ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 148–155
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 148–155

УДК 537.72

ПРО R-ПОРЯДОК І НИЖНІЙ R-ПОРЯДОК РЯДІВ ДІРІХЛЕ З НУЛЬОВОЮ АБСЦИСОЮ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ

Юлія СТЕЦЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: yuliastets@mail.ru

Знайдено умови на показники ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності, за яких $\lambda_R^0 \leqslant \varrho_R^0\beta$, де $\beta = \varliminf\limits_{n\to\infty} \ln\lambda_n/(\ln\lambda_{n+1})$, а $\varrho_R^0 = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma|\ln\ln M(\sigma,F)$ і $\lambda_R^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma|\ln\ln M(\sigma,F)$ відповідно R-порядок і нижній R-порядок.

Ключові слова: ряд Діріхле, R-порядок, нижній R-порядок, максимальний член.

1. Вступ. Для цілої функції f, заданої лакунарним рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \quad z = re^{i\varphi}, \tag{1}$$

нехай $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, а $\varrho = \varlimsup\limits_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$ і $\lambda = \varliminf\limits_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$- відповідно порядок і нижній порядок. Дж. Уіттекер [1] довів, що

$$\lambda \leqslant \varrho\beta, \quad \beta = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\lambda_n}{\ln\lambda_{n+1}}. \tag{2}$$

Для аналітичних в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| = 1\}$ функцій вигляду (1) порядок ϱ^0 і нижній порядок λ^0 визначають рівностями $\varrho^0 = \varlimsup\limits_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}$ і $\lambda^0 = \varliminf\limits_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}$. За умови $\varrho^0 \in (0,+\infty)$ Л. Сонс [2] зробила спробу довести, що $\lambda^0 + 1 \leqslant (\varrho^0+1)\beta$. П.В. Філевич і М.М. Шеремета [3] з'ясували, що ця нерівність є неправильною і довели, що для аналітичних в $\mathbb{D}_R$ функцій правильним є повний аналог нерівності Уіттекера, тобто $\lambda^0 \leqslant \varrho^0\beta$. Цей результат випливає зі загальної доведеної в [3] теореми про оцінки знизу максимального члена ряду Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{3}$$

з довільною абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$, де $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to \infty)$. Для $\sigma < A$ нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (3), а $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$. Якщо $A = +\infty$, то R-порядок ϱ_R і нижній R-порядок λ_R вводяться [4] за формулами $\varrho_R = \varlimsup\limits_{\sigma\to\infty} \frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\sigma}$ і $\lambda_R = \varliminf\limits_{\sigma\to\infty} \frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\sigma}$. Тоді за умови $\ln n = o\big(\lambda_n \ln\lambda_n\big)$, $n \to \infty$, правильна [3] нерівність $\lambda_R \leqslant \varrho_R\beta$, яка є очевидним узагальненням нерівності (2) Уіттекера. Аналогами порядку і нижнього порядку аналітичної в $\mathbb{D}_R$ функції для рядів Діріхле (3) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності є величини [5] $\varrho^0 = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} \frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{-\ln|\sigma|}$ та $\lambda^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} \frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{-\ln|\sigma|}$, якщо $\ln\ln n = o(\ln\lambda_n)$, $n \to \infty$, то [3] $\lambda^0 \leqslant \varrho^0\beta$. А.М. Гайсин для характеристики зростання рядів Діріхле (3) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності ввів [6] R-порядок $\varrho_R^0 = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$ і подав формулу для його знаходження. Нижнім R-порядком для таких рядів Діріхле будемо називати величину $\lambda_R^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$, а метою запропонованої праці є доведення такої теореми.

Теорема 1. *Якщо* $\ln n = o\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln\lambda_n}\right)$ *при* $n \to \infty$, *то* $\lambda_R^0 \leqslant \varrho_R^0\beta$.

Крім того, буде доведено аналог теореми 1, який дає оцінки нижнього R-типу через R-тип.

2. Доведення теореми 1. Спочатку доведемо таку лему.

Лема 1. *Якщо* $\ln n = o\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln\lambda_n}\right)$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\varrho_R^0 = \varrho^* =: \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F), \quad \lambda_R^0 = \lambda^* =: \varliminf_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F).$$

Доведення. Справді, з огляду на нерівність Коші $\mu(\sigma, F) \leqslant M(\sigma, F)$ отримаємо $\lambda^* \leqslant \lambda_R^0$ і $\varrho^* \leqslant \varrho_R^0$. З іншого боку, з умови $\ln n = o\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln\lambda_n}\right)$, $n \to \infty$, випливає, що $\ln n(t) \leqslant \dfrac{\varepsilon^2 t}{\ln t}$ для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $t \geqslant t_o(\varepsilon)$, де $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant 1} 1$ – лічильна функція послідовності (λ_n). Тому

$$\frac{M(\sigma, F)}{\mu(\sigma/(1+\varepsilon), F)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n/(1+\varepsilon)\}}{\mu(\sigma/(1+\varepsilon), F)} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|\lambda_n}{1+\varepsilon}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|\lambda_n}{1+\varepsilon}\right\} \leqslant \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|t}{1+\varepsilon}\right\} dn(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} \int_0^{\infty} n(t) \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|t}{1+\varepsilon}\right\} dt \leqslant \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} \left(\int_0^{t_0} n(t)dt + \int_{t_0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}t + \frac{\varepsilon^2 t}{\ln t}\right\} dt\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-\varepsilon t\left(\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{\ln t}\right)\right\}dt + o(1), \quad \sigma\uparrow 0.$$

Приймемо $t(\sigma)=\exp\left\{\dfrac{2\varepsilon(1+\varepsilon)}{|\sigma|}\right\}$. Тоді $t(\sigma)\to+\infty$ при $\sigma\uparrow 0$ і

$$\int\limits_0^{t(\sigma)} \exp\left\{-\varepsilon t\left(\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{\ln t}\right)\right\}dt \leqslant \int\limits_0^{t(\sigma)} \exp\left\{\frac{\varepsilon^2 t}{\ln t}\right\}dt \leqslant$$

$$\leqslant t(\sigma)\exp\left\{\frac{\varepsilon^2 t(\sigma)}{\ln t(\sigma)}\right\} = \exp\left\{\frac{\varepsilon^2 t(\sigma)}{\ln t(\sigma)}+\ln t(\sigma)\right\} = \exp\left\{\frac{(1+o(1))\varepsilon^2 t(\sigma)}{\ln t(\sigma)}\right\} \leqslant \exp\{t(\sigma)\},$$

а

$$\int\limits_{t(\sigma)}^\infty \exp\left\{-\varepsilon t\left(\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{\ln t}\right)\right\}dt \leqslant \int\limits_{t(\sigma)}^\infty \exp\left\{-\varepsilon t\left(\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{\ln t(\sigma)}\right)\right\}dt =$$

$$= \int\limits_{t(\sigma)}^\infty \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|t}{2(1+\varepsilon)}\right\}dt \leqslant \frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon|\sigma|}.$$

Тому

$$\frac{M(\sigma,F)}{\mu(\sigma/(1+\varepsilon),F)} \leqslant \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\exp\{t(\sigma)\}+2+o(1), \quad \sigma\uparrow 0,$$

звідки легко випливає, що

$$|\sigma|\ln\ln M(\sigma,F) \leqslant |\sigma|\ln\mu(\sigma/(1+\varepsilon),F)+|\sigma|\ln t(\sigma)+o(1) =$$

$$= (1+\varepsilon)\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon}\ln\mu(\sigma/(1+\varepsilon),F)+2\varepsilon(1+\varepsilon)+o(1), \quad \sigma\uparrow 0.$$

Переходячи до границі при $\sigma\uparrow 0$, отримуємо нерівності $\lambda_R^0\leqslant(1+\varepsilon)\lambda^*+2\varepsilon(1+\varepsilon)$ і $\varrho_R^0\leqslant(1+\varepsilon)\varrho^*+2\varepsilon(1+\varepsilon)$, тобто з огляду на довільність ε правильні нерівності $\lambda_R^0\leqslant\lambda^*$ і $\varrho_R^0\leqslant\varrho^*$. Лему 1 доведено.

Через $\Omega(0)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty,0)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційована і зростає до $+\infty$ на $(-\infty,0)$. Для $\Phi\in\Omega(0)$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma)=\sigma-\dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Для функції $\Phi\in\Omega(0)$ і чисел $0\leqslant a<b<+\infty$ приймемо

$$G_1(a,b,\Phi)=\frac{ab}{b-a}\int\limits_a^b\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt, \quad G_2(a,b,\Phi)=\Phi\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b\varphi(t)dt\right).$$

Тоді [7] $G_1(a,b,\Phi)<G_2(a,b,\Phi)$ і правильна [3] така лема.

Лема 2. *Нехай ряд Діріхле* (3) *має абсцису абсолютної збіжності* $\sigma_a=0$, $\Phi\in\Omega(0)$ *і* $\ln\mu(\sigma,F)\leqslant\Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma\in[\sigma_0,0)$. *Тоді*

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\Phi(\sigma)} \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\frac{G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)}{G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)}, \tag{4}$$

якщо, крім того,

$$\left(\frac{\Phi''(\sigma)\Phi(\sigma)}{(\Phi'(\sigma))^2}-1\right)\ln\Phi(\sigma)\geqslant q>-\infty,\quad \sigma\in[\sigma_0,0),\tag{5}$$

то

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln\ln\mu(\sigma,F)}{\ln\Phi(\sigma)}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)}{\ln G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)}.\tag{6}$$

Тепер можемо довести теорему 1. Для цього розглянемо функцію $\Phi(\sigma)=T\exp\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\}$, де $T>0$ і $\varrho>0$. Тоді [8] при $n\to\infty$

$$G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=\frac{(1+o(1)\lambda_n\lambda_{n+1})\varrho}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\left(\frac{1}{\ln\lambda_n}-\frac{1}{\ln\lambda_{n+1}}\right),\tag{7}$$

а

$$G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=T\exp\left\{\frac{\varrho}{|\varkappa(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)|}\right\},$$

$$\frac{|\varkappa(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)|}{\varrho}=\frac{1}{\varrho(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}\int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}\varphi(t)dt=A_n+2B_n+(1+o(1))C_n\ln\frac{eT}{\varrho},\quad n\to\infty,$$

$$A_n=\frac{\lambda_{n+1}\ln\lambda_n-\lambda_n\ln\lambda_{n+1}}{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ln t_n\ln\lambda_{n+1}},$$

$$B_n=\frac{\lambda_{n+1}\ln^2\lambda_n\ln\ln\lambda_{n+1}-\lambda_n\ln^2\lambda_{n+1}\ln\ln\lambda_n}{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ln^2\lambda_n\ln^2\lambda_{n+1}}$$

і

$$C_n=\frac{\lambda_{n+1}\ln^2\lambda_n-\lambda_n\ln^2\lambda_{n+1}}{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ln^2\lambda_n\ln^2\lambda_{n+1}},\quad n\to\infty.$$

Оскільки $B_n=o(A_n)$ і $C_n=o(A_n)$ при $n\to\infty$, то $|\varkappa(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)|=\varrho(1+o(1))A_n$ і, отже,

$$\ln G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=(1+o(1))\frac{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ln\lambda_n\ln\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}\ln\lambda_n-\lambda_n\ln\lambda_{n+1}},\quad n\to\infty,$$

а

$$\ln G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=\ln\frac{\lambda_n\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}+\ln\left(\frac{1}{\ln\lambda_n}-\frac{1}{\ln\lambda_{n+1}}\right)+O(1),\quad n\to\infty.$$

Легко перевірити, що

$$\left(\frac{\Phi''(\sigma)\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)^2}-1\right)\ln\Phi(\sigma)=2+\frac{2|\sigma|}{\varrho}>2.$$

Тому, використовуючи леми 1–2 і вибираючи $\varrho=\varrho_R+\varepsilon$ і $T=1$, отримуємо

$$\lambda_R^0=\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}|\sigma|\ln\ln M(\sigma,F)=\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}(\varrho_R+\varepsilon)|\sigma|\ln\ln\mu(\sigma,F)\leqslant$$

$$\leqslant(\varrho_R^0+\varepsilon)\varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{\lambda_n\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}}{\dfrac{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ln\lambda_n\ln\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}\ln\lambda_n-\lambda_n\ln\lambda_{n+1}}}.\tag{8}$$

Припустимо, що $\beta < 1$. Тоді існують число $\beta^* \in (\beta, 1)$ і зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел такі, що $\ln\lambda_{n_k} \leqslant \beta^* \ln\lambda_{n_k+1}$, тобто $\lambda_{n_k} \leqslant \lambda_{n_k+1}^{\beta^*} = o(\lambda_{n_k+1})$, $k \to \infty$. Тому з (8) з огляду на довільність ε отримаємо

$$\lambda_R^0 \leqslant \varrho_R^0 \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln\lambda_{n_k}}{\ln\lambda_{n_k+1}}\left(1 - \frac{\lambda_{n_k}\ln\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k+1}\ln\lambda_{n_k}}\right) \leqslant \varrho_R^0\beta^*,$$

бо $\dfrac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k+1}} = o\left(\dfrac{\ln\lambda_{n_k}}{\ln\lambda_{n_k+1}}\right)$ при $k \to \infty$. З огляду на довільність $\beta^* < \beta$ нерівність $\lambda_R^0 \leqslant \beta\varrho_R^0$ доведено. Для $\beta = 1$ ця нерівність очевидна. □

3. Аналог нерівності Уіттекера для нижнього R-типу і R-типу. Для ряду Діріхле (3) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності R -типом і нижнім R -типом називаються, відповідно, величини $T_R^0 = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{-\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}\ln\ M(\sigma, F)$ і $t_R^0 = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{-\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}\ln\ M(\sigma, F)$. Правильна така лема.

Лема 3. *Якщо* $\varlimsup_{n\to\infty} \dfrac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n} < 1$ *і* $T_R^0 < \infty$, *то* $t_R^0 = t^* =: \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{-\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}\ln\ \mu(\sigma, F)$ *і* $T_R^0 = T^* =: \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{-\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}\ln\ \mu(\sigma, F)$.

Справді, за нерівністю Коші $t^* \leqslant t_R^0$ і $T^* \leqslant T_R^0$, а в [9, с. 16] доведено, що для кожного $\sigma < 0$ і $\varepsilon \in (0, |\sigma|)$

$$\frac{M(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} \leqslant n(2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon)}) + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon)}}^{\infty} n(t)\exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{2}\right\}dt,$$

де $\nu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\} = \mu(\sigma, F)\}$ – центральний індекс ряду (3), оскільки $\ln n(t) \leqslant t^\alpha$ для деякого $\alpha \in (0, 1)$ і всіх $t \geqslant t(\alpha)$, то [9, с. 21]

$$n(2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon)}) \leqslant \exp\left\{\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^\alpha \ln^\alpha \frac{\mu(\sigma+\varepsilon)}{\mu(\sigma+\varepsilon/2)}\right\}$$

і [9, с. 22]

$$\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon)}}^{\infty} n(t)\exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{2}\right\}dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp\left\{\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\varepsilon}}\right\} + 1 = K(\varepsilon).$$

Звідси випливає, що

$$\ln\ M(\sigma, F) \leqslant \ln\ \mu(\sigma, F) + \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^\alpha \ln^\alpha \mu(\sigma+\varepsilon) + o(1) \leqslant$$

$$\leqslant \ln\ \mu(\sigma, F) + \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^\alpha (T^* + \delta)^\alpha \exp\left\{\frac{\alpha\varrho_R^0}{|\sigma+\varepsilon|}\right\} + o(1), \quad \sigma \uparrow 0.$$

Якщо виберемо $\varepsilon = \dfrac{(1-\alpha)}{2}|\sigma|$, то $\sigma + \varepsilon = \dfrac{1+\alpha}{2}\sigma$ і

$$\exp\left\{-\frac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}\ln\ M(\sigma,F) \leqslant \exp\left\{-\frac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}\ln\ \mu(\sigma,F)+$$
$$+\left(\frac{8(T^*+\delta)}{(1-\alpha)|\sigma|}\right)^{\alpha}\exp\left\{-\varrho_R^0\left(\frac{1}{|\sigma|}-\frac{2\alpha}{(1+\alpha)|\sigma|}\right)\right\}+o(1)=$$
$$=\exp\left\{-\frac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}\ln\ \mu(\sigma,F)+o(1),\quad \sigma\uparrow 0.$$

Звідси випливає, що $T_R^0 \leqslant T^*$ і $t_R^0 \leqslant t^*$. Лему 3 доведено.

Нам буде потрібна така лема [10].

Лема 4. *Функція* $\dfrac{G_1(x,b,\Phi)}{G_2(x,b,\Phi)}$ *є зростаючою на* $(0,b)$.

Використовуючи леми 3 і 4, доведемо таку теорему.

Теорема 2. *Якщо* $T_R^0<\infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n}<1$ *і* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}=\gamma$, *то*

$$t_R^0 \leqslant T_R^0 g(\gamma),\quad g(\gamma)=\frac{\ln(1/\gamma)}{1-\gamma}\exp\left\{1+\frac{\ln\gamma}{1-\gamma}\right\}. \tag{9}$$

Доведення. Припустимо, що $\gamma<1$. Тоді існують число $\gamma^*\in(\gamma,1)$ і зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел такі, що $\lambda_{n_k}\leqslant\gamma^*\lambda_{n_k+1}$. За лемами 2 і 4 отримаємо

$$\underline{\lim\limits_{\sigma\uparrow 0}}\frac{\ln\ \mu(\sigma,F)}{\Phi(\sigma)}\leqslant\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_k+1},\Phi)}{G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_k+1},\Phi)}\leqslant\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{G_1(\gamma^*\lambda_{n_k+1},\lambda_{n_k+1},\Phi)}{G_2(\gamma^*\lambda_{n_k+1},\lambda_{n_k+1},\Phi)}.$$

Позначимо $\theta=\dfrac{1}{\gamma^*}-1$ і $t_k=\gamma^*\lambda_{n_k+1}$. Тоді $\lambda_{n_k+1}=(1+\theta)t_k$, і отже,

$$\underline{\lim\limits_{\sigma\uparrow 0}}\frac{\ln\ \mu(\sigma,F)}{\Phi(\sigma)}\leqslant\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{G_1(t_k,(1+\theta)t_k,\Phi)}{G_2(t_k,(1+\theta)t_k,\Phi)}.$$

Для функції $\Phi(\sigma)=T\exp\left\{\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}$, як доведено в [8] (формули (12) і (18)), правильні такі співвідношення:

$$\ln G_1(t_k,(1+\theta)t_k,\Phi)=\ln\varrho_R+\ln t_k-2\ln\ln t_k+$$
$$+\ln\frac{(1+\theta)\ln(1+\theta)}{\theta}+o(1),$$

$$\ln G_2(t_k,(1+\theta)t_k),\Phi)\geqslant\ln\varrho_R+\ln t_k+\ln(1+\theta)-2\ln\ln t_k+$$
$$+\frac{\ln(1+\theta)}{\theta}-1+o(1)$$

при $k\to\infty$. Тому

$$t_R^0=\underline{\lim\limits_{\sigma\uparrow 0}}\frac{\ln\ \mu(\sigma,F)}{\exp\left\{\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}}\leqslant$$

$$\leqslant T_R^0 \varliminf_{k\to\infty} \exp\{\ln G_1(t_k,(1+\theta)t_k,\Phi)-\ln G_2(t_k,(1+\theta)t_k),\Phi)\} =$$
$$= T_R^0 \varliminf_{k\to\infty} \exp\left\{\ln\frac{(1+\theta)\ln(1+\theta)}{\theta}-\ln(1+\theta)-\frac{\ln(1+\theta)}{\theta}+1+o(1)\right\} =$$
$$= T_R^0 \exp\left\{\frac{\ln(1+\theta)}{\theta(1+\theta)^{1/\theta}}\right\} = T_R^0\frac{\ln(1/\gamma^*)}{1-\gamma^*}\exp\left\{1+\frac{\ln\gamma^*}{1-\gamma^*}\right\}.$$

З огляду на довільність γ^* нерівність (9) для $\gamma<1$ доведено.

Оскільки $\lim_{\gamma\to 1} g(\gamma)=1$, то нерівність (4) при $\gamma=1$ є очевидною. Теорему 2 доведено. □

Список використаної літератури

1. *Whittaker J.M.* The lower order of integral functions / *J.M. Whittaker* // J. London Math. Soc. – 1933. – Vol. 8. – P. 20-27.
2. *Sons L.R.* Regularity of growth and gaps / *L.R. Sons* // J. Math. Anal. and Appl. – 1968. – Vol. 24. – P. 296-306.
3. *Філевич П.В.* Про одну теорему Л. Сонс та асимптотичне поводження рядів Діріхле / *П.В. Філевич, М.М. Шеремета* // Укр. матем. вісник. – 2006. – Т. 3, №2. – С. 187-198.
4. *Ritt J.F.* On certain points in the theory of Dirichlet series / *J.F. Ritt* // Amer. Math. J. – 1928. – Vol. 50. – P. 78-83.
5. *Бойчук В.С.* О росте абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле / *В.С. Бойчук* // Матем. сб. – 1976. – С. 238-240.
6. *Гайсин А.М.* Оценки роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуплоскости / *А.М. Гайсин* // Матем. сб. – 1982. – Т. 117, №3. – С. 412-424.
7. *Заболоцький М.В.* Узагальнення теореми Ліндельофа / *М.В. Заболоцький, М.М. Шеремета* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №9. – С. 1177-1192.
8. *Стець Ю.В.* Про регулярне зростання абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле / *Ю.В. Стець, М.М. Шеремета* // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63, №5. – С. 686-698.
9. *Шеремета М.М.* Зростання рядів Діріхле / *М.М. Шеремета, Я.Я. Притула, С.І. Фединяк.* – Львів.: Наук.-учбовий центр матем. моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача, Препрінт № 18-95. – 1998. – 30 с.
10. *Сумык О.М.* Оценки максимального члена ряда Дирихле снизу / *О.М. Сумык, М.Н. Шеремета* // Изв. вузов. Матем. – 2001. – № 4. – С. 53-57.

Стаття: надійшла до редакції 14.12.2012
прийнята до друку 16.10.2013

ON R-ORDER AND LOWER R-ORDER OF DIRICHLET SERIES WITH NULL ABSCISSA OF ABSOLUTE CONVERGENCE

Yuliya STETS

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: yuliastets@mail.ru

We found conditions of exponents of Dirichlet series with null abscissa of absolute convergence, under which $\lambda_R^0 \leqslant \varrho_R^0\beta$, where $\beta = \varliminf\limits_{n\to\infty} \ln\lambda_n/(\ln\lambda_{n+1})$, and $\varrho_R^0 = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$ and $\lambda_R^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$ are according to R-order and lower R-order.

Key words: Dirichlet series, R-order, lower R-order, maximal term.

О R-ПОРЯДКЕ И НИЖНЕМ R-ПОРЯДКЕ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С НУЛЕВОЙ АБСЦИССОЙ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ

Юлия СТЕЦ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: yuliastets@mail.ru

Найдено условия на показатели ряда Дирихле с нулевой абсциссой абсолютной сходимости, при которых $\lambda_R^0 \leqslant \varrho_R^0\beta$, где $\beta = \varliminf\limits_{n\to\infty} \ln\lambda_n/(\ln\lambda_{n+1})$, а $\varrho_R^0 = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$ и $\lambda_R^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$ соответственно R-порядок и нижний R-порядок.

Ключевые слова: ряд Дирихле, R-порядок, нижний R-порядок, максимальный член.