ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 97–110
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 97–110

УДК УДК 517.95

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОБЕРНЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

Андрій ЛОПУШАНСЬКИЙ

Інститут математики, Ряшівський університет,
ал. Рейтана, 16 А, Ряшів, 35-959, Польща
e-mail: alopushanskyj@gmail.com

Доведено існування та єдиність розв'язку (u, a) крайової задачі

$$D_t^\beta u - a(t)\Delta u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T], \quad \Omega_0 \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geq 2,$$

$$a(t) > 0, \ \ t \in [0,T],$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega_0 \times [0,T], \quad a(t)\frac{\partial u(x_0,t)}{\partial \nu_{x_0}} = F_1(t), \quad t \in [0,T],$$

$$u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}_0$$

з регуляризованою похідною $D_t^\beta u$ порядку $\beta \in (0,1)$ та заданою точкою $x_0 \in \partial\Omega_0$.

Ключові слова: похідна дробового порядку, обернена крайова задача, вектор-функція Гріна, операторне рівняння.

1. Вступ. Умови класичної розв'язності першої крайової задачі для рівняння

$$D_t^\beta u(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = F_0(x,t), \quad a^2 = const > 0$$

з регуляризованою похідною ([1], [2]) функції u порядку $\beta \in (0;1)$

$$D_t^\beta u(x,t) = \tfrac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int\limits_0^t \tfrac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau = \tfrac{1}{\Gamma(1-\beta)} \Big[\tfrac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \tfrac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \tfrac{u(x,0)}{t^\beta} \Big]$$

одержані в [3], [4]. Розв'язки побудовано у вигляді рядів Фур'є за власними функціями відповідних задач Штурма-Ліувілля.

В [5]-[8] було доведено теореми існування та єдиності, а також одержано зображення за допомогою функції Гріна класичних розв'язків задач Коші для рівняння

$$D_t^\beta u(x,t) = A(x,D)u(x,t), \quad (x,t) \in R^N \times (0,T]$$

з регуляризованою похідною функції u порядку $\beta \in (m-1;m)$, $m = 1,2,\ldots,$ де $A(x,D)$ – еліптичний диференціальний оператор другого порядку з гладкими (залежними від просторової змінної $x \in \mathbb{R}^n$) коефіцієнтами та $\beta \in (0,1)$ у [5]-[7],

$A(x,D) = \Delta$ у [8], у [9], [10] одержано зображення за допомогою функції Гріна класичних розв'язків задач Коші у випадку $A(x,D) = -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$.

Ми доводимо існування розв'язку (u,a) оберненої крайової задачі

$$D^\beta u_t - a(t)\Delta u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T], \tag{1}$$

$$a(t) > 0, \;\; t \in [0,T],$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega_0 \times [0,T], \tag{2}$$

$$a(t)\frac{\partial u(x_0,t)}{\partial \nu_{x_0}} = F_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}_0, \tag{4}$$

де Ω_0 – обмежена область в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ з гладкою межею $\Omega_1 = \partial\Omega$; x_0 – довільно задана точка на Ω_1; ν_x – орт внутрішньої нормалі до поверхні Ω_1 в точці $x \in \Omega_1$; F_0-F_2 – задані функції.

Зауважимо, що у випадку $\beta = 1$, $N = 1$ такого типу обернені крайові коефіцієнтні задачі вивчали у [11]-[12], де доведено теореми існування та єдиності.

2. Вектор-функція Гріна першої крайової задачі. Надалі використовуємо позначення

$Q_i = \Omega_i \times (0,T]$, $i = 0,1$,

$\mathfrak{D}(R^N)$ – простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в R^N ([13], с. 13), $i = 0,1,2$,

$\mathfrak{D}(\overline{Q}_0) = \{v \in C^\infty(\overline{Q}_0) : (\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0, \quad k = 0,1,\dots\}$,

$\mathfrak{D}'(R^N)$ та $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $\mathfrak{D}(R^N)$ та $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$,

(f,φ) – значення $f \in \mathfrak{D}'(R^N)$ на основній функції $\varphi \in \mathfrak{D}(R^N)$, а також значення $f \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ на $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$.

Позначаємо через $\hat{*}$ операцію згортки узагальненої функції g та основної функції φ ([13], с. 111): $(g\hat{*}\varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi))$, через $*$ позначаємо операцію згортки узагальнених функцій f і g, тобто узагальнену функцію $f * g$

$$(f * g, \varphi) = (f, g\hat{*}\varphi) \text{ для кожної основної функції } \varphi.$$

Використовуємо функцію $f_\lambda \in \mathfrak{D}'_+(R) = \{f \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ при } t < 0\}$:

$$f_\lambda(t) = \tfrac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0 \quad \text{і} \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \leqslant 0,$$

де $\theta(t)$ – одинична функція Хевісайда. Правильні такі співвідношення:

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}, \quad f_\lambda \hat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}.$$

Нехай

$C(Q_0)$, $C(\overline{Q}_0)$, $C[0,T]$ – класи неперервних відповідно в Q_0, $\overline{Q}_0$ та на $[0,T]$ функцій,
$C_+[0,T]$ – клас неперервних на $[0,T]$ та обмежених знизу додатним числом функцій,
$C_\beta(0,T] = \{v \in C(0,T] \mid \; t^\beta v \in C[0,T], \;\; v_0 = \inf\limits_{(t)\in Q} t^\beta |v(t)| > 0\}$,

$C_{2,\beta}(Q_0)$ – клас неперервних функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}_0$, які дорівнюють нулю при $t \geq T$ та з неперервними функціями Δv, $D_t^\beta v$ в Q_0.

Нагадаємо, що похідна $v_t^{(\beta)}(x,t)$ Рімана-Ліувілля функції $v(x,t)$ порядку $\beta > 0$ визначається формулою

$$v_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t),$$

$$D_t^\beta v(x,t) = v_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t)v(x,0) \text{ для } v \in C_{2,\beta}(Q_0),\ (x,t) \in Q_0, \quad \beta \in (0;1).$$

Означення 1. *Розв'язком задачі (1)-(4) називається пара функцій*

$$(u,a) \in \mathfrak{M}_\beta := C_{2,\beta}(Q_0)) \times C_+[0,T],$$

що задовольняє рівняння (1) в Q_0 та умови (2)-(4).

Нехай
$X(\overline{Q}_0) = \{v \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0) \ : \ v(x,t) = 0, \ x \in \Omega_1, \ t \in [0,T]\}.$

Введемо оператори

$L: \quad (Lv)(x,t) \equiv v_t^{(\beta)}(x,t) - a(t)\Delta v(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \qquad v \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0),$

$L^{reg}: \ (L^{reg}v)(x,t) \equiv D_t^\beta v(x,t) - a(t)\Delta v(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \quad v \in C_{2,\beta}(Q_0).$

$\hat{L}: \quad (\hat{L}v)(x,t) \equiv f_{-\beta}\hat{*}v(x,t) - a(t)\Delta v(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \quad v \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0).$

Як у [15] доводимо, що для $v \in C^{2,\beta}(Q_0)$, $\psi \in X(\bar{Q}_0)$ правильна формула Гріна

$$\int\limits_{Q_0} v(y,\tau)(\hat{L}\psi)(y,\tau)dyd\tau = \int\limits_{Q_0} (L^{reg}v)(y,\tau)\psi(y,\tau)dyd\tau + \tag{5}$$

$$+ \int\limits_{Q_1} v(y,\tau)\frac{\partial\psi(y,\tau)}{\partial\nu}dSd\tau + \int\limits_{\Omega_0} v(y,0)dy\int\limits_0^T f_{1-\beta}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau.$$

Означення 2. *Вектор-функція $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y,\tau), G_2(x,t,y))$ така, що при достатньо гладких g_0, g_1, g_2 функція*

$$v(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)g_0(y,\tau)dy + \tag{6}$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_1} G_1(x,t,y,\tau)g_1(y,\tau)dS_y + \int\limits_{\Omega} G_2(x,t,y)g_3(y)dy, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0$$

є класичним (класу $C_{2,\beta}(Q_0)$) розв'язком першої крайової задачі

$$D^\beta u_t - a(t)\Delta u = g_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T], \tag{7}$$

$$u(x,t) = g_1(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega_0 \times [0,T], \tag{8}$$

$$u(x,0) = g_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}_0 \tag{9}$$

(з відомою функцією $a(t)$), називається вектор-функцією Гріна цієї задачі.

З означення випливає, що

$(LG_0)(x,t,y,\tau) = \delta(x-y, t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau) \in Q_0$ де δ – дельта-функція Дірака,
$(L^{reg}G_2)(x,t,y) = 0, \quad (x,t) \in Q_0, y \in \Omega_0, \quad G_2(x,0,y) = \delta(x-y), \quad x,y \in \Omega_0.$

Лема 1. $G_1(x,t,y,\tau) = \frac{\partial G_0(x,t,y,\tau)}{\partial \nu_y}, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0,\ (y,\tau) \in Q_1,$

$$G_2(x,t,y) = f_{1-\beta}(t) * G_0(x,t,y,0), \quad (x,t) \in Q_0,\ y \in \Omega_0.$$

Лема доводиться за схемою [15].

Лема 2. *При $a \in C_+[0,T]$ вектор-функція Гріна першої крайової задачі (7)-(9) існує.*

Доведення. Враховуючи лему 1, достатньо довести існування головної функції Гріна $G_0(x,t,y,\tau)$. Як у [5]-[7] для задачі Коші та у [16] для загальних параболічних крайових задач, існування $G_0(x,t,y,\tau)$ можна довести методом Леві. Її існування можна також довести методом рядів Фур'є. Справді, вибираючи у формулі (5) за функції $\psi_k \in X(\overline{Q}_0)$ розв'язки рівнянь $(\hat{L}\psi_k)(y,t) = \varphi_k(x,t,y,\tau)$, де послідовність $\varphi_k(x,t,y,\tau)$ $(k \to \infty)$ є δ-видною, із формули (5) після граничного переходу при $k \to \infty$ одержуємо зображення (6) розв'язку задачі (7)-(9), де $G_0(x,t,y,\tau)$ (границя послідовності ψ_k у $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^N)$) як функція (y,τ) є розв'язком задачі

$$(\hat{L}_{y,\tau}G_0)(x,t,y,\tau) = \delta(x-y,t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau) \in Q_0, \tag{10}$$

$$G_0|_{y \in \overline{Q}_1} = 0, \qquad G_0(x,t,y,T) = 0.$$

Шукаємо G_0 у вигляді

$$G_0(x,t,y,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m(x,t,\tau)\omega_m(y), \tag{11}$$

де $\omega_m(y)$ – ортонормовані власні функції стаціонарної крайової задачі

$$\Delta\omega_m + \lambda_m\omega_m = 0, \quad y \in \Omega_0, \quad \omega|_{\Omega_1} = 0.$$

Підставляючи (11) у рівняння задачі (10), матимемо

$$\sum_{m=1}^{\infty} \big[f_{-\beta}(\tau)\hat{*}S_m(x,t,\tau) + \lambda_m a(\tau)S_m(x,t,\tau)\big]\omega_m(y) = \sum_{m=1}^{\infty} (\delta(x-y),\omega_m(y))\omega_m(y)\delta(t-\tau),$$

звідки, враховуючи, що $(\delta(x-y),\omega_m(y)) = \omega_m(x)$, одержуємо задачі для функцій $S_m(x,t,\tau)$:

$$f_{-\beta}(\tau)\hat{*}S_m(x,t,\tau) + \lambda_m a(\tau)S_m(x,t,\tau) = \omega_m(x)\delta(t-\tau),\ S_m(x,t,T) = 0,\ m = 1,2,\ldots \tag{12}$$

Кожна з задач (12) зводиться до лінійного інтегрального рівняння Вольтерра

$$S_m(x,t,\tau) + \lambda_m a(\tau)f_\beta(\tau)\hat{*}S_m(x,t,\tau) = f_\beta(t-\tau)\omega_m(x). \tag{13}$$

Методом послідовних наближень знаходимо розв'язок рівняння (13) у вигляді рівномірно збіжного при $t > \tau$ ряду

$$S_m(x,t,\tau) = \Big[f_\beta(t-\tau) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda_m)^p \underbrace{a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\hat{*}\Big(a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\hat{*}(\ldots a(\tau)f_\beta(\tau)\hat{*}}_{p} f_\beta(t-\tau))\Big)\Big)\Big)\Big]\omega_m(x).$$

Зокрема, у випадку $a(\tau) = a = const > 0$ матимемо

$$S_m(x,t,\tau) = \sum_{p=0}^{\infty}(-a\lambda_m)^p f_{(p+1)\beta}(t-\tau)\omega_m(x) =$$

$$= (t-\tau)^{\beta-1}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{[-a\lambda_m(t-\tau)^\beta]^p}{\Gamma(p\beta+\beta)}\omega_m(x) = (t-\tau)^{\beta-1}E_\beta(-a\lambda_m(t-\tau)^\beta)\omega_m(x),$$

де $\Gamma(z)$ – гамма-функція, $E_\beta(z) = E_{\beta^{-1}}(z,\beta) = \sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{z^p}{\Gamma(p\beta+\beta)}$ – функція Міттаг-Лефлера [2], що має оцінку $E_\beta(z) \le \frac{C}{|z|}$, $\quad C = C(\beta)$ – певна додатна стала. Тоді у випадку $a(\tau) = a = const > 0$ мажорантним для ряду (11) буде рівномірно збіжний ряд

$$\frac{C}{a(t-\tau)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|\omega_m(x)\omega_m(y)|}{\lambda_m}, \quad x,y\in[0,l], \quad 0\le\tau<t\le T.$$

В загальному випадку, оцінивши різницю двох сусідніх доданків у виразі для $S_m(x,t,\tau)$

$$\lambda_m^{2k}\underbrace{a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\hat{*}\Big(a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\hat{*}(\ldots a(\tau)f_\beta(\tau)\hat{*}}_{2k}\, f_\beta(t-\tau))\Big)\Big)\Big)-$$

$$-\lambda_m^{2k+1}\underbrace{a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\hat{*}\Big(a(\tau)\Big(f_\beta(\tau)\hat{*}(\ldots a(\tau)f_\beta(\tau)\hat{*}}_{2k+1}\, f_\beta(t-\tau))\Big)\Big)\Big) \le$$

$$\le \lambda_m^{2k}\Big[A_0^{2k}f_{(2k+1)\beta}(t-\tau) - \lambda_m a_0^{2k+1}f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)\Big]$$

$$\le \lambda_m^{2k}\Big[c^{2k}f_{(2k+1)\beta}(t-\tau) - \lambda_m c^{2k+1}f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)\Big]$$

при деякому $c < a_0 = \min\limits_{t\in[0,T]} a(t) \le A_0 = \max\limits_{t\in[0,T]} a(t)$, що можливо при

$$\lambda_m \ge \frac{A_0^{2k}-c^{2k}}{a_0^{2k}-c^{2k}}\cdot\frac{f_{(2k+1)\beta}(t-\tau)}{f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)} = A_0c^2\frac{1-(\frac{c}{A_0})^{2k}}{(\frac{a_0}{A_0})^{2k+1}-(\frac{c}{A_0})^{2k+1}}\cdot\frac{\Gamma(2k\beta+\beta)}{\Gamma(2k\beta+2\beta)(t-\tau)^\beta}$$

або

$$\lambda_m(t-\tau)^\beta \ge A_0c^2(2k\beta)^{-\beta}\frac{1-(\frac{c}{A_0})^{2k}}{(\frac{a_0}{A_0})^{2k+1}-(\frac{c}{A_0})^{2k+1}}$$

при великих k (тоді $\frac{\Gamma(2k\beta+\beta)}{\Gamma(2k\beta+2\beta)} = O((2k\beta)^{-\beta})$ [14], с. 67), одержуємо

$$|S_m(x,t,\tau)| \le (t-\tau)^{\beta-1}E_\beta(-c\lambda_m(t-\tau)^\beta)|\omega_m(x)|.$$

Отже, при $a \in C_+[0,T]$ матимемо аналогічну до випадку сталої функції a оцінку ряду (11) і головна функція Гріна задачі (7)-(9) існує. $\square$

Лема 3. *Правильні оцінки*

$$|G_i(x,t+\Delta t,y,\tau)-G_i(x,t,y,\tau)| \le A_i(x,t,y,\tau)|\Delta t|^\gamma \quad \forall (x,t)\in \overline{Q}_0, (y,\tau)\in \overline{Q}_i, \quad (14)$$

$$\left|\frac{\partial G_i(x,t+\Delta t,y)}{\partial \nu_x}-\frac{\partial G_i(x,t,y)}{\partial \nu_x}\right| \le B_i(x,t,y,\tau)|\Delta t|^\gamma \ \forall (x,t)\in \overline{Q}_1, (y,\tau)\in \overline{Q}_i, \quad (15)$$

$i=0,2$, де $0<\gamma<\beta$, невід'ємні функції $A_i(x,t,y,\tau)$ та $B_i(x,t,y,\tau)$ мають такі самі оцінки, як $G_i(x,t,y,\tau)$ та $\frac{\partial G_i(x,t,y)}{\partial \nu_x}$, $i=0,2$ відповідно з заміною β на $\beta-\gamma$.

Доведення. Використовуючи зображення (11), матимемо

$$G_0(x,t+\Delta t,y,\tau)-G_0(x,t,y,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}[S_m(x,t+\Delta t,\tau)-S_m(x,t,\tau)]\omega_m(y). \quad (16)$$

Для функцій

$$Z_m(x,t,y,\tau,\Delta t)=S_m(x,t+\Delta t,y,\tau)-S_m(x,t,y,\tau)$$

одержуємо інтегральні рівняння вигляду (13) із правими частинами

$$[f_\beta(t+\Delta t-\tau)-f_\beta(t-\tau)]\omega_m(x).$$

Оскільки

$$f_\beta(t+\Delta t-\tau)-f_\beta(t-\tau)=f_{-\lambda}(t)*[f_{\beta+\lambda}(t+\Delta t-\tau)-f_{\beta+\lambda}(t-\tau)],$$

при $1-\beta<\lambda<1$ отримаємо $\beta+\lambda-1=\gamma\in(0,1)$ та $\beta-\gamma=1-\lambda>0$,

$$|(t+\Delta t-\tau)^\gamma-(t-\tau)^\gamma|=(t-\tau)^\gamma|(1+\frac{\Delta t}{t-\tau})^\gamma-1|\le|\Delta t|^\gamma,$$

то одержуємо

$$|f_\beta(t+\Delta t-\tau)-f_\beta(t-\tau)|\le f_{1-\lambda}(t-\tau)|\Delta t|^\gamma=f_{\beta-\gamma}(t-\tau)|\Delta t|^\gamma.$$

Як при доведенні леми 2, знаходимо функції $Z_m(x,t,y,\tau,\Delta t)$, що матимуть такі самі оцінки, як розв'язки рівнянь (13) із заміною β на $\beta-\gamma>0$ та множником $|\Delta t|^\gamma$. Враховуючи зображення (16), одержуємо оцінку (14) при $i=0$, де функція A_0 має таку саму оцінку, як $G_0(x,t,y,\tau)$, але з заміною β на $\beta-\gamma$. Інші оцінки в лемі одержуємо з таких самих міркувань та враховуючи лему 1. □

Зауваження 1. Для загальних параболічних крайових задач (у нашому випадку при $\beta=1$) оцінки вигляду (14), (15), які отримав Івасишен С.Д. (див. [16]), у випадку задачі Коші для $N=1$ ($\Omega_0=\mathbb{R}$) – у [6] (див. також [7]).

Використовуємо далі позначення

$G_i(x,t,y,\tau,a)$ замість $G_i(x,t,y,\tau)$, $i=0,1$, $\quad G_2(x,t,y,a)$ замість $G_2(x,t,y)$.

Із принципу максимуму випливає додатність функцій $G_0(x,t,y,\tau,a)$ і $G_2(x,t,y,a)$ при $(x,t),(y,\tau)\in Q_0$ та $\frac{\partial G_0(x,t,y,\tau,a)}{\partial \nu_x}$ і $\frac{\partial G_2(x,t,y,a)}{\partial \nu_x}$ при $(x,t)\in Q_1$, $(y,\tau)\in Q_0$.

Згідно з методом Леві, для функцій $G_0(x,t,y,\tau,a)$ та $G_2(x,t,y,a)$ правильні такі самі оцінки, як для параметриксів $G(x-y,t-\tau,a(\tau))$, $f_{1-\beta}(t)*G(x-y,t,a(0))$, відповідно.

Із результатів [10] випливає, що фундаментальна функція $G(x,t,a)$ оператора вигляду L зі сталим коефіцієнтом $a>0$ набуває вигляду

$$G(x,t,a)=\frac{\pi^{N/2}t^{\beta-1}}{|x|^N}H^{2,0}_{1,2}\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\Big|\begin{matrix}(\beta,\beta) & \\ (1,1) & (N/2,1)\end{matrix}\right), \tag{17}$$

де $H^{m,n}_{p,q}\left(z\Big|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)$–H-функція Фокса ([17]).

Використовуючи властивості H-функцій Фокса, як у [15], знаходимо оцінки

$$|G(x,t,a)|\le\frac{C_0^*}{at|x|^{N-2}},$$

$$\Big|\frac{\partial G(x,t,a)}{\partial\nu_x}\Big|\le\frac{C_1^*}{at|x|^{N-1}},\quad |f_{1-\beta}(t)*G(x,t,a)(x,t,a)|\le\frac{C_2^*}{at^\beta|x|^{N-2}},$$

$$\Big|\frac{\partial\big(f_{1-\beta}(t)*G(x,t,a)\big)}{\partial\nu_{x_0}}\Big|\le\frac{C_3^*}{at^\beta|x|^{N-1}},\quad |x|^2<4at^\beta,\quad N\ge 3,$$

$$|G(x,t,a)|\le\frac{C_0^*}{at}ln\frac{4at^{\beta/2}}{|x|},\quad \Big|\frac{\partial G(x,t,a)}{\partial\nu_x}\Big|\le\frac{C_1^*}{at|x|}ln\frac{4at^{\beta/2}}{|x|},$$

$$|f_{1-\beta}(t)*G(x,t,a)|\le\frac{C_2^*}{at^\beta}ln\frac{4at^{\beta/2}}{|x|},$$

$$\Big|\frac{\partial\big(f_{1-\beta}(t)*G(x,t,a)\big)}{\partial\nu_x}\Big|\le\frac{C_3^*}{at^\beta|x|}ln\frac{4at^{\beta/2}}{|x|},\quad |x|^2<4at^\beta,\quad N=2,$$

$$|G(x,t,a)|\le\frac{\hat C_0t^{\beta-1}}{|x|^N}\cdot\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{1+\frac{N}{2(2-\beta)}}e^{-c\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}\le\frac{C_0}{t^{1-\beta}|x|^N},$$

$$\Big|\frac{\partial G(x,t,a)}{\partial\nu_x}\Big|\le\frac{\hat C_1t^{\beta-1}}{|x|^{N+1}}\cdot\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{1+\frac{N}{2(2-\beta)}}e^{-c\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}\le\frac{C_1}{t^{1-\beta}|x|^{N+1}},$$

$$|f_{1-\beta}(t)*G(x,t,a)|\le\frac{\hat C_2}{|x|^N}\cdot\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{\frac{N}{2(2-\beta)}}e^{-c\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}\le\frac{C_2}{|x|^N},$$

$$\Big|\frac{\partial\big(f_{1-\beta}(t)*G(x,t,a)\big)}{\partial\nu_x}\Big|\le\frac{\hat C_3}{|x|^{N+1}}\cdot\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{\frac{N+2}{2(2-\beta)}}e^{-c\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}\le\frac{C_3}{|x|^{N+1}},\ |x|^2>4at^\beta,$$

$c,C_i^*,C_i,\quad i=0,1,2,3$ – певні додатні сталі.

Зауваження 2. Насправді, оцінки в лемі 3 правильні без заміни β на $\beta-\gamma$. Це можна довести, використавши наявність експоненти в асимптотиці функцій $G_i(x,t,y,\tau,a)$ та $\frac{\partial G_i(x,t,y,\tau)}{\partial\nu_x}$ у випадку малих значень $t-\tau$, $i=0,2$.

3. Зведення задачі до операторного рівняння. Використовуватимемо оператори Гріна

$$(\mathfrak{G}_0\varphi)(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)\varphi(y,\tau)dy, \quad v \in D(Q_0),$$
$$(\mathfrak{G}_2\varphi)(x,t) = \int\limits_{\Omega_2} G_2(x,t,y)\varphi(y)dy, \quad v \in D(Q_2).$$

У [5]-[10] досліджено властивості таких операторів у випадку $\Omega_0 = \mathbb{R}^N$.

Нехай виконуються умови:

(F0) $F_0 \in C(Q_0)$, обмежена та для кожного $t \in (0,T]$ локально гельдерова за змінними x функція, $||F_0||_{C(Q_0)} := \sup\limits_{(x,t)\in Q_0} |F_0(x,t)|$,

$(F1)$ $F_1 \in C_{\beta/2}(0,T]$ та позначаємо $\inf\limits_{t\in(0,T]} t^{\beta/2}|F_1(t)| = b_0$ (> 0),

(F2) $F_2 \in C(\overline{\Omega}_0)$, $F_2|_{\Omega_1} = 0$, $||F_2||_{C(\Omega_0)} := \sup\limits_{x\in\Omega_0} |F_2(x)| > 0$,

(F) $F_0(x,t) > 0$, $(x,t) \in Q_0$, $\quad F_1(t) > 0$, $\quad t \in (0,T]$, $\quad F_2(x) \geq 0$, $x \in \overline{\Omega}_0$ або всі ці функції від'ємні, відповідно, в $Q_0, (0,T], \Omega_0$.

Теорема 1. *За умов (F0), (F2) при кожній відомій $a \in C_+[0,T]$ існує единий розв'язок $u \in C_{2,\beta}(Q_0)$ задачі (1), (2), (4), він визначений формулою*

$$u(x,t) = \big(\mathfrak{G}_0F_0\big)(x,t) + \big(\mathfrak{G}_2F_2\big)(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}_0. \tag{18}$$

Теорема доводиться так само, як у [5]-[7] із використанням оцінок компонент вектор-функції Гріна та їхніх похідних. Єдиність розв'язку задачі є наслідком принципу максимуму [3].

Підставимо функцію (18) в умову (3). Одержуємо

$$a(t)\Big[\frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\big(\mathfrak{G}_0F_0\big)(x_0,t) + \frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\big(\mathfrak{G}_2F_2\big)(x_0,t)\Big] = F_1(t), \quad t \in [0,T]$$

або

$$h(t) = t^{\beta/2}\Big[\frac{\partial}{\partial\nu_x}\big(\mathfrak{G}_0F_0\big)(x_0,t) + \frac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\big(\mathfrak{G}_2F_2\big)(x_0,t)\Big] \cdot [t^{\beta/2}F_1(t)]^{-1}, \quad t \in [0,T], \tag{19}$$

де $h(t) = [a(t)]^{-1}$.

Результатом теореми 1 та додатності функцій $\frac{\partial G_0(x,t,y,\tau)}{\partial\nu_x}$, $\frac{\partial G_2(x,t,y)}{\partial\nu_x}$ при $(x,t)\in Q_1$, $(y,\tau) \in Q_0$ є така теорема.

Теорема 2. *За припущень (F0) - (F) пара функцій $(u,a) \in \mathfrak{M}_\beta$ є розв'язком задачі (1)-(4) тоді і тільки тоді, коли додатна неперервна функція $h(t)$, $t \in [0,T]$ є розв'язком рівняння (19).*

4. Теореми існування та єдиності.

Теорема 3. *За припущень (F0) - (F) розв'язок $(u,a) \in \mathfrak{M}_\beta$ задачі (1)-(4) існує: функція $u(x,t)$ визначена формулою (18), $a(t) = [h(t)]^{-1}$, де $h(t)$ – розв'язок операторного рівняння (19).*

Доведення. Враховуючи наведені вище міркування, перетворення, теореми 1, 2, для доведення існування розв'язку задачі залишається довести розв'язність рівняння (19) у класі додатних неперервних функцій $h(t)$, $t \in [0,T]$. Доведемо спочатку його розв'язність у класі

$$M_R = \{h \in C[0,T] \quad | \quad ||h||_{C[0,T]} \le R\}.$$

Це повний банахів простір – замкнений підпростір банахового простору $C[0,T]$ із нормою

$$||h||_{C[0,T]} = \max_{t\in[0,T]} |h(t)|.$$

Використаємо принцип Шаудера. Розглядаємо випадок $N \ge 3$. У випадку $N = 2$ доведення аналогічне. На M_R розглянемо оператор

$$(Ph)(t) := t^{\beta/2}\Big[\tfrac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\big(\mathfrak{G}_0F_0\big)(x_0,t) + \tfrac{\partial}{\partial\nu_{x_0}}\big(\mathfrak{G}_2F_2\big)(x_0,t)\Big]\cdot[t^{\beta/2}F_1(t)]^{-1}, \quad t \in [0,T].$$

Використовуючи оцінки компонент вектор-функції Гріна та їхніх похідних, при $h \in M_R$, $t \in [0,T]$ одержуємо

$$|(Ph)(t)| \le b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial G_0(x_0,t,y,\tau,1/h)}{\partial\nu_{x_0}}\cdot|F_0(y,\tau)|dy+$$

$$+\int\limits_{\Omega} \frac{\partial G_2(x_0,t,y,1/h)}{\partial\nu_{x_0}}\cdot|F_2(y)|dy\Big] \le$$

$$\le b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[\int\limits_0^t\Big(\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x_0|<\frac{2(t-\tau)^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}} \frac{\partial G_0(x_0,t,y,\tau,1/h)}{\partial\nu_{x_0}}dy+$$

$$+\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x_0|>\frac{2(t-\tau)^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}} \frac{\partial G_0(x_0,t,y,\tau,1/h)}{\partial\nu_{x_0}}dy\Big)d\tau\Big]\cdot||F_0||_{C(Q_0)}+$$

$$+b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x_0|<\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}} \frac{\partial G_2(x_0,t,y,1/h)}{\partial\nu_x}dy+$$

$$+\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x_0|>\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}} \frac{\partial G_2(x_0,t,y,1/h)}{\partial\nu_{x_0}}dy\Big]\cdot||F_2||_{C(\Omega_0)} \le$$

$$\le b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[\int\limits_0^t\Big(\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x_0|<\frac{2(t-\tau)^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}} \frac{C_0^*R\,dy}{(t-\tau)|y-x_0|^{N-1}}+$$

$$+\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x_0|>\frac{2(t-\tau)^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}} \frac{C_0dy}{(t-\tau)^{1-\beta}|y-x_0|^{N+1}}\Big)d\tau\Big]\cdot||F_0||_{C(Q_0)}+$$

$$+b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_0:|y-x_0|<\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}}\frac{C_2^* R dy}{t^\beta|y-x_0|^{N-1}}+$$

$$+\int\limits_{\{(y,\tau)\in\Omega_1:|y-x_0|>\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}\}}\frac{C_2 dy}{|y-x_0|^{N+1}}\Big]\cdot||F_2||_{C(\Omega_0)}\leq$$

$$\leq k_1b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[2\sqrt{R}\int\limits_0^t(t-\tau)^{\frac{\beta}{2}-1}d\tau+\int\limits_0^t(t-\tau)^{\beta-1}d\tau\int\limits_{\frac{2(t-\tau)^{\beta/2}}{\sqrt{R}}}^{diam\Omega_0}r^{-2}dr\Big]\cdot||F_0||_{C(Q_0)}+$$

$$+k_2b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[2t^{-\beta/2}\sqrt{R}+\int\limits_{\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}}^{diam\Omega_0}r^{-2}dr\Big]\cdot||F_2||_{C(\Omega_0)}=$$

$$=k_1b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[\frac{4\sqrt{R}t^{\beta/2}}{\beta}+\int\limits_0^t(t-\tau)^{\beta-1}\Big(\frac{\sqrt{R}}{2}(t-\tau)^{-\beta/2}-\frac{1}{diam\Omega_0}\Big)d\tau\Big]\cdot||F_0||_{C(Q_0)}+$$

$$+k_2b_0^{-1}t^{\beta/2}\Big[(2\sqrt{R}+\frac{\sqrt{R}}{2})t^{-\beta/2}-\frac{1}{diam\Omega_0}\Big]\cdot||F_2||_{C(\Omega_0)}=$$

$$=k_1b_0^{-1}\beta^{-1}t^\beta\Big[5\sqrt{R}-\frac{t^{\beta/2}}{diam\Omega_0}\Big]\cdot||F_0||_{C(Q_0)}+k_2b_0^{-1}\Big[5\sqrt{R}/2-\frac{t^{\beta/2}}{diam\Omega_0}\Big]\cdot||F_2||_{C(\Omega_0)},$$

де k_1, k_2 – додатні числа, $k_1=k_1(C_1,C_1^*)$, $k_2=k_2(C_2,C_2^*)$.

Якщо вибрати $\sqrt{R_1}-\frac{2T^{\beta/2}}{5diam\Omega_0}>0$, то для всіх $t\in[0,T]$, $R>R_1$ матимемо

$$|(Ph)(t)|<5b_0^{-1}\sqrt{R}\Big[\frac{k_1}{\beta}T^\beta\cdot||F_0||_{C(Q_0)}+\frac{k_2}{2}||F_2||_{C(\Omega_0)}\Big].$$

За властивістю функції $A\sqrt{R}$ при довільному додатному числі A існує таке $R_2=R_2(A)>0$, що для всіх $R>R_2$ виконується $A\sqrt{R}<R$. Отже, існує таке $R_0=\max\{R_1,R_2\}>0$, що для всіх $R>R_0$, $h\in M_R$

$$||Ph||_{C[0,T]}<R,\text{ а отже,}\quad P: M_R\to M_R.$$

Оператор P неперервний на M_R. Справді, при $h_1,h_2\in M_R$

$$(Ph_1)(t)-(Ph_2)(t)=$$

$$=t^{\beta/2}[t^{\beta/2}F_1(t)]^{-1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_0}\Big[\frac{\partial G_0(x_0,t,y,\tau,1/h_1)}{\partial\nu_{x_0}}-\frac{\partial G_0(x_0,t,y,\tau,1/h_2)}{\partial\nu_{x_0}}\Big]F_0(y,\tau)dy+$$

$$+[t^{\beta/2}F_1(t)]^{-1}\int\limits_{\Omega_0}t^{\beta/2}\Big[\frac{\partial G_2(x_0,t,y,1/h_1)}{\partial\nu_{x_0}}-\frac{\partial G_2(x_0,t,y,1/h_2)}{\partial\nu_{x_0}}\Big]F_2(y)dy.$$

Підінтегральні вирази мають інтегровні особливості та дорівнюють нулю при $h_1(t) = h_2(t)$. Тому значення $|(Ph_1)(t) - (Ph_2)(t)|$ малі для всіх $t \in [0,T]$ при малих значеннях $|h_1(t) - h_2(t)|$, $t \in [0,T]$.

Подібно одержуємо, що оператор P компактний на M_R: вище було доведено рівномірну обмеженість множини $\{(Ph)(t), t \in [0,T]\}$ при $h \in M_R$, її одностайна неперервність випливає з рівномірної збіжності інтегралів у виразі $(Ph)(t)$ при $h \in M_R$ та леми 3.

Було показано скінченність правої частини в (19) для всіх $t \in [0,T]$. Також із оцінок і додатності функцій $\frac{\partial G_0(x,t,y,\tau)}{\partial \nu_x}$, $\frac{\partial G_2(x,t,y)}{\partial \nu_x}$ при $(x,t) \in Q_1$, $(y,\tau) \in Q_0$ випливає, що за умов щодо F_0, F_2

$$t^{\beta/2}\frac{\partial}{\partial \nu_{x_0}}\big(\mathfrak{G}_0 F_0\big)(x_0,t) \geq 0, \quad t^{\beta/2}\frac{\partial}{\partial \nu_{x_0}}\big(\mathfrak{G}_2 F_2\big)(x_0,t) > 0.$$

Звідси, враховуючи також умови щодо функції F_1, одержуємо, що $(Ph)(t) > 0$ для всіх $t \in [0,T]$, $h \in M_R$. Отже, враховуючи рівняння (19), додатність $h(t)$ забезпечується умовами (F0)-(F). $\square$

Зауваження 3. Насправді, з теореми випливає існування функції $a(t)$ з класу

$$C_+^{\gamma}[0,T] = \{v \in C_+[0,T] \quad | \quad |v(t) - v(\tau)| \leq A|t-\tau|^{\gamma} \quad \forall t,\tau \in [0,T]\}$$

з деякими сталими $A > 0$, $\gamma \in (0,1)$.

Справді, за умов теореми одержуємо обмеженість знизу деяким числом $h_0 > 0$ всіх функцій $(Ph)(t)$ при $h \in M_R$, а тоді й обмеженість знизу числом $h_0 > 0$ розв'язку $h \in M_R$ рівняння (19).

Оскільки $|a(t) - a(\tau)| = \frac{|h(t)-h(\tau)|}{h(t)h(\tau)} \leq \frac{|h(t)-h(\tau)|}{h_0^2}$ для довільних $t,\tau \in [0,T]$, то $a \in C_+^{\gamma}[0,T]$, якщо $h \in C_+^{\gamma}[0,T]$.

З вигляду виразу $(Ph)(t+\Delta t) - (Ph)(t)$ та леми 3 за умов теореми одержуємо, що функція $h = Ph \in M_R$ (розв'язок рівняння (19)) задовольняє умову Гельдера.

Теорема 4. *За умови (F1) розв'язок $(u,a) \in \mathfrak{M}_\beta$ задачі (1)-(4) єдиний.*

Доведення. Якщо (u_1,a_1), $(u_2,a_2) \in \mathfrak{M}_\beta$ – два розв'язки задачі, $v = u_1 - u_2$, $a = a_1 - a_2$, то

$$D_t^{\beta} v - a_1(t)\Delta v = a(t)\Delta u_2, \quad (x,t) \in Q_0, \tag{20}$$

$$v_{|Q_1} = 0, \quad v_{|t=0} = 0, \tag{21}$$

$$a_1(t)\frac{\partial v(x_0,t)}{\partial \nu_{x_0}} = -\frac{a(t)}{a_2(t)}F_1(t), \quad t \in [0,T] \tag{22}$$

та для функції v, як розв'язку першої крайової задачі (20)-(21), правильне зображення

$$v(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau,a_1) \cdot a(\tau)\Delta u_2(y,\tau)dy, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0. \tag{23}$$

Підставляючи функцію (23) в умову (22), одержуємо

$$a_1(t)\int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} \frac{\partial G_0(x_0,t,y,\tau,a_1)}{\partial \nu_{x_0}} \cdot a(\tau)\Delta u_2(y,\tau)dy = -\frac{a(t)}{a_2(t)}F_1(t),$$

тобто

$$a(t) + \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} \frac{a_1(t)a_2(t)}{F_1(t)} \cdot \frac{\partial G_0(x_0, t, y, \tau, a_1)}{\partial \nu_{x_0}} \cdot a(\tau)\Delta u_2(y,\tau)dy = 0, \quad t \in [0,T].$$

Одержали, що функція $a(t)$ задовольняє лінійне однорідне інтегральне рівняння Вольтерра з інтегровним ядром (за умови теореми), яке однозначно розв'язне. Отже, $a(t) = 0$, $t \in [0,T]$. Тоді з (23) одержуємо $v(x,t) = 0$, $(x,t) \in \overline{Q}_0$. □

Зауваження 4. Випадок $N = 1$ розглядається аналогічно. Задаючи умову (3) лише в одній точці $(x_0, t_0) \in \overline{Q}_1$, знаходимо (u, a), де a – стала.

Список використаної літератури

1. *Caputo M.* Linear model of dissipation whose Q is almost friequency independent / *M. Caputo* // II. Geofis. J. R. Astr. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529-539.
2. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / *М.М. Джрбашян.* – М.: Наука, 1999.
3. *Luchko Yu.* Boundary value problem for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order / *Yu. Luchko* // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2009. – Vol. 12, №4. – P. 409-422.
4. *Meerschaert M.M.* Fractional Cauchy problems on bounded domains / *M.M. Meerschaert, Nane Erkan, P. Vallaisamy* // Ann. Probab. – 2009. – Vol. 37. – P. 979-1007.
5. *Kochubei A.N.* Fractional-order diffusion / *A.N. Kochubei* // Differential Equations. – 1990. – Vol. 26. – P. 485-492.
6. *Кочубей А.Н.* Уравнения одномерной фрактальной диффузии / *А.Н. Кочубей, С.Д. Эйдельман* // Доп. НАН України. – 2002. – №12. – С. 11-16.
7. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / *S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei.* – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2004.
8. *Ворошилов А.А.* Условия существования классического решения задачи Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто / *А.А. Ворошилов, А.А. Килбас* // Докл. РАН. – 2007. – Т. 414, №4. – С. 1-4.
9. *Anh V.V.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas / *V.V. Anh, N.N. Leonenko* // J. of Statistical Physics. – 2001. – Vol. 104 (5/6). – P. 1349-1387.
10. *Jun Sheng Duan.* Time- and space-fractional partial differential equations / *Jun Sheng Duan* // J. Math. Phis. – 2005. – Vol. 46 (013504).
11. *Іванчов М.І.* Inverse problems of heat conduction with nonlocal conditions / *М.І. Іванчов* // Доп. НАН України. – 1995. – №5. – P. 15-21.
12. *Іванчов М.І.* Про обернену задачу для параболічного рівняння / *М.І. Іванчов* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 47. – С. 65-71.
13. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальний курс / *Г.Е. Шилов.* – М.: Наука, 1965.
14. *Титчмарш Е.* Теория функций / *Е. Титчмарш.* – М.: Наука, 1980.
15. *Лопушанська Г.П.* Задача Коші для рівнянь з дробовими похідними за часовою та просторовими змінними в просторах узагальнених функцій / *Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський* // Укр. мат. журн. – 2012. – Т. 64, №8. – С. 1067-1080.
16. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач / *С.Д. Ивасишен.* – К.: Вища шк., 1990.

17. *Kilbas A.A.* H-Transforms / *A.A. Kilbas, M. Sajgo.* – Boca-Raton: Chapman and Hall/CRC, 2004.

Стаття: надійшла до редакції 19.04.2013
прийнята до друку 11.12.2013

SOLVABILITY OF INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVE

Andrii LOPUSHANSKYJ

Institute of Mathematics, Rzeszów University,
Al. Rejtana, 16 A, Rzeszo'w, 35-959, Poland
e-mail: alopushanskyj@gmail.com

We prove existence and uniqueness of a solution (u, a) to the boundary value problem

$$D_t^{\beta} u - a(t)\Delta u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T], \quad \Omega_0 \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geq 2,$$
$$a(t) > 0, \;\; t \in [0,T],$$
$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega_0 \times [0,T], \quad a(t)\frac{\partial u(x_0,t)}{\partial \nu_{x_0}} = F_1(t), \quad t \in [0,T],$$
$$u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}_0$$

with the regularized fractional derivative $D_t^{\beta} u$ of the order $\beta \in (0,1)$ and a given point $x_0 \in \partial\Omega$.

Key words: fractional derivative, inverse boundary value problem, the Green vector function, operator equation.

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Андрей ЛОПУШАНСКИЙ

Институт математики, Жешовский университет,
ал. Рейтана, 16 А, Жешов, 35-959, Польша
e-mail: alopushanskyj@gmail.com

Доказано существование и единственность решения (u, a) краевой задачи

$$D_t^{\beta} u - a(t)\Delta u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T], \quad \Omega_0 \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geq 2,$$
$$a(t) > 0, \;\; t \in [0,T],$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega_0 \times [0,T], \quad a(t)\frac{\partial u(x_0,t)}{\partial \nu_{x_0}} = F_1(t), \quad t \in [0,T],$$
$$u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}_0$$

с регуляризованной производной $D_t^\beta u$ порядка $\beta \in (0,1)$ и заданной точкой $x_0 \in \partial\Omega_0$.

Ключевые слова: производная дробного порядка, обратная краевая задача, вектор-функция Грина, операторное уравнение.