ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 78–82
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 78–82

УДК 519.21

ОБЧИСЛЕННЯ РІВНОВАЖНОЇ ЦІНИ ЄВРОПЕЙСЬКОГО ОПЦІОНУ ЗА УМОВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Ігор КОЦЮБА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: kotsiuba@hotmail.com

Розглянуто модель Блека-Шоулса та Мертона з параметрами, які залежать від часу та стану зовнішнього середовища, знайдено умови, за яких ціна європейського опціону до і після усереднення у цій моделі збігається.

Ключові слова: опціон, акції, рівноважна ціна, волатильність, модель Блека-Шоулса.

1. Вступ. Серед похідних цінних паперів як інструментів фінансової інженерії важливе місце займають опціони [4]. Існує декілька видів опціонів, тому для викладення подальшого матеріалу вважатимемо, що розглядаємо опціон європейського типу, побудованого на акціях, вартість яких описується послідовністю випадкових величин $S = (S(t))_{0 \leqslant t \leqslant T}$. Такий опціон характеризується фіксованою в момент його купівлі ціною K (за якою покупець може, наприклад, купити акції, фактична вартість яких $S(T)$ в момент часу T може суттєво відрізнятися від K) і наперед визначеним часом його виконання T.

Якщо $S(T) > K$, то така ситуація сприятлива для покупця опціону, оскільки за умовами контракту у нього є право купити акції за ціною K і потім миттєво продати їх за ринковою ціною $S(T)$. У цьому випадку його дохід становитиме $S(T) - K$.

Якщо ж виявиться, що $S(T) < K$, то право покупця купити акції (за ціною K) не дає йому нічого, тому що він може придбати акції дешевше (за ціною $S(T)$).

Очевидно, що за покупку такого фінансового інструмента треба заплатити деяку премію $C(S,T)$, яку називають рівноважною ціною колл-опціону. Отож, продавець і покупець постійно стикаються з проблемою визначення рівноважної ціни колл-опціону. Над її знаходженням працювала і працює величезна кількість видатних науковців, починаючи від Р. Мертона [3] та Ф. Блека і М. Шоулса [2]. Вони вперше строго формалізували проблему оцінювання опціонів і вивели класичні формули для обчислення рівноважних цін.

2. Рівноважна ціна європейського опціону купівлі. Розглянемо модель Блека-Шоулса з параметрами залежними від часу на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$, одним ризиковим і безризиковим активами. Вважатимемо, що на рівноважну ціну впливають зовнішні чинники, які задаються повною групою попарно несумісних подій $A_1, \ldots, A_n$ і надалі будемо їх ототожнювати зі станами середовища. В момент часу $t = 0$ може настати один із n станів зовнішнього середовища з ймовірністю

$$\mathsf{P}(A_i) = p_i, \quad p_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \tag{1}$$

де p_i-ймовірність потрапляння у відповідне середовище A_i. Виникає проблема розрахунку рівноважної ціни європейського опціону у цьому випадку. Для кожного стану зовнішнього середовища A_i відома ціна безризикового та ризикового активу. Ціну безризикового активу обчислюють як

$$B_{A_i}(t) = exp\left\{ \int_0^t r_{A_i}(s)\, ds \right\}, \tag{2}$$

а ціна ризикового активу дорівнює

$$S_{A_i}(t) = S_{A_i}(0) exp\left\{ \int_0^t \left(\mu_{A_i}(s) - \frac{1}{2}{\sigma_{A_i}}^2(s) \right) ds + \int_0^t \sigma_{A_i}(s) dW_{A_i}(s) \right\}, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

де $r_{A_i}(t)$ – відсоткова ставка; $\mu_{A_i}(t)$ – очікуване середнє значення; $\sigma_{A_i}(t)$ – передбачувана волатильність. У цьому разі $r_{A_i}(t)$ – невід'ємна функція, інтегрована за Лебегом на будь-якому відрізку, $\mu_{A_i}(t)$ і $\sigma_{A_i}(t)$ – невипадкові функції, а $W_{A_i}(t)$ – стандартний вінерівський процес стосовно міри $\mathcal{P}$. Надалі розглядатимемо звуження зазначеної моделі на інтервалі [0,T], де T – дата виконання опціону.

Для того, щоб існувала єдина рівноважна ціна опціону, будемо розглядати безарбітражний ринок, тобто вимагатимемо виконання умов $\int_0^T \left(\frac{\mu_{A_i}(s) - r_{A_i}(s)}{\sigma_{A_i}(s)} \right)^2 ds < \infty$, $\int_0^T {\sigma_{A_i}}^2(s) ds < \infty$, $\int_0^T |\mu_{A_i}(s)| ds < \infty$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Крім того, вважатимемо, що початкова ціна акцій однакова для всіх станів зовнішнього середовища, тобто $S(0) = S_{A_i}(0)$, а страйкова ціна K і час виконання опціону T – сталі величини.

Згідно з [5],[6] і за формулою Феймана-Каца рівноважна ціна європейського опціону купівлі $C_{A_i}(S_{A_i}, t)$ задовольняє таку крайову задачу:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial C_{A_i}(S_{A_i}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2_{A_i}(t) S^2_{A_i} \frac{\partial^2 C_{A_i}(S_{A_i}, t)}{\partial S^2_{A_i}} + \\ &+ r_{A_i}(t) S_{A_i} \frac{\partial C_{A_i}(S_{A_i}, t)}{\partial S_{A_i}} - r_{A_i}(t) C_{A_i}(S_{A_i}, t) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$C_{A_i}(S_{A_i}, T) = \max(S_{A_i} - K, 0), \quad (S_{A_i}, T) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T]. \tag{5}$$

де K– страйкова ціна. Тоді справджується така теорема [1].

Теорема 1. *Нехай функції $r_{A_i}(t)$ і $\sigma_{A_i}(t)$ неперервні на $[0,T]$, $\sigma_{A_i}(t) > 0$ для всіх $t \in [0,T]$. Тоді розв'язок рівняння (4) з крайовою умовою (5) набуває такого вигляду:*

$$C_{A_i}(S_{A_i},t) = S_{A_i}\Phi(d_1^{A_i}) - K\exp\left\{-\int_t^T r_{A_i}(s)ds\right\}\Phi(d_2^{A_i}), \quad i = 1,\dots,n, \tag{6}$$

де

$$d_1^{A_i} = \frac{\ln\frac{S_{A_i}}{K} + \int_t^T (r_{A_i}(s) + \frac{1}{2}\sigma^2_{A_i}(s))ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2_{A_i}(s)ds}}, \qquad d_2^{A_i} = \frac{\ln\frac{S_{A_i}}{K} + \int_t^T (r_{A_i}(s) - \frac{1}{2}\sigma^2_{A_i}(s))ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2_{A_i}(s)ds}},$$

а

$$\Phi(d_j^{A_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_j^{A_i}} \exp\{-\frac{1}{2}s^2\}ds, \quad j = 1,2,$$

– функція стандартного нормального розподілу.

3. Умови рівноважності. Очевидно, що в момент часу t досить просто обчислити ціну акцій $S_{A_i}(t)$ та $C_{A_i}(S_{A_i},t)$ згідно з формулами (3) і (6) для будь-якого стану A_i, оскільки відомі значення $\mu_{A_i}, \sigma_{A_i}, r_{A_i}$.

З іншого боку, можемо спочатку усереднити значення $\mu_{A_i}, \sigma_{A_i}, r_{A_i}$ по всіх станах зовнішнього середовища і після цього знайти рівноважну ціну європейського опціону купівлі $C(S,t)$. Тобто, якщо

$$r(t) = \sum_{i=1}^n r_{A_i}p_i, \quad \mu(t) = \sum_{i=1}^n \mu_{A_i}p_i, \quad \sigma(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_{A_i}p_i,$$

то усереднену ціну акцій $S(t)$ знаходять згідно з формулою (4), а це дає змогу обчислити вартість опціону $C(S,t)$.

Мета нашої праці – знайти умови, за яких рівноважна ціна європейського опціону купівлі задовольнятиме рівність

$$C(S,t) = p_1C_{A_1}(S_{A_1},t) + p_2C_{A_2}(S_{A_2},t) + \dots + p_nC_{A_n}(S_{A_n},t) \tag{7}$$

або, за яких умов ціна опціону до усереднення та після усереднення збігатиметься. Рівність (7) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} &S\Phi(d_1) - K\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\Phi(d_2) = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i\left(S_{A_i}\Phi(d_1^{A_i}) - K\exp\left\{-\int_t^T r_{A_i}(s)ds\right\}\Phi(d_2^{A_i})\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Очевидно, що (8) виконується, якщо:

$$S\Phi(d_1) = \sum_{i=1}^n p_iS_{A_i}\Phi(d_1^{A_i}), \tag{9}$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78

$$\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\Phi(d_2)=\sum_{i=1}^n p_i\exp\left\{-\int_t^T r_{A_i}(s)ds\right\}\Phi(d_2^{A_i}). \tag{10}$$

Враховуючи, що $S=S(0)\exp\{\sum_{i=1}^n p_iX_i\}$, де

$$X_i=\int_0^t(\mu_{A_i}(s)-\frac{1}{2}\sigma^2_{A_i}(s))ds+\int_0^t\sigma_{A_i}(s)dW_{A_i}(s),$$

то умова (9) виглядатиме так:

$$\exp\left\{\sum_{i=1}^n p_iX_i\right\}\int_{-\infty}^{d_1}\exp(-\frac{s^2}{2})ds=\sum_{i=1}^n\left(p_i\exp\{X_i\}\int_{-\infty}^{d_1^{A_i}}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds\right). \tag{11}$$

Шляхом алгебричних перетворень умови (10) можна отримати таку рівність:

$$\begin{aligned}&\exp\left\{-\sum_{i=1}^n\left(p_i\int_t^T r_{A_i}(s)ds\right)\right\}\int_{-\infty}^{d_2}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds=\\&=\sum_{i=1}^n\left(p_i\exp\left\{-\int_t^T r_{A_i}(s)ds\right\}\int_{-\infty}^{d_2^{A_i}}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds\right).\end{aligned} \tag{12}$$

Отже, ціна європейського опціону купівлі до усереднення та після усереднення збігатиметься лише у разі виконання умов (11) та (12). Отже, ми отримали таке твердження.

Теорема 2. *Нехай функції $\mu_{A_i}(t)$, $r_{A_i}(t)$ і $\sigma_{A_i}(t)$ неперервні на $[0,T]$. Тоді рівноважна ціна європейського опціону купівлі задовольняє рівність (7), якщо виконуються умови (11), (12).*

4. Висновки. Знайдено умови рівноважності для розрахунку рівноважної ціни європейського опціону з використанням узагальнених моделей Блека-Шоулса, в яких параметри змінюються з часом. Розглянуто формули для обчислення рівноважної ціни акцій, цін ризикових і безризикових активів в умовах невизначеності.

Список використаної літератури

1. *Соловейко О.М.* Деякі фінансові обчислення, пов'язані з цінами акцій на ринку / *О.М. Соловейко* // Конф. "Функціональні методи в теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі і статистиці *II*", присвячена пам'яті А.Я. Дороговцева: Праці конференції. – Київ, 2004. – С. 115.
2. *Black F.* The Pricing of options and corporate liabilities / *F. Black, M. Scholes* // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81 – P. 637-659.
3. *Merton R.C.* Theory of rational option pricing / *R.C. Merton* // Bell J. Econom. Manage. Sci. – 1973. – Vol.4. – P. 141-183.
4. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики: Т. II / *А.Н. Ширяев.* – М.: ФАЗИС, 1998. – 544 с.

5. *Dana R.-A.* Financial markets in continuous time / *R.-A. Dana, M. Jeanblanc.* – Springer-Verlag. – 2003. – 330 p.
6. *Fouque J.-P.* Derivatives in financial markets with stochastic volatility / *J.-P. Fouque, G. Papanicolaou, K.R. Sircar.* – Cambridge University Press, 2000. – 201 p.

Стаття: надійшла до редакції 02.09.2013
прийнята до друку 16.10.2013

CALCULATION OF THE FAIR PRICE OF EUROPEAN OPTION UNDER UNCERTAINTY

Ihor KOTSIUBA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: kotsiuba@hotmail.com

The article is deals with Black-Scholes model where parameters depends on time and environment state, conditions under which the fair price of the option before and after averaging coincide are considered.

Key words: option, share, fair price, volatility, Black-Scholes model.

РАСЧЕТ ЦЕНЫ РАВНОВЕСИЯ ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Игорь КОЦЮБА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: kotsiuba@hotmail.com

Рассмотрено модель Блэка-Шоулса и Мертона с параметрами, которые зависят от времени и состояния внешней среды, установлены условия, при которых цена европейского опциона до и после усреднения в данной модели совпадает.

Ключевые слова: опцион, акции, цена равновесия, волатильность, модель Блэка-Шоулса.