ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 24–28
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 24–28

УДК 517.95

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Тарас БОКАЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: tbokalo@gmail.com

Вивчено мішану задачу для одного класу деяких нелінійних параболічних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{P}u\Big) + Au = f,$$

де $\mathcal{P}$ – нелінійна функція; A – лінійний оператор; f – деяка функція. Степені нелінійності є функціями просторових змінних. За певних умов на коефіцієнти та степені нелінійності доведено єдиність розв'язку в узагальнених просторах Лебега і Соболєва.

Ключові слова: єдиність розв'язку, узагальнені простори Лебега і Соболєва, нелінійні диференціальні рівняння.

Нехай $T > 0$ – фіксоване число, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_{0,T} = \Omega \times (0,T)$, $\Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $\tau \in (0,T]$. Розглянемо мішану задачу для нелінійного параболічного рівняння вигляду

$$(|u|^{r(x)-2}u + \alpha u)_t - \sum_{i=1}^{n}(a_i(x)u_{x_i})_{x_i} + c(x)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Відомо, що процеси дифузії в пористому середовищі описуються рівнянням

$$u_t - \triangle u = f,$$

яке можна узагальнити (див. [1]) до

$$(|u|^{r-2}u + \alpha u)_t - \triangle u = f,$$

що потрапляє у клас рівнянь, які ми вивчаємо.

Ми знайшли умови єдиності розв'язку розглядуваної задачі в узагальнених просторах Лебега і Соболєва. Дослідженню різних задач для подвійно нелінійних параболічних рівнянь зі сталим показником нелінійності r присвячено праці [2]-[7]

(див. також [8] та бібліографію в цій статті). Існуванню розв'язку задач з нелінійною головною частиною, які у модельному випадку мають вигляд (1)-(3) загалом, $r(x) \not\equiv const$ присвячено працю [9] для $\alpha > 0$ та працю [10] для $\alpha = 0$. Мішані задачі для інших типів нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності вивчено в [11].

Позначатимемо $L^\infty_+(\Omega) = \{r \in L^\infty(\Omega) :\ \operatorname{ess}\inf\limits_{x\in\Omega} r(x) > 1\}$. Для кожної функції $r \in L^\infty_+(\Omega)$ через r_0 та r^0 позначатимемо числа $r_0 \equiv \operatorname{ess}\inf\limits_{x\in\Omega} r(x)$ та $r^0 \equiv \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\Omega} r(x)$, а через r' – таку функцію, що $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$ для $x \in \Omega$.

Узагальнені простори Лебега були введені в [12]. Нагадаємо їхні означення та деякі властивості. Нехай $r \in L^\infty_+(\Omega)$. Визначимо функціонал $\rho_r(\cdot,\Omega)$ рівністю $\rho_r(v,\Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{r(x)}dx$, де v – деяка функція. Узагальненим простором Лебега $L^{r(x)}(\Omega)$ називатимемо множину таких вимірних функцій $v : \Omega \to \mathbb{R}^1$, для яких $\rho_r(v,\Omega) < +\infty$. Відомо, що функціонал ρ_r слабко напівнеперервний знизу на $L^{r(x)}(\Omega)$ (див. [12, с. 208]). Крім того, $L^{r(x)}(\Omega)$ є рефлексивним банаховим простором з нормою

$$||v; L^{r(x)}(\Omega)|| = \inf\{\lambda > 0 \,:\, \rho_r(v/\lambda, \Omega) \le 1\}.$$

Зауважимо таке: якщо $r(x) \ge q(x)$, то $L^{r(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$. Спряженим до $L^{r(x)}(\Omega)$ є простір $L^{r'(x)}(\Omega)$.

Позначимо

$$V = H^1_0(\Omega), \quad U(Q_{0,T}) = L^2(0,T; H^1_0(\Omega)).$$

Нехай виконуються умови

(A): $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, $i,j = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant a_0|\xi|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$, де $a_0 > 0$;
(C): $c \in L^\infty(\Omega)$.

Позначимо для спрощення

$$\mathcal{P}u = |u|^{r(x)-2}u + \alpha u.$$

Означення 1. *Функцію $u \in U(Q_{0,T}) \cap L^{r(x)}(Q_{0,T})$ називатимемо узагальненим розв'язком (1)-(3), якщо вона задовольняє тотожність*

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\mathcal{P}uv_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i}v_{x_i} + c(x)uv\Big]\,dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} f(x,t)v\;dxdt \tag{4}$$

для всіх $v \in \{w \in U(Q_{0,T}) : w_t \in L^{r(x)}(Q_{0,T}),\ w(\cdot,T) = 0\}$.

Основні результати цієї праці подамо у вигляді теорем.

Теорема 1. *Нехай $r \in L^\infty_+(\Omega)$, $\alpha \geqslant 0$ та виконуються умови **(A)**, **(C)**, $c(x) \geqslant 0$ для майже всіх $x \in \Omega$. Тоді задача (1)-(3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки u^1, u^2 задачі (1)-(3). Тоді з (4) отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\mathcal{P}u^1 v_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u^1_{x_i} v_{x_i} + c(x) u^1 v\Big] dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} f(x,t) v dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-\mathcal{P}u^2 v_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u^2_{x_i} v_{x_i} + c(x) u^2 v\Big] dxdt = \int\limits_{Q_{0,T}} f(x,t) v dxdt.$$

Віднімаючи ці дві тотожності, отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-(\mathcal{P}u^1 - \mathcal{P}u^2) v_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)(u^1_{x_i} - u^2_{x_i}) v_{x_i} + c(x)(u^1 - u^2) v\Big] dxdt = 0. \qquad (5)$$

Приймемо в цій тотожності

$$v(x,t) = \int\limits_t^T (u^1(x,s) - u^2(x,s)) ds, \quad (x,t) \in Q_{0,T}.$$

З умов теореми одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x)(u^1_{x_i} - u^2_{x_i}) v_{x_i} + c(x)(u^1 - u^2) v\Big] dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x)(u^1_{x_i} - u^2_{x_i}) \int\limits_t^T (u^1_{x_i} - u^2_{x_i}) ds + c(x)(u^1 - u^2) \int\limits_t^T (u^1 - u^2) ds\Big] dxdt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{Q_{0,T}} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{d}{dt} \Big(\int\limits_t^T (u^1_{x_i} - u^2_{x_i}) ds\Big)^2 dxdt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{0,T}} c(x) \frac{d}{dt} \Big(\int\limits_t^T (u^1 - u^2) ds\Big)^2 dxdt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \Big(\int\limits_0^T (u^1_{x_i} - u^2_{x_i}) ds\Big)^2 dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} c(x) \Big(\int\limits_0^T (u^1 - u^2) ds\Big)^2 dx \geqslant 0.$$

Врахувавши цю оцінку та рівність $v_t = -(u^1 - u^2)$, з (5) отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} (\mathcal{P}u^1 - \mathcal{P}u^2)(u^1 - u^2) dxdt \leqslant 0. \qquad (6)$$

Оскільки функція $u \to \mathcal{P}u$ строго монотонна, то підінтегральний вираз в (6) невід'ємний. Отже, з (6) отримаємо, що він дорівнює нулю. Тому $u^1 = u^2$ майже скрізь в $Q_{0,T}$. □

Зауважимо, що аналогічний результат у випадку $r(x) \equiv const$ отримано в [4].

Список використаної літератури

1. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский* – М., 1953.
2. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Ж.Л. Лионс* – М.: Мир, 1972.
3. *Bernis F.* Qualitative properties for some non-linear higher order degenerate parabolic equations / *F. Bernis* // Houston J. Math. – 1998. – Vol. 14, №3. – C. 319-351.
4. *Олейник О.А.* Об уравнениях типа уравнений нестационарной фильтрации / *О.А. Олейник* // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 113, №6. – С. 1210-1213.
5. *Шишков А.Е.* Распространения возмущений в сингулярной задаче Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений / *А.Е. Шишков* // Мат. сборн. – 1996. – Т. 187, №9. – С. 139-160.
6. *Дегтярев С.П.* $L_1 - L_\infty$ оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными / *С.П. Дегтярев, А.Ф. Тедеев* // Мат. сборн. – 2007. – Т. 198, №9. – С. 639-660.
7. *Лаптев Г.И.* Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью / *Г.И. Лаптев* // Мат. сборн. – 1997. – Т. 188, №9. – С. 84-112.
8. *Бугрій О.М.* Про задачі з однорідними граничними умовами для нелінійних рівнянь з виродженням / *О.М. Бугрій* // Укр. мат. вісн. – 2008. – Т. 5, №4. – С. 435-469.
9. *Бокало Т.М.* Невироджені подвійно нелінійні параболічні рівняння / *Т.М. Бокало, О.М. Бугрій* // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 63, №5. – С. 612-628.
10. *Бокало Т.М.* Подвійно нелінійні параболічні рівняння зі змінними показниками нелінійності в молодших членах / *Т.М. Бокало, О.М. Бугрій* // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2010. – Т. 15, Вип. 18. – С. 22-37.
11. *Бугрій О.М.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації / *О.М. Бугрій, С.П. Лавренюк* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 33-43.
12. *Orlicz W.* Uber konjugierte Exponentenfolgen / *W. Orlicz* // Studia Mathematica (Lwow). – 1931. – Vol. 3. – P. 200-211.

Стаття: надійшла до редакції 06.11.2012
прийнята до друку 12.12.2012

ON UNIQUENESS OF SOLUTION OF SOME NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF A SPECIAL FORM

Taras BOKALO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: tbokalo@gmail.com

We study a mixed problem of one class nonlinear parabolic equations of the form

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{P}u\Big) + Au = f,$$

where $\mathcal{P}$ is a nonlinear function; A – linear operator; f – arbitrary function. The exponent of nonlinearity is a function of spatial variable. Under some conditions to the coefficients it is proven the uniqueness of solution in general Lebesgue-Sobolev spaces.

Key words: uniqueness of solution, general Lebesgue-Sobolev space, nonlinear partial differential equation.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Тарас БОКАЛО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: tbokalo@gmail.com

Изучено смешанную задачу для одного класса нелинейных параболических уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathcal{P}u\Big) + Au = f,$$

где $\mathcal{P}$ некоторая нелинейная функция; A – линейный оператор; f – некоторая функция. Степени нелинейности уравнения функции пространственных переменных. При определенных условиях на коэффициенты и степени нелинейности доказано единственность решения в обобщенных пространствах Лебега и Соболева.

Ключевые слова: единственность решения, обобщенные пространства Лебега и Соболева, нелинейные дифференциальные уравнения.