ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 130–140
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 130–140

УДК 513.88

ПРО ОПЕРАТОРНУ ЧАСТИНУ МАКСИМАЛЬНО ДИСИПАТИВНОГО РОЗШИРЕННЯ ЕРМІТОВОГО ОПЕРАТОРА

Юрій ОЛІЯР, Олег СТОРОЖ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: aruy14@ukr.net

Застосовуючи критерій максимальної дисипативності розширення-відношення S скінченновимірного нещільно визначеного звуження симетричного оператора L_0 з довільними дефектними числами, побудовано операторну частину відношення S. Доведено таке: якщо S є оператором, то він споріднений (у сенсі В.Е. Лянце) з парою (L_0^*, L_0).

Ключові слова: лінійне відношення, дисипативність, операторна частина, розширення.

1. Вступ. Теорію лінійних відношень ("багатозначних операторів") започаткував Р. Аренс [1] і надалі досліджували Е.А. Коддінгтон [2], А. Дайксми і Г. Сноо [3], В.М. Брук [4], А.Н. Кочубей [5, 6], В.І. Горбачук і М.Л. Горбачук [7] та інші математики (див., наприклад, [8–13]). Зокрема, в [6], використовуючи концепцію лінійних відношень, отримано такі результати:

1) описано усі максимально дисипативні розширення-відношення S скінченновимірного звуження (щільно визначеного) симетричного оператора L_0 з однаковими дефектними числами, який діє в гільбертовому просторі;
2) виділено операторну частину відношення S.

Про перенесення першого з цих результатів на випадок, коли L_0 має довільний індекс дефекту, йдеться в [14]. Ця стаття є продовженням праці [14]. Вона присвячена поширенню на випадок довільних дефектних чисел другого зі згаданих результатів. Крім того, ми доводимо, якщо S є оператором, то він споріднений в сенсі В.Е. Лянце [15, 16] з парою (L_0^*, L_0).

Зазначимо, що важливість вивчення максимально дисипативних операторів зумовлена хоча б такою обставиною: щільно визначений лінійний оператор A в гільбертовому просторі H максимально дисипативний тоді і тільки тоді, коли iA є генератором сильно неперервної півгрупи стисків у H (див. [17]).

© Оліяр Ю., Сторож О., 2013

2. Основні поняття та позначення. Попередні відомості. Ми використовуємо такі позначення:

- $D(T), R(T), \ker T$ – відповідно, область визначення, область значень і многовид нулів оператора T;
- $(\cdot \mid \cdot), \oplus, \dot{+}, \perp$ – символи скалярного добутку, ортогональної суми, прямої суми та ортогонального доповнення, відповідно (якщо X -гільбертів простір, а T_1, T_2 – лінійні многовиди в X, то $T_1 \ominus T_2 \overset{def}{=} T_1 \bigcap T_2^{\perp}$);
- AE – образ множини E при відображенні A;
- 1_X -тотожне перетворення множини X;
- $A \downarrow E$ – звуження відображення A на множину E;
- якщо X, Y – гільбертові простори, то під $\mathcal{C}(X), \mathcal{B}(X,Y)$ розуміємо класи лінійних замкнених щільно визначених неперервних операторів у просторі X і лінійних неперервних операторів $A : X \to Y$ таких, що $D(A) = X$, відповідно, $(\mathcal{B}(X) \overset{def}{=} \mathcal{B}(X,X))$.

Нехай H – комплексний гільбертів простір, а $H^2 = H \oplus H$. Нагадаємо, що (замкненим) лінійним відношенням у просторі H називають довільний (замкнений) лінійний многовид $T \subset H^2$, а область визначення $D(T)$ та спряжене відношення у просторі T^* визначають так:

$$D(T) = \{y \in H \ : \ (\exists z \in H)\ (y,z) \in T\},$$
$$\{T^* = (y_2, z_2) \in H^2 \ : \ \forall (y_1, z_1) \in T \ \ (z_1 \mid y_2) - (z_2 \mid y_1) = 0\}.$$

Легко бачити, що

$$T^* = (JT)^{\perp} = JT^{\perp}, \tag{1}$$

де

$$J(h_1, h_2) = (-ih_2, ih_1) \quad (h_1, h_2 \in H). \tag{2}$$

Означення 1. *Відношення T називають дисипативним (акумулятивним), якщо для будь-якого $(y,z) \in T$ $\Im(z \mid y) \geqslant 0 (\leqslant 0)$ і максимально дисипативним (максимально акумулятивним), якщо воно, крім того, не має нетривіальних дисипативних (акумулятивних) розширень.*

Нагадаємо також, що в теорії лінійних відношень оператор ототожнюють з його графіком.

Роль вихідного об'єкта у статті відіграє симетричний оператор $L_0 \in \mathcal{C}(H)$, де H – фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot \mid \cdot)$. Отож, $L_0 \subset L_0^* \overset{def}{=} L$. Нехай H_0 – скінченновимірний підпростір простору H, P_0 – ортопроектор, $H \to H_0$, $S_0 \overset{def}{=} L_0 \downarrow H_0^{\perp}$, а $(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-, \delta_+, \delta_-)$ – фіксований антисиметричний простір граничних значень оператора L_0, введений у [18].

Теорема 1. *([14]) Для будь-якого стиску $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^+ \oplus H_0, \mathcal{H}^- \oplus H_0)$ підпростір, що складається з тих елементів $\{(y, Ly + \phi) \subset S_0^*\}$ (іншими словами $\{(y, Ly+\phi) : y \in D(L), \phi \in H_0\}$), які задовольняють умову*

$$K(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi + iP_0 y)) - (\delta_- y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi - iP_0 y)) = 0, \tag{3}$$

є максимально дисипативним розширенням оператора S_0.

Навпаки, будь-яке макимально дисипативне відношення-розширення S – це частина простору S_0^*, яка виділяється умовою (3).

Аналогічно формулюються умови акумулятивності розширення відношення S_0. Нехай $T \subset H^2$ – замкнене лінійне відношення

$$T(0) \overset{def}{=} \{z \in H \ : \ (0, z) \in T\}, \quad T_\infty \overset{def}{=} 0 \oplus T(0), \quad T_{op} \overset{def}{=} T \ominus T_\infty.$$

T_∞ називається багатозначною частиною відношення T, а T_{op} – його операторною частиною. Відомо [6] (див. також [1], [3]) таке: якщо T – максимально дисипативне відношення, то T_{op} – замкнений оператор з областю визначення $D(T)$, а $T_{op} \downarrow ([H \ominus T(0)] \bigcap D(T))$ – максимально дисипативний оператор в $H \ominus T(0)$.

3. Багатозначна й операторна частини максимально дисипативного розширення S відношення S_0.

Зауваження 1. З теореми 1, а точніше, з [3], випливає, що $(0, \phi) \in S$ тоді і тільки тоді, коли $K(0, \phi) = (0, \phi)$, тобто

$$S(0) = \{\phi \in H_0 \ : \ K(0, \phi) = (0, \phi)\} = \ker(K \downarrow (\{0\} \oplus H_0) - 1_{\{0\} \oplus H_0}). \tag{4}$$

Нехай Q – ортопроектор $H \to H \ominus S(0)$, $\Lambda \overset{def}{=} K \downarrow ((\{0\} \oplus H_0) - 1_{\{0\} \oplus H_0})$, тобто

$$\forall h \in H_0 \quad \Lambda(0, h) = K(0, h) - (0, h),$$

$$\Lambda_0 = K \downarrow ((\{0\} \oplus QH_0) - 1_{\{0\} \oplus QH_0})(= \Lambda \downarrow (\{0\} \oplus QH_0).$$

З (4) випливає, що $S(0) = \ker \Lambda$, зокрема S є оператором тоді і тільки тоді, коли $\ker \Lambda = \{0\}$ і що $\ker \Lambda_0 = \{0\}$.

Зауваження 2. Нехай $(y, Ly + \phi) \in S$, зокрема $y \in D(S) = D(S_{op})$. Тоді

$$S_{op} y = QLy + Q\phi. \tag{5}$$

Доведення. Справді,

$$Ly + \phi = QLy + Q\phi + (1_H - Q)(Ly + \phi),$$

тому

$$(y, Ly + \phi) = (y, QLy + Q\phi) + (0, (1_H - Q)(Ly + \phi)).$$

Оскільки $1_H - Q$ – ортопроектор $H \to S(0)$, то $(0, (1_H - Q)(Ly + \phi)) \in S_\infty \subset S$. Оскільки $(y, Ly + \phi) \in S$, то звідси випливає, що $(y, QLy + Q\phi) \in S$.

Крім того, для всякого $z \in S(0) \quad ((y, QLy + Q\phi) \mid (0, z)) = 0$, тому

$$(y, QLy + Q\phi) \in S \cap S_\infty^\perp = S_{op},$$

а отже, справджується (5). □

Нехай Π_1 – ортопроектор $\mathcal{H}^- \oplus H_0 \to \mathcal{H}^- \oplus \{0\}$, Π_2 – ортопроектор $\mathcal{H}^- \oplus H_0 \to \{0\} \oplus H_0$, а оператор $W : D(L) \to \mathcal{H}^- \oplus \mathcal{H}^+$ визначається так:

$$\forall y \in D(L) \quad Wy = -\sqrt{2}[K(\delta_+ y, \frac{i}{\sqrt{2}} P_0 y) + (-\delta_- y, \frac{i}{\sqrt{2}} P_0 y)]. \tag{6}$$

Теорема 2. *В умовах теореми 1*

$$D(S_{op}) = D(S) = \{y \in D(L) \ : \ Wy \in R(\Lambda_0), \ \Pi_1 \Lambda_0^{-1} Wy = 0\}, \tag{7}$$

$$\forall y \in D(S_{op}) \ S_{op} y = QLy + \Pi_1 \Lambda_0^{-1} Wy = 0. \tag{8}$$

Доведення. Для знаходження $D(S_{op})$ та $Q\phi$ подамо (3) у такому вигляді:

$$K(\delta_+ y, \frac{i}{\sqrt{2}}P_0 y) + K(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\phi) - (\delta_- y, \frac{-i}{\sqrt{2}}P_0 y) - (0, \frac{1}{\sqrt{2}}\phi)$$

або, що еквівалентно,

$$K(\delta_+ y, \frac{i}{\sqrt{2}}P_0 y) + (-\delta_- y, \frac{i}{\sqrt{2}}P_0 y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda(0, \phi). \tag{9}$$

З (4) і (9) випливає, що $\phi \in S(0) = \ker \Lambda$, тому, оскільки

$$\Lambda(0, Q\phi) = \Lambda_0(0, Q\phi) + \Lambda(0, (1_H - Q)\phi) = \Lambda_0(0, Q\phi),$$

то рівність (9) можна записати так: $\Lambda_0(0, Q\phi) = Wy$ тобто $Wy \in R(\Lambda_0)$ і $(0, Q\phi) = \Lambda_0^{-1}Wy$.

Остання рівність рівносильна системі

$$\Pi_1 \Lambda_0^{-1} W y = 0, \quad Q\phi = \Pi_2 \Lambda_0^{-1} W y. \tag{10}$$

Враховуючи (5) і цитовані вище властивості операторної частини максимально дисипативного відношення, бачимо, що теорему доведено. □

Приклад 1. Нехай L_0 має індекс дефекту (1, 1), $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \delta_+, \delta_-)$ – антисиметричний простір граничних значень цього оператора (наприклад, L_0 – мінімальний оператор, породжений в $L_2(0,1)$ диференціальним виразом $i\acute{y}$, $\delta_+ y = y(1)$, $\delta_- y = y(0)$), а S_0 – (одновимірне) звуження цього оператора L_0 на підпростір $H_0^{\perp}$, де H_0 лінійна оболонка породжена одиничним вектором $e \in H$.

Нехай $K \in \mathcal{B}(\mathbb{C} \oplus H_0, \mathbb{C} \oplus H_0)$ – стиск, який визначається матрицею

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}.$$

Оператор K природно ототожнюється з числовою матрицею

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad (k_{ij} \in \mathbb{C}, \quad i, j = 1, 2).$$

Знайдемо загальний вигляд максимально дисипативного розширення S оператора S_0.

а)

$$\ker \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & k_{12} \\ 0 & k_{22} - 1 \end{pmatrix} = \{0\},$$

тобто

$$|k_{12}|^2 + |k_{22} - 1|^2 > 0.$$

Зі сказаного вище випливає, що в цій ситуації $S(0) = \{0\}$, тобто S є оператором, а рівняння (9) набуває вигляду

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & K_{12} \\ 0 & K_{22} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix} = -\left[\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_+ y \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(y \mid e)e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\delta_- y \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(y \mid e)e \end{pmatrix} \right],$$

де $e \in H_0$ і $\|e\| = 1$ або (що еквівалентно)

$$k_{12}(\phi \mid e) = -\sqrt{2}(k_{11}\delta_+ y + \frac{i}{\sqrt{2}}k_{12}(y \mid e) - \delta_- y) \stackrel{def}{=} \alpha(y) \tag{11, a}$$

$$(k_{22}-1)(\phi \mid e) = -\sqrt{2}(k_{21}\delta_+ y + \frac{i}{\sqrt{2}} k_{22}(y \mid e) + \frac{i}{\sqrt{2}}(y \mid e)) \overset{def}{=} \beta(y). \qquad (11, б)$$

Враховуючи це, неважко зміркувати, що

$$(\phi \mid e) = \frac{\overline{k_{12}}\alpha(y) + (\overline{k_{22}}-1)\beta(y)}{|k_{12}|^2 + |k_{22}-1|^2} \overset{def}{=} \gamma(y). \qquad (12)$$

Підставляючи (12) в (11, а), (11, б) і враховуючи рівність $\phi = \gamma(y)e$, бачимо, що

$$D(S) = \{y \in D(L) \ : \ (k_{22}-1)\alpha(y) - k_{12}\beta(y) = 0\},$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + \gamma(y)e.$$

б) $k_{12} = 0, k_{22} = 1$.

У цій ситуації $S(0) = H_0$, а отже, $Qy = y - (y \mid e)e$.

Отримали

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ K_{21} & 1_{H_0} \end{pmatrix}.$$

Легко бачити (див. також [20]), що K може бути стиском тільки при $K_{21} = 0$ (і $\|K_{11}\| \leqslant 1$). Отож, з точністю до згаданого вище ототожнення

$$K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $|k| \leqslant 1$. Міркуючи так, як при виведенні (11, а), (11, б) бачимо, що в розглядуваному випадку

$$S = \{(y, Ly + ce) \ : \ y \in D(S), \ c \in \mathbb{C}\},$$

де

$$D(S) = \{y \in D(L) \ : \ k\delta_+ y + \delta_- y = 0, \ (y \mid e) = 0\}.$$

Згідно зі сказаним вище (оскільки для будь-якого $\phi = ce \in H_0$
$Q\phi = \phi - (\phi \mid e)e = 0$),

$$D(S_{op}) = D(S) = \{y \in D(L) \ : \ k\delta_+ y + \delta_- y = 0, \ (y \mid e) = 0\},$$

$$\forall y \in D(S_{op}) \ S_{op} y = Ly - (Ly \mid e)e.$$

4. Друге формулювання теореми 2. Відомо [14] (див. також [18]), що лінійне відношення $S \supset S_0$ є максимально дисипативним тоді і тільки тоді, коли існують лінійні оператори $A^{\pm} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\pm} \oplus H_0, \mathcal{H}^{-} \oplus H_0)$ такі, що

$$A^+(A^+)^* \leqslant A^-(A^-)^*, \quad \ker A^- = \{0\}, \qquad (13)$$

а S складається з тих елементів $\{y, Ly + \phi\} \subset S_0^*$, які задовольняють умову

$$A^+(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi + iP_0 y)) + A^-(\delta_- y, \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi - iP_0 y)) = 0. \qquad (14)$$

З (14) випливає, що $(0, \phi) \in S$ тоді і тільки тоді, коли $A^+(0, \phi) + A^-(0, \phi) = 0$, тобто

$$S(0) = \{\phi \in H_0 \ : \ A^+(0, \phi) + A^-(0, \phi) = 0\} =$$
$$= \ker(A^+ \downarrow (\{0\} \oplus H_0) + A^- \downarrow (\{0\} \oplus H_0)). \qquad (15)$$

Нехай Q- ортопроектор $H \to H \ominus S_0$,

$$\Pi = A^+ \downarrow (\{0\} \oplus H_0) + A^- \downarrow (\{0\} \oplus H_0), \quad \Pi_0 = \Pi \downarrow (\{0\} \oplus QH_0).$$

З (15) випливає, що $S(0) = \ker \Pi$, зокрема S є оператором тоді і тільки тоді, коли $\ker \Pi = \{0\}$, а отже, $\ker \Pi_0 = \{0\}$.

Нехай, як і вище, Π_1 – ортопроектор $\mathcal{H}^- \oplus H_0 \to \mathcal{H}^- \oplus \{0\}$, Π_2 – ортопроектор $\mathcal{H}^- \oplus H_0 \to \{0\} \oplus H_0$.

Визначимо оператор $N : D(L) \to \mathcal{H}^- \oplus H_0$ так:

$$\forall y \in D(L) \quad Ny = -\sqrt{2}[A^+(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}} P_0 y) + A^-(\delta_- y, \frac{i}{\sqrt{2}} P_0 y)]. \tag{16}$$

Теорема 3. *При зроблених припущеннях (див. зокрема (13), (14))*

$$D(S) = D(S_{op}) = \{y \in D(L) \ : \ Ny \in R(\Pi_0), \ \Pi_1 \Pi_0^{-1} Ny = 0\}, \tag{17}$$

$$\forall y \in D(S_{op}) \quad S_{op} y = QLy + \Pi_2 \Pi_0^{-1} Ny, \tag{18}$$

де N визначено згідно з (16).

Доведення. Для знаходження $D(S_{op})$ та $Q\phi$ подамо (14) у такому вигляді:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Pi(0, \phi) = -[A^+(\delta_+ y, \frac{1}{\sqrt{2}} P_0 y) + A^-(\delta_- y, \frac{i}{\sqrt{2}} P_0 y)]. \tag{19}$$

Оскільки $\Pi(0, \phi) = \Pi_0(0, Q\phi)$, то ця рівність може бути записана так: $\Pi_0(0, Q\phi) = Ny$, тобто $Ny \in R(\Pi_0)$, $(0, Q\phi) = \Pi_0^{-1} Ny$.

Остання рівність рівносильна системі

$$\Pi_1 \Pi_0^{-1} Ny = 0, \quad Q\phi = \Pi_2 \Pi_0^{-1} Ny. \tag{20}$$

Враховуючи (5) і цитовані вище властивості операторної частини максимально дисипативного відношення, бачимо, що теорему доведено. □

Наслідок 1. *В умовах теореми 3 S є (максимально дисипативним) оператором-розширенням оператора S_0 тоді і тільки тоді, коли* $\ker \Pi = \{0\}$

У цьому випадку

$$D(S) = \{y \in D(L) \ : \ Ny \in R(\Pi), \ \Pi_1 \Pi^{-1} Ny = 0\}$$

$$\forall y \in D(S) \quad Sy = Ly + \Pi_2 \Pi^{-1} Ny.$$

Для доведення достатньо застосувати теорему 3 при $Q = 1_H$.

5. Дисипативні розширення оператора S_0 і теорія В.Е. Лянце споріднених операторів. Нехай $L, L_0 \in \mathcal{C}(H)$ і $L_0 \subset^m L$ (це означає, що L скінченновимірний, а саме m-вимірний, розширений оператор L_0). Використовуючи термінологію, запропоновану в [15, 16], будемо говорити, що оператор $T \in \mathcal{C}(H)$ споріднений з оператором L, якщо T та L мають спільне скінченновимірне замкнене звуження і спорідненим з парою (L, L_0) ($T \sim (L, L_0)$, якщо, крім того, $D(T) \subset D(L)$, $D(T^*) \subset D(L_0^*)$, $D((L \downarrow D(T))^*) \subset D(L_0^*)$).

Далі скрізь припускаємо, що оператори L та L_0 такі, як і вище, причому L_0 має індекс дефекту (m_+, m_-) $\quad (m_\pm < \infty)$, а отже, (див. [18]) $\dim \mathcal{H}^\pm = m_\pm, L_0 \subset^{m_+ + m_-} L$. Крім того, без особливих пояснень використовують результати праць [15, 16], а також праць [19, 20], присвячених викладові основних положень теорії дисипативних операторів у гільбертовому просторі.

Теорема 4. *Якщо L скінченновимірний розширений оператор L_0, то будь-який максимально дисипативний оператор $S \supset S_0$ є спорідненим з парою (L, L_0).*

Доведення. Безпосередньо з теореми 2 випливає, що оператор $S \supset S_0$ максимально дисипативний тоді і тільки тоді, коли існує стиск

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^+ \oplus H_0, \mathcal{H}^- \oplus H_0)$$

такий, що

$$\ker \begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} - 1_{H_0} \end{pmatrix} = \{0\}, \tag{21}$$

а графік $G(S)$ оператора S складається з усіх тих $\{(y, Ly + \phi) : y \in D(L), \phi \in H_0\}$, які задовольняють умову

$$\begin{pmatrix} K_{12}\phi \\ (K_{22} - 1_{H_0})\phi \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\left[\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_+ y \\ \frac{i}{\sqrt{2}} P_0 y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\delta_- y \\ \frac{i}{\sqrt{2}} P_0 y \end{pmatrix}\right] \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} A_1^+ \delta_+ y + A_1^- \delta_- y + A_1^0 P_0 y \\ A_2^+ \delta_+ y + A_2^- \delta_- y + A_2^0 P_0 y \end{pmatrix}, \tag{22}$$

де $A_1^\pm \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^\pm, \mathcal{H}^-), A_1^0 \in \mathcal{B}(H_0, \mathcal{H}^-), A_2^\pm \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^\pm, H_0), A_2^0 \in \mathcal{B}(H_0)$.

Подіявши на першу рівність цієї системи оператором K_{12}^*, а на другу – оператором $(K_{22}^* - 1_{H_0})$ і додавши отримані співвідношення, бачимо, що за певних $B^\pm \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^\pm, H_0), B_0 \in \mathcal{B}(H_0)$

$$\left[K_{12}^* K_{12} + (K_{22}^* - 1_{H_0})(K_{22} - 1_{H_0})\right]\phi = B^+ \delta_+ y + B^- \delta_- y + B_0 P_0 y.$$

Оскільки $\dim H_0 < \infty$, то з (21) випливає, що

$$\mathcal{K} \stackrel{def}{=} [K_{12}^* K_{12} + (K_{22}^* - 1_{H_0})(K_{22} - 1_{H_0})]^{-1} \in \mathcal{B}(H_0),$$

а

$$\phi = \mathcal{K} B^+ \delta_+ y + \mathcal{K} B^- \delta_- y + \mathcal{K} B_0 P_0 y. \tag{23}$$

Підставляючи (23) в (22), отримуємо систему вигляду

$$\begin{cases} F_1^+ \delta_+ y + F_1^- \delta_- y = F_1^0 P_0 y \\ F_2^+ \delta_+ y + F_2^- \delta_- y = F_2^0 P_0 y \end{cases}, \tag{24}$$

де $F_1^\pm \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^\pm, \mathcal{H}^-), F_1^0 \in \mathcal{B}(H_0, \mathcal{H}^-), F_2^\pm \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^\pm, H_0), F_2^0 \in \mathcal{B}(H_0)$.

Зрозуміло, що система (22) рівносильна (23)-(24), зокрема $D(S)$ складається з усіх тих $y \in D(L)$, які задовольняють (24). Але (24) рівносильна системі $m_- + m_0$ скалярних рівнянь ($m_0 \stackrel{def}{=} \dim H_0$)

$$\begin{cases} (F_1^+ \delta_+ y \mid h_i) + (F_1^- \delta_- y \mid h_i) = (F_1^0 P_0 y \mid h_i), & i = 1, ..., m_-, \\ (F_2^+ \delta_+ y \mid e_j) + (F_2^- \delta_- y \mid e_j) = (F_2^0 P_0 y \mid e_j), & j = 1, ..., m_0, \end{cases}, \tag{25}$$

де $\{h_1, ..., h_m\}, \{e_1, ..., e_{m_0}\}$ – ортонормовані бази в $\mathcal{H}^-$ та H_0, відповідно. Однак не всі рівняння цієї системи незалежні. Використовуючи результати праць [15, 16, 19, 20], можна довести, що серед співвідношень (25) є тільки m_- незалежних. Тому, не зменшуючи загальності, можна вважати, що (27) еквівалентна співвідношенню

$$\sum_{i=1}^{r}(F_1^+\delta_+y \mid h_i)h_i + \sum_{i=1}^{r}(F_1^-\delta_-y \mid h_i)h_i + \sum_{i=r+1}^{m_-}(F_2^+\delta_+y \mid e_{i-r})h_i + \\ + \sum_{i=r+1}^{m_-}(F_2^-\delta_-y \mid e_{i-r})h_i = \sum_{i=1}^{r}(F_1^0P_0y \mid h_i)h_i + \sum_{i=r+1}^{m_-}(F_2^0P_0y \mid e_{i-r})h_i. \tag{26}$$

Перше, ніж переходити до завершення доведення, пояснимо, що під $(\cdot \mid \cdot)_L$ розуміємо скалярний добуток графіка оператора L

$$(\forall y \in D(L)) \quad (\forall z \in D(L)) \quad (y \mid z)_L = (y \mid z)_L + (Ly \mid Lz), \tag{27}$$

під $D[L]$ – многовид $D(L)$, трактований як гільбертів простір зі скалярним добутком (27), а під $\ominus_L$ –символ ортогонального доповнення в $D[L]$. Якщо $W \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H}^-)$, то під $W' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^-, D[L])$ розуміємо спряжений оператор

$$(\forall y \in D(L)) \quad (\forall h \in \mathcal{H}^-) \quad (Wy \mid h)_{\mathcal{H}^-} = (y \mid W'h)_L,$$

де $(\cdot \mid \cdot)_{\mathcal{H}^-}$ символ скалярного добутку в $\mathcal{H}^-$.

Продовжимо наші міркування. З (26) випливає, що існують оператори $U \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H}^-), \Phi \in \mathcal{B}(H, \mathcal{H}^-)$ такі, що $\ker U \supset D(L_0)$ і

$$D(S) = D(L \downarrow D(S)) = \{y \in D(L) \ : \ Uy - \Phi y = 0\},$$

зокрема $D(S) \subset D(L)$.

Оскільки (див. [19, 20]) S^* – максимально акумулятивний оператор, то $D(S^*) \subset D(L)$. Далі, S та L мають спільне скінченновимірне замкнене звуження S_0, тому для завершення доведення достатньо довести, що

$$D((L \downarrow D(S))^*) \subset D(L). \tag{28}$$

А це справді так. Насправді, застосувавши абстрактну формулу Гріна (в сенсі [15, 16]) до пари $(L, L \downarrow D(S))$, отримуємо

$$D(L_S^*) = D(L_0) \dotplus L[D(L) \ominus_L D(L_S)] = D(L_0) \dotplus L[D(L) \ominus_L \ker(U - \Phi)] = \\ = D(L_0) \dotplus LR(U' - \Phi').$$

Враховуючи співвідношення $R(U') = D(L) \ominus_L \ker U \subset D(L) \ominus_L D(L_0)$ і застосовуючи абстрактну формулу Гріна до пари (L, L_0), одержимо

$$LR(U') \subset L[D(L) \ominus_L D(L_0)] = D(L) \ominus_L D(L_0) \subset D(L).$$

Далі, для будь-яких $y \in D(L), h \in \mathcal{H}^-$

$$(Ly \mid L\Phi'h) = (y \mid \Phi'h)_L - (y \mid \Phi'h) = (\Phi y \mid h)_{\mathcal{H}^-} - (y \mid \Phi'h) = (y \mid \Phi^*h - \Phi'h),$$

а отже, $L\Phi'h \in D(L^*) = D(L_0)$ (і $L_0L\Phi'h = \Phi^*h - \Phi'h$). Отож, $LR(\Phi') \subset D(L_0) \subset \subset D(L)$.

Співвідношення (28), а з ним і теорему 4 доведено. □

Наслідок 2. *В умовах теореми 4 будь-який замкнений щільно визначений дисипативний оператор, який є розширенням оператора S_0, споріднений з парою (L, L_0).*

Доведення. Нехай $\hat{S} \supset S_0, \hat{S} \in \mathcal{C}(H)$ і $\hat{S}$ – дисипативний оператор. Відомо [19, 20], що існує масимально дисипативний оператор $S \in \mathcal{C}(H)$, який є розширенням оператора $\hat{S}$. Отримали $S_0 \subset \hat{S} \subset S \subset S_0^*$, а отже, $S_0 \subset S^* \subset \hat{S}^* \subset S_0^*$.

З цих співвідношень випливає, що

$$D(\hat{S}) \subset D(L),\ D(\hat{S}^*) \subset D(S_0^*) = D(L). \tag{29}$$

Далі, L і $\hat{S}$ мають спільне скінченновимірне замкнене звуження S_0, тому оператор $\hat{S}$ споріднений з L. Нарешті,

$$L \downarrow (D(S^*)) \subset L \downarrow (D(\hat{S}^*)),$$

тому

$$(L \downarrow (D(\hat{S}^*)))^* \subset (L \downarrow (D(S^*)))^*.$$

Але $D(L \downarrow (D(S^*)))^* \subset D(L)$ (це випливає з теореми 4 і з того, що S^* – максимально акумулятивний оператор), тому $D(L \downarrow (D(\hat{S}^*)))^* \subset D(L)$. Звідси і з (29) випливає, що $\hat{S}^* \sim (L, L_0)$, а отже, (див. [15, 16]) $\hat{S} \subset (L, L_0)$. □

Список використаної літератури

1. *Arens R.* Operational calculus of linear relations / *R. Arens* // Pacif. J. Math. – 1961. – Vol. 11, №1. – P. 9-23.
2. *Coddington E.A.* Self-adjoint subspace extensions of nondensely defined linear operators / *E.A. Coddington* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 79, №4. – P. 712-715.
3. *Dijksma A.* Self-adjoint extensions of symmetric subspaces / *A. Dijksma, H.S.V. de Snoo* // Pacif. J. Math. – 1974. – Vol. 54, №1. – P. 71-100.
4. *Брук В.М.* О расширениях симметрических отношений / *В.М. Брук* // Мат. заметки. – 1977. – Vol. 22, №6. – С. 825-834.
5. *Кочубей А.Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений / *А.Н. Кочубей* // Мат. заметки. – 1975. – Vol. 17, №1. – С. 41-48.
6. *Кочубей А.Н.* О расширениях неплотно заданного оператора / *А.Н. Кочубей* // Сиб. мат. журн. – 1977. – Vol. 18, №2. – С. 314-320.
7. *Горбачук В.И.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / *В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук.* – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.
8. *Derkach V.A.* Generalized resolvents of symmetric operators and admissibility / *V.A. Derkach, S. Hassi, M.M. Malamud, H.S.V. de Snoo* // Meth. of Funct. Anal. and Topology. – 2000. – Vol. 6, №3. – P. 24-55.
9. *Arlinskii Y.M.* External extensions of sectorial linear relations / *Y.M. Arlinskii* // Math. Studii. – 1997. – Vol. 7, №1. – P. 81-96.
10. *Sandovici A.* Canonical extensions of symmetric linear relations / *A. Sandovici* // Operator Theory. – 2006. – Vol. 20, №1. – P. 207-221.
11. *Hassi S.* Finite-dimensional graph perturbations of selfadjoint Sturm-Liouville operators / *S. Hassi, H. Snoo, A. Sterk, H. Winkler* // Tiberiu Constantinescu Memorial vol. Theta Foundation, 2007. – P. 205-226.
12. *Bruk V.M.* On linear relations generated by nonegative operator functions and degenerate elliptic differential operator expression / *V.M. Bruk* // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2009. – Vol. 5, №2. – P. 123-144.
13. *Bruk V.M.* On linear relations generated by a Nevanlinna operator function / *V.M. Bruk* // J. Math., Phys., Anal., Geom. – 2011. – Vol. 7. – №2. – P. 115-140.

14. *Сторож О.Г.* Зв'язок між двома парами лінійних відношень та дисипативні розширення деяких нещільно визначених операторів / *О.Г. Сторож* // Карпатські мат. публ. – 2009. – Vol. 1, №2. – С. 207-213.
15. *Лянце В.Э.* О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами. / *В.Э. Лянце* // Докл. АН СССР. – 1972. – Vol. 204, №3. – С. 542-545.
16. *Лянце В.Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. / *В.Э. Лянце* // Теория фунций, функ. анализ и их прилож. – 1972. – Vol. 16. – С. 165-186.
17. *Иосида К.* Функциональный анализ / *К. Иосида* – М., 1967.
18. *Сторож О.Г.* О расширениях симметрических операторов с неравными дефектными числами / *О.Г. Сторож* // Мат. заметки. – 1984. – Vol. 36, №5. – С. 791-796.
19. *Phillips R.C.* Dissipative operators and hyperbolic sytems of partial differential equations / *R.C. Phillips* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – Vol. 90 – P. 193-254.
20. *Штраус А.В.* О расширениях и характеристической функции симметрического оператора / *А.В. Штраус* // Изв. АН СССР. – 1968. – Vol. 32, №1. – С. 186-207.

Стаття: надійшла до редакції 29.11.2012
прийнята до друку 16.10.2013

ON THE OPERATOR PART OF A MAXIMAL DISSIPATIVE EXTENSION OF HERMITIAN OPERATOR

Yurii OLIIAR, Oleh STOROZH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: aruy14@ukr.net

Applying the criterion of maximal dissipativity of subspace extension S of a finite-dimensional nondensely defined restriction of symmetric operator L_0 with arbitrary defect numbers the operator part of S is constructed. It is proved that in case when S is an operator, it is related (accordingly to W.E. Lyantse) to the pair (L_0^*, L_0).

Key words: linear relation, dissipativity, operator part, extension.

ОПЕРАТОРНАЯ ЧАСТЬ МАКСИМАЛЬНО ДИСИПАТИВНОГО РАСШИРЕНИЯ ЭРМИТОВОГО ОПЕРАТОРА

Юрий ОЛИЯР, Олег СТОРОЖ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: aruy14@ukr.net

Применяя критерий максимальной дисипативности расширения-отношения S конечного не плотно заданого сужения симметрического оператора L_0 с произвольными дефектными числами, построили операторную часть отношения S. Доказано такое: если S является оператором, то он родственен (в смысле В.Э. Лянце) паре (L_0^*, L_0).

Ключевые слова: линейное отношение, дисипативность, операторная часть, расширение.