tau,t_0} = \{(0, t) \,\big|\, t \in (0, 2]\}$, $\Sigma_{1,\tau,t_0} = \emptyset$, $\Sigma_{*,\tau,t_0} = \{(\tau, t) \,\big|\, t \in (0, 2]\}$.

Неважко переконатися, що $d_1(\tau, t_0) = 1$, $d_2(\tau, t_0) = 0$, $\lambda(\tau, t_0) = 1$, $\Theta(\tau, t_0) \leqslant 1$ для довільних $(\tau, t_0) \in [1, +\infty) \times (0, 1]$. Отже, в цьому випадку можна вважати, що $A_1(\tau, t_0) = 1$, $A_2(\tau, t_0) = 1/2$, $(\tau, t_0) \in [1, +\infty) \times (0, 1]$. Зрозуміло, що задача Коші

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = 1, \quad \frac{dt_0}{d\alpha} = -\frac{t_0}{2}, \qquad \tau(0) = 1, \quad t_0(0) = 1,$$

має єдиний розв'язок $\tau(\alpha) = \alpha + 1$, $\quad t_0(\alpha) = e^{-\alpha/2}$, $\quad \alpha \in [0, +\infty)$. Звідси, зокрема, випливає, що набір (b, g, q, μ) належить множині $\mathbb{K}^*$. Зрозуміло, що $\Omega^\alpha = (0, \alpha + 1)$, $Q^\alpha = (0, \alpha + 1) \times (e^{-\alpha/2}, 2]$. Отож, умову (11) в цьому випадку можна подати у вигляді

$$\int\limits_{e^{-R/2}}^{2} t^{-1} dt \int\limits_{0}^{R+1} [u_x^2 + u^2]\, dx = o(1) e^R \quad \text{при} \quad R \to +\infty. \tag{23}$$

Тепер розглянемо умови існування узагальненого розв'язку задачі (21)-(23). Неважко переконатися, що в цьому випадку отримаємо нерівність $\Lambda_m \geqslant 1$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Отож, на підставі теореми 2 для існування узагальненого розв'язку задачі (21)-(23) достатньо, щоб функція f задовольняла умову: існують сталі $C_1 > 0$ і $\varepsilon \in (0, 1)$ такі, що

$$\int\limits_{e^{-m/2}}^{2} t^{-1} dt \int\limits_{0}^{m+1} f^2\, dx \leqslant C_1\, e^{(1-\varepsilon)m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

У цьому випадку узагальнений розв'язок задачі (21)-(23) задовольняє, згідно з теоремою 2, оцінку

$$\int\limits_{e^{-m/2}}^{2} t^{-1}dt \int\limits_{0}^{m+1} [u_x^2 + u^2]\, dx \leqslant C_2\, e^{(1-\varepsilon)m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

де $C_2 > 0$ – стала, яка залежить тільки від C_1 і ε.

Список використаної літератури

1. *Showalter R.E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations / *R.E. Showalter* // Amer. Math. Soc. Journal. – 1997. – Vol. 49.
2. *Олейник О.А.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой / *О.А. Олейник, Е.В. Радкевич* – Итоги науки. Матем. анализ. – 1969.
3. *Калашников А.С.* Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка / *А.С. Калашников* // Вестник МГУ. Сер. матем. – 1971. – I, №2. – С. 42-48. – II, №3. – С. 3-8.
4. *Пукач П.Я.* Задачі для нелінійних параболічних рівнянь з виродженням / *П.Я. Пукач* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1991. – Вип. 36. – С. 6-10.
5. *Бокало М.М.* Задача без початкових умов для слабко нелінійних параболічних рівнянь, які сильно вироджуються в початковий момент часу / *М.М. Бокало, В.М. Сікорсъкий* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1997. – Вип. 48. – С. 35-43.
6. *Buhrii O.M.* Parabolic variational inequalities with degeneration / *O.M. Buhrii* // Мат. студії. – 1999. – Vol. 11, №2. – P. 189-198.
7. *Бугрій О.М.* Системи параболічних варіаційних нерівностей з виродженням / *О.М. Бугрій* // Нелинейные граничные задачи. – 2003. – Вип. 13. – С. 43-55.
8. *Шишков А.Є.* Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности / *А.Є. Шишков* // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, №2. – С. 277-289.
9. *Brézis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity / *H. Brézis* // Appl. Math. Optim. – 1984. – Vol. 12, №3. – P. 271-282.
10. *Boccardo L.* Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ without growth restrictions on the data / *L. Boccardo, T. Gallouët, J.L. Vázquez* // J. Differential Equations. – 1993. – Vol. 105, №2. – P. 334-363.
11. *Bokalo M.M.* On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces / *M.M Bokalo, O.V. Domanska* // Мат. студії. – 2007. – Vol. 28, №1. – P. 77-91.
12. *Ивасишен С.Д.* О параболических граничных задачах без начальных условий / *С.Д. Ивасишен* // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, №5. – С. 547-552.
13. *Бокало Н.М.* Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений / *Н.М. Бокало* // Дифф. уравнения. – 1994. – Т. 30, №8. – С. 1325-1334.
14. *Бокало М.М.* Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності / *М.М. Бокало, І.Б. Паучок* // Мат. студії. – 2006. – Т. 24, №1. – С. 25-48.
15. *Bokalo M.* Linear evolution first-order problems without initial conditions / *M. Bokalo, A. Lorenzi* // Milan J. of Mathematics. – 2009. – Vol. 77. – P. 437-494.

16. *Бокало М.М.* Однозначна розв'язність задачі без початкових умов для лінійних та нелінійних еліптично-параболічних рівнянь / *М.М. Бокало* // Укр. мат. вісн. – 2011. – Т. 8, №1. – С. 54-85.
17. *Самохін В.Н.* Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации / *В.Н. Самохін* // Дифф. уравнения. – 1996. – Т. 32, №5. – С. 643-651.
18. *Buhrii O.M.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *O.M. Buhrii, R.A. Mashiyev* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. – 2009. – Vol. 70, №6. – P. 2335-2331.
19. *Růžička M.* Electroreological fluids: modeling and mathematical theory / *M. Růžička* – Berlin: Springer-Verl, 2004.
20. *Fan X.* On the space $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$ / *X. Fan, D. Zhao* // J. Math. Anal. and Appl. – 2001. – Vol. 263. – P. 424-446.
21. *Kováčik O.* On spaces $L^{p(x)}(Q)$ and $W^{1,p(x)}$ / *O. Kováčik, J. Rákosníc* // Czechosl. Math. J. – 1991. – Vol. 41, №4. – P. 592-618.

Стаття: надійшла до редакції 27.09.2012
прийнята до друку 12.12.2012

PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR LINEAR AND NONLINEAR ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS DEGENERATED AT THE INITIAL TIME MOMENT

Mykola BOKALO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com

We consider the problem without initial conditions for linear and nonlinear anisotropic elliptic-parabolic second order equations. This equations defined in unbounded domains with respect to spatial variables and degenerated in initial time moment. It has been established the existence and uniqueness of the weak solutions of the given problem. We put the restrictions on the behaviour of the solutions of the considered problem and increasing of it's data-in at neighbourhoods of initial time moment and at spatial infinity. The equations have the nonlinearity indices depending on points of the domain and direction of differentiation. We consider the weak solutions out of general Lebesgue-Sobolev spaces.

Key words: linear equation, nonlinear equation, elliptic-parabolic equation, degenerate parabolic equation, problem without initial conditions, general Lebesgue-Sobolev space, unbounded domain.

ЗАДАЧА БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, КОТОРЫЕ ВЫРОЖДАЮТСЯ В НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Николай БОКАЛО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com

Доказано существование и единственность обобщённых решений задачи без начальных условий для линейных и нелинейных анизотропных эллиптически-параболических уравнений второго порядка, которые заданы в неограниченных по пространственным переменным областях и вырождаются в начальный момент времени. При этом накладываются условия на поведение решений задач и возрастание их исходных данных в окрестности начального момента времени и на бесконечности по пространственным переменным. Уравнение имеет показатели нелинейности, которые зависят от точек области определения уравнений и направлений дифференциирования, а их обобщённые решения берутся из обобщённых пространств Лебега-Соболева.

Ключевые слова: линейное уравнение, нелинейное уравнение, еллиптически-параболическое уравнение, вырождающееся параболическое уравнение, задача без начальных условий, обобщённое пространство Лебега-Соболева, неограниченная область.