ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 156–170
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 156–170

УДК 517.956.2

ЗАДАЧА З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПОХІДНИХ У ГІПЕРБОЛІЧНІЙ СИСТЕМІ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Оксана Флюд

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: oflyud@yahoo.com

Розглянуто початково-крайову задачу для системи $n+m$ сингулярно збурених лінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку на площині, причому малий параметр є множником при різних частинних похідних. Побудовано та обґрунтовано асимптотичне розвинення довільного порядку розв'язку системи за степенями малого параметра.

Ключові слова: гіперболічна система, сингулярно збурена крайова задача, асимптотичне розвинення розв'язку, примежовий шар.

1. Вступ. Для гіперболічних систем рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними мішана задача добре вивчена [1]. Однак у багатьох прикладних проблемах виникають системи рівнянь, в яких характеристики ортогональні до осей координат [2]. Такі рівняння можуть виникати безпосередньо як математичні моделі фізичних процесів, або як проміжні при дослідженні, наприклад, багатовимірних задач. Зв'язок крайових задач з характеристиками, ортогональними до осей координат і моделями, характеристики яких близькі до ортогональних, виражається через ефект примежового шару.

Ефекту примежового шару для рівнянь з частинними похідними присвячено багато літературних джерел (див., наприклад, бібл. у [3]). Зазначимо, що особливістю таких задач є те, що малий параметр зазвичай стоїть перед всією головною частиною рівняння або системи. Випадок наявності малого параметра при одній частинній похідній для гіперболічних систем рівнянь першого порядку розглядали в працях [4, 5].

Ми розглядатимемо випадок лінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку, яка містить окремо малий параметр для похідних за часовою та просторовою змінними.

Близькою за формулюванням є задача з [5], методику якої використано для побудови асимптотики розв'язку.

2. Формулювання задачі. В області $\Omega = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ 0 < t < T < \infty\}$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j^\varepsilon + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)v_k^\varepsilon + f_i(x,t;\varepsilon), \quad i=\overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial v_s^\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \dfrac{\partial v_s^\varepsilon}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)u_j^\varepsilon + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)v_k^\varepsilon + g_s(x,t;\varepsilon), \quad s=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &u_i^\varepsilon(x,0) = u_i^\varepsilon(0,t) = 0, \quad i=\overline{1,n}, \\ &v_s^\varepsilon(x,0) = v_s^\varepsilon(0,t) = 0, \quad s=\overline{1,m}. \end{aligned} \tag{2}$$

де ε – малий додатний параметр. Особливістю цієї задачі є те, що параметр ε стоїть при різних похідних у перших n і в останніх m рівняннях. Це приводить до специфічних особливостей розв'язку і його асимптотики.

Ми розглядаємо класичний розв'язок задачі (1), (2), тобто розв'язок, неперервний у замиканні області $\overline{\Omega} = \{(x,t):\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T < \infty\}$, який має неперервні похідні першого порядку, які задовольняють систему (1), а також крайові умови (2). Для побудови та обґрунтування асимптотичного розвинення розв'язку задачі (1), (2) припускаємо, що виконуються такі умови:

(H_1) функції $a_{ij}, b_{ik}, \gamma_{sj}, \sigma_{sk} : \overline{\Omega} \to R$, f_i і $g_s : \overline{\Omega} \times R \to R$ – достатньо гладкі в області свого визначення (порядок гладкості залежить від порядку асимптотики);

(H_2) умови погодження першого порядку ($\forall \varepsilon > 0$)

$$\begin{aligned} &f_i(0,0;\varepsilon) = 0, \quad i=\overline{1,n}, \\ &g_s(0,0;\varepsilon) = 0, \quad s=\overline{1,m}. \end{aligned}$$

За умов (H_1), (H_2) при кожному фіксованому значенні параметра ε існує єдиний класичний розв'язок задачі (1), (2) [1]. Зазначимо, що для побудови обґрунтування асимптотики розв'язку жодних додаткових умов на знак a_{ij} $(j=i)$, σ_{sk} $(k=s)$ не потрібно.

Зауважимо, що розв'язок виродженої системи (в (1) формально $\varepsilon = 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)v_k + f_i(x,t;0), \quad i=\overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial v_s}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)u_j + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)v_k + g_s(x,t;0), \quad s=\overline{1,m} \end{cases} \tag{3}$$

не задовольняє всіх умов (2), а саме, функції u_i $(i=\overline{1,n})$ та v_s $(s=\overline{1,m})$, взагалі кажучи, не задовольняють початкові та крайові умови, відповідно. Тому в околі границі $t=0$ та $x=0$ області Ω виникають примежові шари, які підправляють розв'язок виродженої задачі (система (3) із крайовими умовами для функцій u та початковими для v, про яку йтиметься далі) до виконання втрачених при виродженні умов. Особливість задачі полягає ще й у тому, що хоча примежові функції визначають як розв'язки рівнянь з частинними похідними першого порядку, а межа на якій задають крайові умови, містить кутову точку (0,0), що впливає на гладкість розв'язку, тим не менше, вдається побудувати без будь-яких інших умов погодження, крім (H_2), асимптотику розв'язку довільного порядку, рівномірну в області $\overline{\Omega}$. Для простоти записів введемо позначення

$$u^\varepsilon(x,t) = (u_1^\varepsilon(x,t),\ldots,u_n^\varepsilon(x,t)), \quad v^\varepsilon(x,t) = (v_1^\varepsilon(x,t),\ldots,v_m^\varepsilon(x,t)).$$

3. Побудова нульового наближення. Асимптотику розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1), (2) на першому кроці будуємо у вигляді

$$u_i^\varepsilon(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) \ \ (i=\overline{1,n}), \quad v_s^\varepsilon(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) \ \ (s=\overline{1,m}), \quad (x,t)\in\Omega. \tag{4}$$

Для визначення функцій u_{i0} та v_{s0} нульового наближення регулярної частини асимптотики формулюємо таку задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_{i0}}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\bar{u}_{j0} + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)\bar{v}_{k0} + f_{i0}(x,t), \quad i=\overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)\bar{u}_{j0} + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)\bar{v}_{k0} + g_{s0}(x,t), \quad s=\overline{1,m}, \\ \bar{u}_{i0}(0,t)=0, \quad i=\overline{1,n}, \\ \bar{v}_{s0}(x,0)=0, \quad s=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{5}$$

де $f_{i0}(x,t)$, $g_{s0}(x,t)$ – перші члени розвинення функцій f_i і g_s в степеневий ряд за степенями параметра ε в околі $\varepsilon=0$. Задача (5) для визначення $\bar{u}_{i0}$ $(i=\overline{1,n})$, $\bar{v}_{s0}$ $(s=\overline{1,m})$ за умови (H_2) еквівалентна системі інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду, для якої існує єдиний достатньо гладкий розв'язок. Отож, функції $\bar{u}_{i0}$ $(i=\overline{1,n})$, $\bar{v}_{s0}$ $(s=\overline{1,m})$ однозначно визначені і мають достатню гладкість. Із формулювання задачі для визначення u_{i0}, v_{s0} очевидно випливає, що не всі умови (2) виконуються. Тепер по черзі будемо підправляти побудований розв'язок задачі (5) функціями примежового шару так, щоб виконувалися втрачені при виродженні умови.

Підправимо (4) функцією примежового шару так, щоб виконувалась друга умова (2), тобто наближення розв'язку будуємо у вигляді

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t), \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) + Q_{s0}v(\xi,t), \end{cases} \tag{6}$$

де $\xi = \dfrac{x}{\varepsilon}$, регуляризуюча змінна в околі границі $x=0$. Щоб записати задачу для визначення $Q_{s0}v(\xi,t)$, розвинемо коефіцієнти системи (1) в ряд за степенями ε, підставимо (6) у систему (1) та крайові умови (2), прирівнявши коефіцієнти для нульового степеня ε, отримаємо задачу для визначення $Q_{s0}v$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{s0}v}{\partial t} + \dfrac{\partial Q_{s0}v}{\partial \xi} = \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,t) Q_{k0}v, \quad 0 < t < T,\ \xi > 0, \\ Q_{s0}v(\xi,0) = 0, \quad \xi \geqslant 0, \\ Q_{s0}v(0,t) = -\bar{v}_{s0}(0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (s = \overline{1,m}). \end{cases} \tag{7}$$

Отож, як випливає з (7), функції $Q_{s0}v$ ліквідують невязку, яку приносять $\bar{v}_{s0}$ у крайову умову при $x = 0$ і для визначення функцій $Q_{s0}v$ отримали крайову задачу в горизонтальній півсмузі для гіперболічної системи рівнянь першого порядку. Гладкість розв'язку задачі (7) залежить від виконання умов погодження в кутовій точці. Перевіримо виконання умов погодження нульового та першого порядків розв'язку $Q_{s0}v$ у кутовій точці $(0,0)$. Отже, для виконання умов погодження нульового порядку повинні виконуватись такі рівності:

$$Q_{s0}v(\xi,0)|_{\xi=0} = Q_{s0}v(0,t)|_{t=0} \quad (s = \overline{1,m}).$$

Очевидним є те, що ліва частина цієї рівності $\forall s = 1,\dots,m$ дорівнює нулю у кутовій точці, а з умов (7) та (5) справджується рівність

$$0 = -\bar{v}_{s0}(0,t)|_{t=0} = 0 \quad (s = \overline{1,m}).$$

Отож, умови погодження початкових і крайових умов нульового порядку задачі (7) виконуються.

Перейдемо до перевірки умови погодження першого порядку, а саме, перевіримо, чи задовольняють систему (7) умови задачі в кутовій точці. Для цього повинні виконуватись рівності

$$\left.\frac{\partial Q_{s0}v}{\partial t}\right|_{(0,0)} + \left.\frac{\partial Q_{s0}v}{\partial \xi}\right|_{(0,0)} = \left.\sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,0) Q_{k0}v\right|_{(0,0)} \quad (s = \overline{1,m}).$$

Використавши умови з (7), залишиться довести, що $\left.\dfrac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial t}\right|_{(0,0)} = 0$. З умов (H_2), (5) отримаємо

$$\left.\frac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial t}\right|_{(0,0)} = \left.\sum_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(0,0) \bar{u}_{j0}\right|_{(0,0)} + \left.\sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,0) \bar{v}_{k0}\right|_{(0,0)} + g_{s0}(0,0) = 0, \quad s = \overline{1,m}.$$

Доведені вище виконання умов погодження нульового та першого порядків крайових і початкових умов дають підставу стверджувати, що розв'язок $Q_{s0}v$ задачі (7) гладкий.

Доведемо тепер, що функції $Q_{s0}v$ $(s = \overline{1,m})$ мають примежовий характер. Справді, на підставі однорідності крайової умови (7) функції $Q_{s0}v$ $(s = \overline{1,m})$ набувають нульових значень під характеристикою $\xi = x$ рівняння (7). Для $\varepsilon \to 0$ характеристика наближається до вертикального положення, тобто функції $Q_{s0}v$ відмінні від нуля в околі межі $x = 0$ області Ω.

Побудову нульового наближення розв'язку задачі (1), (2) завершуємо визначенням примежового шару в околі межі $t = 0$ області Ω. За допомогою цієї функції примежового шару скоригуємо розв'язок $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ так, щоб виконувалась крайова умова при $t = 0$, тому $u_i^\varepsilon, v_s^\varepsilon$ набудуть вигляду

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) + P_{i0}u(x,\tau), \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) + Q_{s0}v(\xi,t). \end{cases}$$

Уведемо тепер ще одну регуляризуючу змінну в околі границі $t = 0$ області Ω

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}.$$

Застосуємо стандартну процедуру теорії сингулярних збурень побудови примежового шару, для визначення функції $P_0 u$ отримаємо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{i0}u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P_{i0}u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,0)P_{j0}u, \quad \tau > 0, \ \ 0 < x < l, \\ P_{i0}u(0,\tau) = 0, \quad \tau > 0, \\ P_{i0}u(x,0) = -\bar{u}_{i0}(x,0), \quad 0 < x < l \qquad i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{8}$$

Аналогічно як вище можна переконатися, що умови погодження нульового та першого порядків задачі (8) виконуються, тому це дає змогу будувати асимптотику розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1), (2) вищого порядку з забезпеченням достатньої гладкості наближення.

4. Побудова наближення першого порядку. Асимптотичне розвинення першого порядку розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1), (2) будуємо у вигляді

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) + P_{i0}u(x,\tau) + \varepsilon\bar{u}_{i1}(x,t) + \varepsilon P_{i1}u(x,\tau) + \varepsilon Q_{i1}u(\xi,t), \ \ i = \overline{1,n}, \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) + Q_{s0}v(\xi,t) + \varepsilon\bar{v}_{s1}(x,t) + \varepsilon P_{s1}v(x,\tau) + \varepsilon Q_{s1}v(\xi,t), \ \ s = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{9}$$

Підставляємо (9) в систему (1), (2). Стандартною процедурою теорії сингулярних збурень отримаємо задачі для визначення функцій $Q_{i1}u$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{i1}u}{\partial \xi} = \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(0,t)Q_{k0}v, \\ Q_{i1}u(\infty,t) = 0, \ \ i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Проінтегрувавши рівняння для $Q_{i1}u$, з врахуванням рівності $Q_{i0}v(\xi,t) = 0$, $\xi \geqslant t$ $(i = \overline{1,n})$, одержимо розв'язок

$$Q_{i1}u(\xi,t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(0,t)\int\limits_{t}^{\xi} Q_{k0}v(\varsigma,t)d\varsigma, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant t \leqslant T, \\ 0, \qquad \xi \geqslant t. \end{cases} \tag{10}$$

Аналогічно ставиться задача для $P_{s1}v$. Використавши, що $P_{s0}u(x,\tau)=0$, $\tau\geqslant x$ $(s=\overline{1,m})$, запишемо $P_{s1}v$ $(s=\overline{1,m})$ у явному вигляді

$$P_{s1}v(x,\tau)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(x,0)\int\limits_{x}^{\tau}P_{j0}u(x,\eta)d\eta, & 0\leqslant\tau\leqslant x,\\ 0, & \tau\geqslant x.\end{cases}\tag{11}$$

Зазначимо, що функції Q_1u і P_1v мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Система рівнянь для визначення першого наближення $(\bar{u}_1,\bar{v}_1)$ регулярної частини асимптотики набуде вигляду

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{u}_{i1}}{\partial x}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\bar{u}_{j1}+\sum\limits_{k=1}^{m}b_{ik}(x,t)\bar{v}_{k1}+\bar{f}_{i1}(x,t), & i=\overline{1,n},\\ \dfrac{\partial\bar{v}_{s1}}{\partial t}=\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(x,t)\bar{u}_{j1}+\sum\limits_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(x,t)\bar{v}_{k1}+\bar{g}_{s1}(x,t), & s=\overline{1,m},\end{cases}\tag{12}$$

де $\bar{f}_{i1}(x,t)=f_{i1}(x,t)-\dfrac{\partial\bar{u}_{i0}(x,t)}{\partial t}$, $\bar{g}_{s1}(x,t)=g_{s1}(x,t)-\dfrac{\partial\bar{v}_{s0}(x,t)}{\partial x}$, $f_{i1}(x,t)$, $g_{s1}(x,t)$ – коефіцієнти при першому степені ε розвинення функцій f_i та g_s у ряд за степенями ε, відповідно. Крім того, $\bar{u}_{i1}$, $\bar{v}_{s1}$ ліквідують невязки, які вносять примежові шари $Q_{i1}u$, $P_{s1}v$ відповідно у крайову та початкові умови. Тому функції $\bar{u}_{i1}$, $\bar{v}_{s1}$ як розв'язки системи (12) повинні задовольняти умови

$$\begin{cases}\bar{u}_{i1}(0,t)=-Q_{i1}u(0,t), & i=\overline{1,n},\\ \bar{v}_{s1}(x,0)=-P_{s1}v(x,0), & s=\overline{1,m}.\end{cases}\tag{13}$$

Задача (12), (13), аналогічно як і (5), еквівалентна системі інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, тобто є однозначно розв'язною.

Для $Q_{s1}v$ отримаємо задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q_{s1}v}{\partial t}+\dfrac{\partial Q_{s1}v}{\partial\xi}=\sum\limits_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(0,t)Q_{k1}v+q_{s1}(\xi,t), & \xi>0,\ 0<t<T,\\ Q_{s1}v(\xi,0)=0, & \xi>0,\\ Q_{s1}v(0,t)=-\bar{v}_{s1}(0,t), & 0<t<T, \qquad s=\overline{1,m},\end{cases}\tag{14}$$

де $q_{s1}(\xi,t)=\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(0,t)Q_{j1}u+\xi\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial\sigma_{sk}(0,t)}{\partial x}Q_{k0}v$.

Оскільки система (14) неоднорідна, то для існування класичного розв'язку задачі необхідно, щоб виконувались не лише умови погодження нульового та першого порядків у кутовій точці (0,0), а й існували неперервні похідні першого порядку для функцій q_{s1}. Частинні похідні існують, оскільки функції $Q_{s0}v, Q_{s1}u$ – гладкі. Доведемо виконання умов погодження нульового порядку, тобто $Q_{s1}v(\xi,0)\big|_{\xi=0}=$

$Q_{s1}v(0,t)\big|_{t=0}$. Рівність нулю лівої частини випливає з умови (14), а для правої частини використаємо умови послідовно (13),(11)

$$0 = -\bar{v}_{s1}(0,t)\big|_{t=0} = -P_{s1}v(x,0)\big|_{x=0} = 0, \qquad s = \overline{1,m}.$$

Тому крайові умови системи (14) погоджені до неперервності в кутовій точці (0,0), що означає, що розв'язок задачі (14) у смузі $\xi \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$ неперервний. Щоб переконатися, що $Q_{s1}v$ у зазначеній смузі гладкі, доведемо, що $\forall s = \overline{1,m}$ виконуються рівності

$$\frac{\partial Q_{s1}v}{\partial t}\bigg|_{(0,0)} + \frac{\partial Q_{s1}v}{\partial \xi}\bigg|_{(0,0)} = \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,0)Q_{k1}v\bigg|_{(0,0)} + \overline{q}_{s1}\big|_{(0,0)}.$$

З умов (7),(10),(14) перейдемо до рівності

$$0 - \frac{\partial \bar{v}_{s1}}{\partial t}\bigg|_{(0,0)} = \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk} \cdot 0 + 0.$$

Тепер залишилось довести, що похідна $\bar{v}_{s1}$ за t дорівнює нулю. Для цього використаємо умову (12), з якої отримаємо

$$\frac{\partial \bar{v}_{s1}}{\partial t}\bigg|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(0,0)\bar{u}_{j1}\bigg|_{(0,0)} + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,0)\bar{v}_{k1}\bigg|_{(0,0)} + \bar{g}_{s1}\big|_{(0,0)} = 0,$$

де

$$\begin{cases} \bar{g}_{s1}(0,0) = g_{s1}(0,0) - \dfrac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial x} = 0, \\ \bar{v}_{s1}\big|_{(0,0)} = -P_{s1}v(0,0) = 0, \\ \bar{u}_{i1}\big|_{(0,0)} = -Q_{i1}u(0,0) = 0. \end{cases}$$

Оскільки, $\dfrac{\partial \bar{v}_{s1}}{\partial t}\bigg|_{(0,0)} = 0$, то всі умови для існування класичного (тобто гладкого) розв'язку для задачі (14) виконуються.

Для розв'язку $P_{i1}u$ $(i = \overline{1,n})$ задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{i1}u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P_{i1}u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,0)P_{j1}u + p_{i1}(x,\tau), & 0 < x \leqslant l,\ \tau > 0, \\ P_{i1}u(0,\tau) = 0, & \tau \geqslant 0, \\ P_{i1}u(x,0) = -\bar{u}_{i1}(x,0), & 0 \leqslant x \leqslant l \ \ (i = \overline{1,n}), \end{cases} \tag{15}$$

де $p_{i1}(x,\tau) = \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,0)P_{k1}v + \tau \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial a_{ij}(x,0)}{\partial t}P_{j0}u$, аналогічно, як для розв'язку задачі (14), можна повторити всі міркування і довести існування класичного розв'язку.

Отже, як випливає з побудови нульового та першого наближення, рекурентний процес послідовного визначення функцій асимптотичного розвинення розв'язку розщеплений, тому опишемо алгоритм визначення функцій наближення довільного порядку.

5. Побудова асимптотики довільного порядку. Повне асимптотичне розвинення розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1), (2) будуємо у вигляді

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim \sum\limits_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \big[\bar{u}_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau) + Q_{ih}u(\xi,t)\big], & i=\overline{1,n}, \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \sum\limits_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \big[\bar{v}_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau) + Q_{sh}v(\xi,t)\big], & s=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{16}$$

Опишемо послідовність, в якій визначаються функції правих частин (16), а також запишемо задачі, розв'язками яких ці функції є. Задачі отримуємо стандартним способом теорії сингулярних збурень, аналогічно як вище, тому пропустимо опис способу їх отримання.

Спочатку визначаємо функцію $Q_h u = (Q_{1h}u, \ldots, Q_{nh}u)$ $(\forall h \geqslant 1)$ як розв'язок задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{ih}u}{\partial \xi} = q_{ih}^u(\xi,t), & \xi > 0,\ 0 < t \leqslant T, \\ Q_{ih}u(\infty,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T \quad (i=\overline{1,n}), \end{cases} \tag{17}$$

де

$$q_{ih}^u(\xi,t) = \sum_{r=0}^{h-1} \frac{\xi^r}{r!}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^r a_{ij}}{\partial x^r}(0,t) Q_{j\,h-1-r}u + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^r b_{ik}}{\partial x^r}(0,t) Q_{k\,h-1-r}v\right] - \frac{\partial Q_{i\,h-2}u}{\partial t}$$

$(i=\overline{1,n})$, ξ – регуляризуюче перетворення, як вище. Функції $q_{ih}^u(\xi,t)$ $(i=\overline{1,n}$, $h \geqslant 0)$ є відомими неперервними і дорівнюють нулю під характеристикою $\xi = t$, що випливає з їхньої структури. Тому розв'язок $Q_{ih}u$ задачі (17) для кожного $h \geqslant 1$ та $i=\overline{1,n}$ запишемо в явному вигляді

$$Q_{ih}u(\xi,t) = \begin{cases} \int\limits_t^\xi q_{ih}^u(\zeta,t)\,d\zeta, & 0 \leqslant \xi \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & \xi \geqslant t. \end{cases} \tag{18}$$

Аналогічно формулюється задача для $P_{sh}v$ із умовою $P_{sh}(x,\infty) = 0$ $(s=\overline{1,m}$, $h \geqslant 1)$ і $P_{sh}v$ записуються у явному вигляді

$$P_{sh}v(x,\tau) = \begin{cases} \int\limits_x^\tau p_{sh}^v(x,\vartheta)d\vartheta, & 0 \leqslant \tau \leqslant x, \\ 0, & \tau \geqslant x, \end{cases} \tag{19}$$

де p_{sh}^v – права частина рівняння для $P_{sh}v$ і набуває вигляду

$$p_{sh}^v(x,\tau) = \sum_{r=0}^{h-1} \frac{\tau^r}{r!}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^r \gamma_{sj}}{\partial t^r}(x,0) P_{j\,h-1-r}u + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^r \sigma_{sk}}{\partial t^r}(x,0) P_{k\,h-1-r}v\right] - \frac{\partial P_{s\,h-2}v}{\partial x},\ s=\overline{1,m},\ h \geqslant 1.$$

Тут p^v_{sh} $(s=\overline{1,m},\ h\geqslant 0)$ – відомі неперервні функції, які дорівнюють нулеві над характеристикою $\tau = x$.

Зазначимо, що гладкість функцій $Q_{ih}u$ і $P_{sh}v$ $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m},\ h\geqslant 1)$, зокрема і на характеристиках $\xi = t$ та $x=\tau$ відповідно, випливає безпосередньо з їхньої структури.

Функції регулярної частини асимптотики $(\bar u_h, \bar v_h)$ порядку $h\geqslant 1$ є розв'язками такої задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar u_{ih}}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\bar u_{jh} + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)\bar v_{kh} + \bar f_{ih}(x,t), & (x,t)\in\Omega \ \ (i=\overline{1,n}),\\ \dfrac{\partial \bar v_{sh}}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)\bar u_{jh} + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)\bar v_{kh} + \bar g_{sh}(x,t), & (x,t)\in\Omega \ \ (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \bar u_{ih}(0,t) = -Q_{ih}u(0,t), \quad 0\leqslant t\leqslant T \ \ (i=\overline{1,n}),\\ \bar v_{sh}(x,0) = -P_{sh}v(x,0), \quad 0\leqslant x\leqslant l \ \ (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{21}$$

де $\bar f_{ih}(x,t) = f_{ih}(x,t) - \dfrac{\partial \bar u_{i\,h-1}}{\partial t}$, $\bar g_{sh}(x,t) = g_{sh}(x,t) - \dfrac{\partial \bar v_{s\,h-1}}{\partial x}$, а $f_{ih}(x,t)$, $g_{sh}(x,t)$ – коефіцієнти розвинення функцій f_i та g_s відповідно у ряд за степенями ε. Задача (20),(21) еквівалентна системі інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, для якої існує єдиний розв'язок.

Для $Q_{sh}v$ $(h\geqslant 1)$ одержимо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{sh}v}{\partial t} + \dfrac{\partial Q_{sh}v}{\partial \xi} = \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,t)Q_{kh}v + q^v_{sh}(\xi,t), & \xi>0,\ 0<t\leqslant 0,\\ Q_{sh}v(\xi,0) = 0, & \xi\geqslant 0,\\ Q_{sh}v(0,t) = -\bar v_{sh}(0,t), & 0\leqslant t\leqslant T \ \ (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{22}$$

де

$$q^v_{sh}(\xi,t) = \sum_{r=0}^{h}\frac{\xi^r}{r!}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^r\gamma_{sj}}{\partial x^r}(0,t)Q_{j\,h-r}u + \sum_{r=1}^{h}\frac{\xi^r}{r!}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^r\sigma_{sk}}{\partial x^r}(0,t)Q_{k\,h-r}v(\xi,t), \quad s=\overline{1,m}.$$

Аналогічно як у задачі (14), для доведення існування класичного розв'язку задачі (22) необхідно, щоб функція $q^v_{sh}(\xi,t)$ була гладкою й виконувались умови погодження нульового та першого порядків у кутовій точці (0,0). Частинні похідні функцій $q^v_{sh}(\xi,t)$ існують, оскільки функція є сумою гладких функцій. Перейдемо до перевірки виконання умов погодження, які випливають із (18) та (21)

$$0 = Q_{sh}v(\xi,0)\Big|_{\xi=0} = Q_{sh}v(0,t)\Big|_{t=0} = -v_{sh}(0,t)\Big|_{t=0},$$

$$0 = -v_{sh}(0,0) = P_{sh}v(0,0) = 0 \quad (s=\overline{1,m},\ h\geqslant 1).$$

Отже, крайові умови погоджені до неперервності в кутовій точці. Перевіримо чи початкові умови задовольняють систему (22) в точці (0,0), тобто

$$\frac{\partial Q_{sh}v}{\partial t}\bigg|_{(0,0)} + \frac{\partial Q_{sh}v}{\partial \xi}\bigg|_{(0,0)} \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,0) Q_{kh} v\bigg|_{(0,0)} + q_{sh}^{v}\bigg|_{(0,0)} \quad (s=\overline{1,m},\ h \geqslant 1),$$

або, використавши початкову та крайові умови задачі (22), їх можна записати у вигляді

$$-\frac{\partial \bar{v}_{sh}(0,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} \overset{?}{=} 0 \cdot \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,0) + q_{sh}^{v}(0,0) \quad (s=\overline{1,m},\ h \geqslant 1).$$

Права частина останнього співвідношення дорівнює нулеві, оскільки $q_{sh}^{v}(\xi,t)=0$ $(s=\overline{1,m},\ h \geqslant 1)$ при $\xi \geqslant t \geqslant 0$, що випливає з їхніх властивостей. Використавши друге рівняння (20) та умови (21), отримаємо

$$\frac{\partial \bar{v}_{sh}(0,0)}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(0,0) Q_{jh} u(0,t)\bigg|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,0) P_{kh} v(\xi,0)\bigg|_{\xi=0} + \bar{g}_{sh}(0,0),$$
$$s=\overline{1,m},\ h \geqslant 1.$$

На підставі (18) і (19) перші два доданки праворуч дорівнюють нулеві. Залишилось довести, що $\bar{g}_{sh}(x,t)$ у кутовій точці дорівнює нулю. Отож, з вигляду для $\bar{g}_{sh}$, умов (H_2), (21) можемо записати

$$\bar{g}_{sh}(0,0) = g_{sh}(0,0) - \frac{\partial \bar{v}_{s\,h-1}(0,0)}{\partial x} =$$
$$= 0 - \frac{\partial \bar{v}_{s\,h-1}(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial P_{s\,h-1}(0,0)}{\partial x} = 0, \quad s=\overline{1,m},\ h \geqslant 1.$$

Остання рівність правильна з огляду на те, що $P_{sh}v(x,\tau)=0$ для $\tau \geqslant x$, тому $\dfrac{\partial P_{sh}}{\partial x}(x,\tau)=0$, якщо $\tau \geqslant x$ $(s=\overline{1,m},\ h \geqslant 1)$. З неперервності випливає, що на характеристиці $\tau = x$ функція $P_{s\,h-1}v(x,\tau)$ також набуває нульових значень. Виконання умови погодження першого порядку в кутовій точці (0,0) забезпечує гладкість розв'язку задачі (22) в області $\xi > 0,\ 0 < t \leqslant T$. Крім того, зауважимо, що функції $Q_{sh}v$ $(s=\overline{1,m},\ h \geqslant 1)$ мають примежовий характер: відмінні від нуля в околі границі $x=0$ області Ω (крайова умова (22)) і при $\varepsilon \to 0$ характеристика $t=\xi$ рівняння (22) прямує до вертикального положення.

Для визначення наближень функції примежового шару $P_{ih}u$ в околі границі $t=0$ області Ω отримали крайову задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{ih}u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P_{ih}u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} P_{j\,h} u(x,\tau) + p_{ih}^{u}, & 0<x<l, \quad \tau>0, \\ P_{ih}u(0,\tau)=0, & \tau \geqslant 0, \\ P_{ih}u(x,0) = -\bar{u}_{ih}(x,0), & 0 \leqslant x \leqslant l, \quad i=\overline{1,n}, \quad h \geqslant 1, \end{cases} \tag{23}$$

де

$$p_{ih}^u(x,\tau) = \sum_{r=1}^{h} \frac{\tau^r}{r!} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^r a_{ij}}{\partial t^r}(x,0) P_{j\,h-r} u(x,\tau) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{h} \frac{\tau^r}{r!} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^r b_{ik}}{\partial t^r}(x,0) P_{k\,h-r} v(x,\tau), \quad i=\overline{1,n}, \quad h \geqslant 1.$$

Доведення існування класичного розв'язку $P_{ih}u$ для кожного $i=\overline{1,n}$ та $h \geqslant 1$ задачі (23) проводиться аналогічно як для задачі (22). Функції $P_{ih}u$ $(i=\overline{1,n},\ h\geqslant 1)$ відмінні від тотожного нуля нижче характеристики $\tau = x$ рівняння (23), яка при $\varepsilon \to 0$ прямує до горизонтального положення (початкова умова (23)). Це свідчить про примежовий характер поведінки $P_{ih}u$.

Отже, формальне асимптотичне наближення довільного порядку розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1), (2) побудовано. Перейдемо до обґрунтування отриманої асимптотики.

6. Оцінка залишкового члена. Нехай N – довільне натуральне число, $N>0$. Виділимо в асимптотиці (16) розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (1), (2) частинну суму порядку N. Позначивши через $R_{iN}^\varepsilon u = R_{iN}^\varepsilon u(x,t)$ $(i=\overline{1,n})$, $R_{sN}^\varepsilon v = R_{sN}^\varepsilon v(x,t)$ $(s=\overline{1,m})$ залишки асимптотичних розвинень відповідних компонент розв'язку задачі, (16) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \big[\bar{u}_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau) + Q_{ih}u(\xi,t)\big] + R_{iN}^\varepsilon u(x,t), \quad i=\overline{1,n}, \\ v_s^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \big[\bar{v}_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau) + Q_{sh}v(\xi,t)\big] + R_{sN}^\varepsilon v(x,t), \quad s=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{24}$$

Для того, щоб отримати задачі для залишку асимптотики $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$, підставимо (24) у систему (1), умови (2) та використаємо задачі для наближень асимптотичного розвинення. Отож, залишковий член асимптотики в області Ω є розв'язок системи

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial R_{iN}^\varepsilon u}{\partial t} + \dfrac{\partial R_{iN}^\varepsilon u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t) R_{jN}^\varepsilon u + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t) R_{kN}^\varepsilon v + \\ \qquad + \pi_i^u(x,t;\varepsilon), \quad i=\overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial R_{sN}^\varepsilon v}{\partial t} + \varepsilon \dfrac{\partial R_{sN}^\varepsilon v}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t) R_{jN}^\varepsilon u + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t) R_{kN}^\varepsilon v + \\ \qquad + \pi_s^v(x,t;\varepsilon), \quad s=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{25}$$

задовольняє початкові та крайові умови

$$\begin{aligned} &R_{iN}^\varepsilon u(x,0) = R_{iN}^\varepsilon u(0,t) = 0, \quad i=\overline{1,n}, \\ &R_{sN}^\varepsilon v(x,0) = R_{sN}^\varepsilon v(0,t) = 0, \quad s=\overline{1,m}, \end{aligned} \tag{26}$$

де π_i^u $(i=\overline{1,n})$ та π_s^v $(s=\overline{1,m})$ – відомі функції, такі що $\forall(x,t)\in\Omega$ справджується

$$\pi_i^u(x,t;\varepsilon)=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}),\qquad \pi_s^v(x,t;\varepsilon)=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}).$$

Наша мета – отримати рівномірну оцінку залишку асимптотики в $\overline{\Omega}$. Для цього введемо заміну у задачі (25), (26)

$$\rho_i^\varepsilon u(x,t)=R_{iN}^\varepsilon u(x,t)e^{-k(x+t)}\quad (i=\overline{1,n}),\quad \rho_s^\varepsilon v(x,t)=R_{sN}^\varepsilon v(x,t)e^{-k(x+t)}\quad (s=\overline{1,m}),$$

де k – деяка додатня стала. Тоді відповідно для $\rho_i^\varepsilon u$ і $\rho_s^\varepsilon v$ отримаємо задачу

$$\begin{cases}\varepsilon\dfrac{\partial\rho_i^\varepsilon u}{\partial t}+\dfrac{\partial\rho_i^\varepsilon u}{\partial x}=\tilde a_{ii}(x,t)\rho_i^\varepsilon u+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}(x,t)\rho_j^\varepsilon u+\sum\limits_{k=1}^{m}b_{ik}(x,t)\rho_k^\varepsilon v+\\ \qquad\qquad +\Pi_i^u(x,t;\varepsilon),\quad i=\overline{1,n},\\ \dfrac{\partial\rho_s^\varepsilon v}{\partial t}+\varepsilon\dfrac{\partial\rho_s^\varepsilon v}{\partial x}=\tilde\sigma_{ss}(x,t)\rho_s^\varepsilon v+\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(x,t)\rho_j^\varepsilon u+\sum\limits_{\substack{k=1\\ k\neq s}}^{m}\sigma_{sk}(x,t)\rho_k^\varepsilon v+\\ \qquad\qquad +\Pi_s^v(x,t;\varepsilon),\quad s=\overline{1,m},\end{cases}\tag{27}$$

$$\begin{cases}\rho_i^\varepsilon u(x,0)=\rho_i^\varepsilon u(0,t)=0,\quad i=\overline{1,n},\\ \rho_s^\varepsilon v(x,0)=\rho_s^\varepsilon v(0,t)=0,\quad s=\overline{1,m}.\end{cases}\tag{28}$$

Тут

$$\Pi_i^u(x,t;\varepsilon)=\pi_i^u(x,t;\varepsilon)e^{-k(x+t)}=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}),\ \tilde a_{ii}(x,t)=a_{ii}(x,t)-k(\varepsilon+1)\ (i=\overline{1,n}),$$
$$\Pi_s^v(x,t;\varepsilon)=\pi_s^v(x,t;\varepsilon)e^{-k(x+t)}=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}),\ \tilde\sigma_{ss}(x,t)=\sigma_{ss}(x,t)-k(\varepsilon+1)\ (s=\overline{1,m}).$$

Вибираємо k достатньо великим, щоб виконувались нерівності

$$\tilde a_{ii}(x,t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}(x,t)|+\sum_{k=1}^{m}|b_{ik}(x,t)|\leqslant -1\quad (i=\overline{1,n}),\tag{29}$$

$$\tilde\sigma_{ss}(x,t)+\sum_{j=1}^{n}|\gamma_{sj}(x,t)|+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq s}}^{m}|\sigma_{sk}(x,t)|\leqslant -1\quad (s=\overline{1,m}).\tag{30}$$

Припустимо, що кожна з функцій $|\rho_i^\varepsilon u|$ $(i=\overline{1,n})$ досягає свого максимуму в точці $T_i(x_i,t_i)\in\overline{\Omega}$, а функції $|\rho_s^\varepsilon v|$ $(s=\overline{1,m})$ – в точках $T_{n+s}(x_{n+s},t_{n+s})\in\overline{\Omega}$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що

$$\begin{aligned}&|\rho_1^\varepsilon u(T_1)|\geqslant|\rho_2^\varepsilon u(T_2)|\geqslant\ldots\geqslant|\rho_n^\varepsilon u(T_n)|\geqslant\\ &\qquad\geqslant|\rho_1^\varepsilon v(T_{n+1})|\geqslant|\rho_2^\varepsilon v(T_{n+2})|\geqslant\ldots\geqslant|\rho_m^\varepsilon v(T_{n+m})|.\end{aligned}\tag{31}$$

Розглянемо перше рівняння системи (27) в точці T_1 і перепишемо його у вигляді

$$\varepsilon\frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial t}\bigg|_{T_1}+\frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial x}\bigg|_{T_1}-\tilde a_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1)-\sum_{j=2}^n a_{1j}(T_1)\rho_j^\varepsilon u(T_1)-\\-\sum_{k=1}^m b_{1k}(T_1)\rho_k^\varepsilon v(T_1)=\Pi_1(T_1;\varepsilon).\qquad(32)$$

Нехай у точці T_1 функція $\rho_1^\varepsilon u$ набуває від'ємного мінімуму. Тоді в цій точці $\frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial t}\Big|_{T_1}\leqslant 0$, $\frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial x}\Big|_{T_1}\leqslant 0$ (строга нерівність можлива лише у випадку, якщо точка T_1 розташована на межі області $\overline{\Omega}$). Звідси та використовуючи (29) та (31), для правої частини (32) справджується оцінка

$$\varepsilon\frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial t}\bigg|_{T_1}+\frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial x}\bigg|_{T_1}-\tilde a_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1)-\sum_{j=2}^n a_{1j}(T_1)\rho_j^\varepsilon u(T_1)-\sum_{k=1}^m b_{1k}(T_1)\rho_k^\varepsilon v(T_1)\leqslant\\ \leqslant-\tilde a_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1)+\sum_{j=2}^n|a_{1j}(T_1)||\rho_j^\varepsilon u(T_1)|+\sum_{k=1}^m|b_{1k}(T_1)||\rho_k^\varepsilon v(T_1)|\leqslant\\ \leqslant-\left(\tilde a_{11}(T_1)+\sum_{j=2}^n|a_{1j}(T_1)|+\sum_{k=1}^m|b_{1k}(T_1)|\right)\rho_1^\varepsilon u(T_1)\leqslant\rho_1^\varepsilon u(T_1).$$

Отож, права частина (32) є величиною порядку ε^{N+1}, а ліва в точці T_1 не перевищує $\rho_1^\varepsilon u(T_1)$. Позаяк $|\rho_1^\varepsilon u(T_1)|=\max\limits_{\overline{\Omega}}|\rho_1^\varepsilon u(x,t)|=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$, то з (31) отримуємо

$$|\rho_2^\varepsilon u(T_2)|=\max_{\overline{\Omega}}|\rho_2^\varepsilon u(x,t)|=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}),\quad\ldots,\quad\rho_m^\varepsilon v(T_m)|=\max_{\overline{\Omega}}|\rho_m^\varepsilon v(x,t)|=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1}).$$

Звідки випливає

$$\rho_i^\varepsilon u(x,t)=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})\quad(i=\overline{1,n}),\quad\rho_s^\varepsilon v(x,t)=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})\quad(s=\overline{1,m})\quad\forall(x,t)\in\overline{\Omega}.$$

Отже, врахувавши введену заміну, отримуємо бажану оцінку залишкового члена $(R_N^\varepsilon u,R_N^\varepsilon v)$ асимптотичного розвинення (24) розв'язку $(u^\varepsilon,v^\varepsilon)$ задачі (1), (2)

$$R_{iN}^\varepsilon u(x,t)=\rho_i^\varepsilon u(x,t)e^{k(x+t)}=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})\ \ (i=\overline{1,n}),\\ R_{sN}^\varepsilon v(x,t)=\rho_s^\varepsilon v(x,t)e^{k(x+t)}=\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})\ \ (s=\overline{1,m}),\ \ (x,t)\in\overline{\Omega}.$$

Аналогічні міркування у випадку додатного максимуму.

Отриманий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. *Нехай N – довільне натуральне число. Припустимо, що виконуються умови:*

(H_1) a_{ij}, b_{ik}, γ_{sj}, $\sigma_{sk}\in C^{(N+2)}(\overline{\Omega})$, f_i, $g_s\in C^{(N+2)}(\overline{\Omega}\times R_+)$ $(i,j=\overline{1,n},\ s,k=\overline{1,m})$;

(H_2) $f_i(0,0;\varepsilon)=0$ $(i=\overline{1,n})$, $g_s(0,0;\varepsilon)=0$ $(s=\overline{1,m})$.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78

Тоді розв'язок $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ *задачі* (1), (2) *допускає асимптотичне розвинення вигляду*

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \big[\bar{u}_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau) + Q_{ih}u(\xi,t)\big] + R_{iN}^\varepsilon u(x,t), \quad i = \overline{1,n}, \\ v_s^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \big[\bar{v}_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau) + Q_{sh}v(\xi,t)\big] + R_{sN}^\varepsilon v(x,t), \quad s = \overline{1,m}, \end{cases}$$

де функції $(\bar{u}_h, \bar{v}_h)$ *регулярної частини асимптотики є розв'язками задач* (20),(21), *функції примежових шарів* $(P_h u, P_h v)$ *в околі* $t = 0$ *та* $(Q_h u, Q_h v)$ *в околі* $x = 0$ *визначаються як розв'язки задач* (23), (17), (22), *відповідно. Для залишкового члена* $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$ *асимптотичного розвинення правильні оцінки*

$$|R_{iN}^\varepsilon u(x,t)| \leqslant C_{1i}\varepsilon^{N+1}, \quad |R_{sN}^\varepsilon v(x,t)| \leqslant C_{2s}\varepsilon^{N+1}, \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega},$$

де C_{1i}, C_{2s} – *незалежні від* ε *сталі* ($i = \overline{1,n},\ s = \overline{1,m}$).

Список використаної літератури

1. *Аболиня В.Э.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости / *В.Э. Аболиня, А.Д. Мышкис* // Матем. сб. – 1960.– Т. 50, № 4. – С. 423-442.
2. *Кирилич В.М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / *В.М. Кирилич, А.М. Филимонов* // Матем. студії. – 2008. – Т. 30, № 1. – С. 42-60.
3. *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / *А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов.* – М: Высш. школа, 1990. – 208 с.
4. *Мауленов О.* О смешанной задаче для полулинейной гиперборлической системы на отрезке с малым параметром при производных по времени (часть III) / *О. Мауленов, А.Д. Мышкис* // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1985. – № 1. – С. 65-68.
5. *Бутузов В.Ф.* Об одной сингулярно возмущенной системе уравнений в частных производных первого порядка / *В.Ф. Бутузов, А.Ф. Каращук* // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57, Вып. 3. – С. 338-349.

Стаття: надійшла до редакції 21.06.2013
доопрацьована 11.10.2013
прийнята до друку 16.10.2013

PROBLEM WITH A SMALL PARAMETER IN THE DERIVATIVES OF THE HYPERBOLIC SYSTEM OF EQUATIONS OF THE FIRST ORDER

Oksana Flyud

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: oflyud@yahoo.com

We consider the initial-boundary value problem for a system of $n+m$ singularly perturbed linear partial differential equations of the first order in the plane, the small parameter is a multiplier for various partial derivatives. Constructed and proved asymptotic expansion of arbitrary order solution with the powers of a small parameter.

Key words: hyperbolic system of singularly perturbed boundary value problem, asymptotic expansion solution, the boundary layer.

ЗАДАЧА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Оксана Флюд

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: oflyud@yahoo.com

Рассмотрено начально-краевую задачу для системы $n+m$ сингулярно возмущенных линейных уравнений с частными производными первого порядка на плоскости, причем малый параметр является множителем при различных частных производных. Построено и обосновано асимптотическое разложение произвольного порядка решения по степеням малого параметра.

Ключевые слова: гиперболическая система, сингулярно возмущенная краевая задача, асимптотическое разложение решения, пограничный слой.