ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 119–126
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 119–126

УДК 512.553.2

ПРО КЛАСИЧНО-ПЕРВИННИЙ СПЕКТР КЛАСИЧНО-ГІЛЬБЕРТОВИХ МУЛЬТИПЛІКАЦІЙНИХ МОДУЛІВ

Марта МАЛОЇД-ГЛЄБОВА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: martamaloid@gmail.com

Описано властивості класично-топологічного, Гільбертового та класично-гільбертового модулів. Доведено аналог теореми Де Марко-Орсатті для *lcpm*-модулів, сформульовано наслідки з цієї теореми.

Ключові слова: первинний підмодуль, класично-топологічний модуль, класично-гільбертів модуль, теорема Де Марко-Орсатті.

1. Вступ. Узагальнено деякі класи первинних модулів і підмодулів, і на цій підставі досліджено класично-первинний спектр деяких типів мультиплікаційних модулів. Зазвичай у публікаціях користуються кількома модульними узагальненнями первинного ідеалу. Найчастіше перевагу надають первинним підмодулям, визначеним так: власний підмодуль P модуля M називається *первинним підмодулем*, якщо з того, що $aRm \subseteq P$ для $a \in R$ і $m \in M$ випливає, що або $m \in P$ або $a \in (N : M)$, [6], [9], [3]. Історично поняття первинного модуля вперше використали у праці Р.Е. Джонсона [13], потім первинні модулі розглядали С. Пейж в [19], В.А. Андрунакієвич в [1], а подальші дослідження таких модулів проводили П.Ф. Сміт, М.Е. Мур, Р.Л. Мак Касланд ([18]) та ін. Останнім часом ці модулі та їхні різноманітні узагальнення привертають увагу математиків багатьох країн світу. Серед математиків, які отримали найліпші результати при вивченні первинних модулів варто відзначити Р. Вісбауера ([22]) та Дж. Даунса ([9]), які зробили детальний аналіз існуючих означень первинного модуля та провели систематичне дослідження властивостей таких модулів. Широко використовують означення первинних модулів, які ґрунтуються на основі теорії ануляторних ідеалів підмодулів. Зокрема, розпочались й інтенсивно продовжуються дослідження класично-первинних підмодулів [7], [2], [4] та строго-первинних модулів. У цьому напрямі можна виділити праці А. Розенберга ([21]) та А. Каучікаса ([14], [16], [15]).

Пропонуємо одне узагальнення поняття класично-топологічного модуля, раніше введеного М. Бехбуді в праці [7], доводимо найпростіші властивості цих модулів.

Фінальна частина замітки присвячена доведенню одного аналога відомої теореми Де Марко-Орсатті [10], сформульованого автором для випадку $lcpm$-модулів.

2. Попередні дані. Нехай R асоціативне кільце з $1 \neq 0$, M – лівий унітарний R-модуль. Той факт що, N є підмодулем M, символічно запишемо у вигляді $N \subseteq M$ і використаємо позначення $(N : M) = \{r \in R | rM \leqslant N\}$. Ненульовий правий (лівий) модуль M називається *первинним модулем*, якщо $Ann(K) = Ann(M)$ для кожного ненульового підмодуля K модуля M, [5]. Власний підмодуль P лівого модуля M називатиметься *первинним*, якщо M/P буде первинним лівим модулем, тобто $Ann(K/P) = Ann(M/P)$ для кожного ненульового підмодуля K/P модуля M/P, [19], [9]. Власний підмодуль P лівого модуля M називатиметься *класично-первинним підмодулем*, якщо з включення $abRm \subseteq P$ для $a, b \in R$ і $m \in M$ випливає, що або $am \in P$ або $bm \in P$ (див. [6], де в оригіналі для таких модулів використовують термін "слабко-первинний модуль"). Це поняття (для комутативного контексту) всебічно вивчав М. Бехбуді, починаючи з 2006 року, [6]. За М. Бехбуді через $Cl.Spec(M)$ позначимо множину всіх класично-первинних підмодулів лівого модуля M, [5], [7]. В класичній алгебричній геометрії важливу роль відіграє топологія Зариського на спектрі комутативного кільця $Spec(R)$. Тепер вже зрозуміла її роль і у теорії модулів. Конспективно нагадаємо принцип побудови топології Зариського в обох випадках просторів первинних ідеалів кільця та первинних підмодулів лівого модуля. Для кожного ідеалу I кільця R поставимо у відповідність множину $V(I) = \{P \in Spec(R) : I \subseteq P\}$. Тому множини $V(I)$, де I пробігає ідеали кільця R, задовольняють аксіоми замкнених множин деякої топології на $Spec(R)$, яку називають *топологією Зариського.* У випадку лівого модуля M, нехай $Spec(M)$ – множина всіх первинних підмодулів модуля M, яку називаємо *первинним спектром* модуля M. Для кожного підмодуля N лівого модуля M розглянемо множину $V(N) = \{P \in Spec(M) | N \subseteq P\}$. Лівий модуль M називатиметься *топологічним модулем*, якщо його первинний спектр задовольняє такі властивості: множина $\xi(M) := \{V(N) | N \subseteq M\}$ замкнена стосовно скінченних об'єднань (детальнішу інформацію можна почерпнути в [18]). Зауважимо, що $\xi(M)$ утворюватимуть систему замкнених множин в топології Зариського на $Spec(M)$. Зауважимо також, що ця властивість притаманна спектру самого кільця: $Spec(R)$. Багато дослідників, наприклад, Р. Л. Мак Касланд, М. Е. Мур, П. Ф. Сміт ([18]) інтенсивно намагалися систематизувати вивчення спектрів первинних підмодулів. Зокрема, вони довели, що для комутативного випадку, якщо ${}_RM$ – скінченно-породжений, то модуль M буде топологічним модулем тоді і лише тоді, коли M мультиплікаційний модуль. Нехай M ненульовий лівий R-модуль. Для його підмодуля N означимо *класичний многовид* як множину $\mathbb{V}(N) = \{P \in Cl.Spec(M) | N \subseteq P\}$. Множина всіх таких многовидів має такі властивості:

1) $\mathbb{V}(M) = \emptyset$ і $\mathbb{V}(0) = Cl.Spec(M)$;
2) $\bigcap\limits_{i \in I} \mathbb{V}(N_i) = \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i \in I} N_i\right)$ для довільної множини індексів I;
3) $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) \subseteq \mathbb{V}(N \cap L)$ для підмодулів $N, L, N_i \subseteq M$.

Позначимо через $\mathbb{C}(M)$ сім'ю всіх підмножин вигляду $\mathbb{V}(N)$ з $Cl.Spec(M)$. Тоді $\mathbb{C}(M)$ містить порожню множину і весь простір $Cl.Spec(M)$, і $\mathbb{C}(M)$ замкнена стосовно довільних перетинів, проте в загальному $\mathbb{C}(M)$ не замкнена стосовно скінченних об'єднань, див. наприклад, [7]. Цим мотивується таке означення: лівий R-модуль M називається *класично-топологічним модулем*, якщо $\mathbb{C}(M)$ замкнена стосовно скінченних об'єднань, тобто для довільних підмодулів N і L модуля M існує такий підмодуль K, що $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) = \mathbb{V}(K)$. В такому разі сім'я $\mathbb{C}(M)$ задовольняє аксіоми замкнених підмножин топологічного простору, а отже, визначає топологію на $Cl.Spec(M)$. Нехай M довільний лівий R-модуль. Для кожного його підмодуля N позначимо $\mathbb{U}(N) = Cl.Spec(M) \backslash \mathbb{V}(N)$ і $\mathbb{B}(M) = \{\mathbb{U}(N) : N \subseteq M\}$. Через $\mathbb{T}(M)$ позначимо набір всіх об'єднань скінченних перетинів елементів з $\mathbb{B}(M)$. Тоді $\mathbb{T}(M)$ утворює топологію на $ClSpec(M)$ з підбазою $\mathbb{B}(M)$. У такому випадку $\mathbb{T}(M)$ називається *топологією типу Зариського.*

Зауваження 1. Для M довільного лівого R-модуля, сім'я множин $\{\mathbb{U}(N_1) \cap \ldots \cap \mathbb{U}(N_k) : N_i \subseteq M, 1 \leqslant i \leqslant k$ для деякого $k \in \mathbb{N}\}$ утворює базу топології типу Зариського на M.

Підмодуль C модуля M називається *напівпервинним* (*класично-напівпервинним*), якщо C є перетином первинних (класично-первинних) підмодулів. Первинний (класично-первинний) підмодуль P лівого модуля M називається *екстраординарним*, якщо як тільки N і L є напівпервинними (класично-напівпервинними) підмодулями модуля M, то з умови $N \cap L \subseteq P$ випливає, що $N \subseteq P$ і $L \subseteq P$ ([7]). Лівий R-модуль M називається мультиплікаційним модулем, якщо для кожного підмодуля N модуля M існує такий ідеал B кільця R, що $N = BM$. Більше інформації про мультиплікаційні модулі можна знайти в монографії [20]. Нехай $\mathcal{X}$ – топологічний простір, $\mathcal{A}$ – його підпростір, $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ – тотожне відображення. Якщо існує таке відображення $r : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{A}$, що $r|_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$, то r називається ретракцією $\mathcal{X}$ на $\mathcal{A}$, а підпростір $\mathcal{A}$ називається ретрактом простору $\mathcal{X}$.

3. Властивості класично-топологічних модулів.

Лема 1. *Для лівого R-модуля M такі твердження еквівалентні:*

1) *M є класично-топологічним модулем;*
2) *кожен класично-первинний підмодуль модуля M є екстраординарним;*
3) $\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(L) = \mathbb{V}(N \cap L)$ *для будь-яких класично-напівпервинних підмодулів N і L модуля M.*

Доведення проводиться аналогічними міркуваннями до тих, які подають Бехбуді і Ноорі в [7]. З цієї леми прямо випливає висновок.

Наслідок 1. *Кожен класично-топологічний модуль є топологічним модулем.*

Доведення. Нехай M довільний класично-топологічний модуль. За попередньою лемою кожен класично-первинний підмодуль M буде екстраординарним. Оскільки кожен класично-первинний підмодуль M є первинним, то первинний підмодуль M теж буде екстраординарним. За [7], M буде топологічним модулем. $\square$

Проте досі не знайдено прикладу топологічного модуля, який би не був класично-топологічним модулем. Автори через брак таких контрприкладів разом з тим фактом, що два поняття топологічного та класично-топологічного модуля є еквівалентними для таких класів кілець як скінченно-породжені та Артінові модулі, висувають гіпотезу і доводять таке твердження.

Наслідок 2. *Нехай M довільний R-модуль над комутативним кільцем. M буде топологічним модулем у тому і лише в тому випадку, коли він буде класично-топологічним модулем.*

Проте для випадку некомутативного кільця це твердження неправильне.

Твердження 1. *Нехай M лівий класично-топологічний R-модуль. Тоді кожен гомоморфний образ M буде класично-топологічним модулем.*

Доведення. Нехай N довільний підмодуль класично-топологічного модуля M. Нехай $M' = M/N$. Припустимо, що $Cl.Spec(M') \neq \emptyset$. Очевидно, що класично-первинними підмодулями M' будуть підмодулі вигляду P/N, де P – класично-первинний підмодуль модуля M і $N \subseteq P$. Отже, довільний класичний напівпервинний підмодуль модуля M' набуде вигляду C/N, де C – класично-напівпервинний підмодуль, що містить N. Використовуючи лему 1, отримаємо потрібний результат. □

Випадок, коли $Cl.Spec(M') \neq 0$ тривіальний.

4. Гільбертові та класично-гільбертові модулі: означення та деякі властивості. Не обов'язково комутативне кільце R називається *кільцем Гільберта*, якщо кожен первинний ідеал кільця буде перетином максимальних ідеалів. Узагальнивши на випадок модулів, отримаємо те, що модуль називається *гільбертовим*, якщо кожен первинний підмодуль буде перетином максимальних підмодулів. Модуль M називається *класично-гільбертовим*, якщо кожен класично-первинний підмодуль буде перетином максимальних підмодулів.

Загалом кожен первинний підмодуль модуля M буде класично-первинним, а у випадку, коли $M = R$ є комутативним кільцем, класично-первинні підмодулі, первинні підмодулі і первинні ідеали збігаються (рівні) ([2]).

Зауваження 2. Включення в іншу сторону неправильне, тобто існує підмодуль N модуля M, що є класично-первинним підмодулем, але не є первинним підмодулем. Якщо R – область і P – ненульовий первинний ідеал, то $P \oplus (0)$, $(0) \oplus P$ і $P(1,1)$ є класичними первинними підмодулями вільного модуля $M = R \oplus R$, проте всі вони не є первинними підмодулями (інформація міститься в [2]).

Твердження 2. *Кожен класично-гільбертів модуль є Гільбертовим модулем, але обернене твердження хибне.*

Доведення. Нехай M класично-гільбертів модуль. За лемою 1, кожен класично-первинний підмодуль модуля M – екстраординарний. Оскільки кожен класично-первинний підмодуль модуля M є первинним підмодулем, то кожен первинний підмодуль є екстраординарним. Тоді за ([18], Lemma 2.1), M є Гільбертовим модулем. □

Теорема 1. *R-модуль M буде класично-гільбертовим модулем тоді і лише тоді коли кожен класично-первинний підмодуль M, що не є максимальним, буде перетином власних більших класично-первинних підмодулів.*

Доведення проводиться аналогічно до міркувань, які подано в [2] для комутативного випадку.

Зауваження 3. Якщо M – довільний R-модуль і $K \subseteq M$, то легко довести, що власний підмодуль P з M, де $K \subseteq P$ – класично-первинний підмодуль (відповідно максимальний) підмодуля M, якщо P/K є класично-первинним (максимальним) підмодулем M/K. Це зауваження можна використати як означення класично-первинного підмодуля.

Твердження 3. *Кожен гомоморфний образ класично-гільбертового модуля буде класично-гільбертовим модулем.*

Доведення. Нехай N довільний підмодуль класично-гільбертового модуля M. Позначимо через M' фактор-модуль $M' = M/N$. Припустимо, що $Cl.Spec(M') \neq 0$. Очевидно, класично-первинні підмодулі модуля M' набувають вигляду P/N, де P – класично-первинний підмодуль модуля M і $N \subseteq M$. Отже, кожен класичний напівпервинний підмодуль модуля M' набуде вигляду C/N, де C – класично-напівпервинний підмодуль, що містить N. Для завершення доведення достатньо використати Лему 1. □

З твердження випливає такий висновок.

Наслідок 3. *Нехай R-кільце, M – довільний R-модуль. Такі властивості еквівалентні:*

1) *M – класично-гільбертів R-модуль;*
2) *M/N – класично-гільбертів R-модуль для кожного підмодуля N модуля M.*

Зауваження 4. Мінімальні класично-первинні підмодулі визначають природно. Очевидно, якщо $\{P_i\}_{i\in I}$ – довільний ланцюг класично-первинних підмодулів R-модуля M, то $\cap_{i\in I} P_i$ очевидно буде класично-первинним підмодулем. Тому за лемою Цорна кожен класично-первинний підмодуль міститиме мінімальний класично-первинний підмодуль.

Нехай R не обов'язково комутативне кільце. Лівий модуль M над кільцем R називається *lcpm-модулем*, якщо кожен класично-первинний підмодуль P міститься в єдиному максимальному підмодулі модуля M. Аналогічно можна подати означення *rcpm-модуля.* Тепер можна довести аналог теореми Де Марко-Орсатті для випадку класично-первинних підмодулів.

Теорема 2. *Нехай M мультиплікаційний R-модуль, і $Max(M)$ ретракт простору $Cl.Spec(M)$. Тоді M є lcpm-модулем.*

Доведення. Припустимо, що $\varphi : Cl.Spec(M) \to Max(M)$ неперервна ретракція і $\varphi(K) = H$ для деякого класично-первинного підмодуля P і максимального підмодуля H модуля M. Тоді замкнена множина $\varphi^{-1}(H)$ буде містити $\{\bar{P}\}$, тобто довільний максимальний підмодуль H', що міститиме P. Оскільки відображення φ буде неперервною ретракцією, тому $H = \varphi(H') = H'$. Отже, $H' = H$ буде єдиним максимальним підмодулем, який міститиме P. □

Наслідок 4. *Кожен максимальний підмодуль мультиплікаційного lcpm-модуля M містить єдиний мінімальний класично-первинний підмодуль.*

Наслідок 5. *Простір $Min(M)$ мінімальних класично-первинних підмодулів буде ретрактом простору $Cl.Spec(M)$.*

Наслідок 6. *Нехай R – кільце і $\{M_i\}_{i\in I}$ набір R-модулів. Якщо $\bigoplus_{i\in I} M_i$ – класично-гільбертовий модуль, то кожен $M_i (i \in I)$ буде класично-гільбертовим модулем.*

Твердження 4. *Нехай R – область, M – класично-гільбертів R-модуль. Якщо N є таким довільним підмодулем M, що M/N є модулем без скруту, то N буде класично-гільбертовим R-модулем.*

Доведення. Припустимо, що R є областю і M є класично-гільбертовим R-модулем. Припустимо, що $N \subset M$ і M/N є модулем без скруту. Більше інформації про модулі без скруту можна почерпнути з [11], [12], [17]. Також припустимо, що $P \subset N$ – класично-первинні підмодулі. Доведемо, що P є перетином максимальних підмодулів з N. Спершу доведемо, що P – класично-первинний підмодуль M. Припустимо, що $rsRm \subseteq P$ для деякого $m \in M$ і $r, s \in R$. Якщо $m \in M$, оскільки P класичнопервинний підмодуль N, ми доведемо, що або $rm \in P$, або $sm \in P$. Тепер припустимо, що $m \in M$. Нагадаємо, що $rsRm \subseteq P \subseteq N$. Оскільки M/N є модулем без скруту і $m \notin N$, випливає, що $r = 0$ чи $s = 0$. Також у цьому випадку або $rm \in P$, або $sm \in P$. Отже, P – класично-первинний підмодуль M.

Оскільки P – класично-первинний підмодуль M і $P = \cap_{i\in I} M_i$, де кожен M_i – максимальний підмодуль. M. Для кожного i нехай $P_i := M_i \cap N$. Оскільки $P \subseteq N$ легко побачити, що $P = \cap_{i\in I} P_i$. Окрім того, можемо припустити без втрати загальності, що кожен P_i повністю міститься в N. Припустимо, що $i \in I$ є довільним. Щоб завершити доведення, достатньо довести, що P_i є максимальним підмодулем N. Тому припустимо, що $m \in N \backslash P_i$. Доведемо, що $(P_i, m) \in N$. Отже, $m_i \notin M_i$. Оскільки M_i – максимальний підмодуль M, то отримаємо $(M_i, m) = M$. Нехай $x \in N$ – довільний елемент. Доведемо, що $x \in (P_i, m)$. Оскільки $M = (M_i, m)$, $x = m_i + rm$ для деяких елементів $m_i \in M$, $r \in R$. Позаяк $x \in N$ і $m \in N$, то робимо висновок, що $m_i \in N$. Тому $m_i \in P_i$, з цього випливає, що $x \in (P_i, m)$. Ми довели, що $(P_i, m) \in N$, а це доводить, що P_i є максимальними підмодулями N. □

Наслідок 7. *Нехай R – область і M класично-гільбертів R-модуль. Тоді істинні такі твердження:*

1) *якщо $T(M)$ – періодичний модуль, то $T(M)$ також класично-гільбертів R-модуль;*
2) *якщо M – модуль без скруту і N – чистий підмодуль модуля M, то N є класично-гільбертовим R-модулем.*

Доведення. 1) Випливає з попереднього твердження.

2) Для доведення припустимо, що N є чистим підмодулем класично-гільбертового модуля без скруту M. За попереднім твердженням достатньо довести таке: якщо $m \in M \backslash N$ і $r \in R$, де $rRm \in N$, то $r = 0$. Тому припустимо, що $m \in M \backslash N$ і $rRm \in N$. Оскільки N є чистим, то $rM \cap N = rN$. Отже, $rRm \in rN$, тому існує деякий елемент $n \in N$, що $rRm = rRn$. Отже, $rR(m - n) = 0$. Оскільки $m \notin N$, то бачимо, що $m - n \neq 0$. Позаяк M є модулем без скруту, то робимо висновок, що $r = 0$. □

Список використаної літератури

1. *Andrunakievich V.A.* Prime modules and Baer radical / *V.A. Andrunakievich* // Siberian Mathematical Journal – 1961. – Vol. 2. – №6. – P. 801-806.
2. *Arabi-Kakavand M., Behboodi M.* Modules Whose Classical Prime Submodules Are Intersections of Maximal Submodules / *M. Arabi-Kakavand, M. Behboodi* // Glasgow Math. J. – 2006. – Vol. 48. – P. 343-346.
3. *Azizi A.* Weakly prime submodules and prime submodules / *A. Azizi* // J. Algebra – 2007. – Vol. 307. – P. 454-460.
4. *Behboodi M.R.* Classical prime submodules / *M.R. Behboodi* // Ph. D Thesis, Chamran University Ahvaz Iran, 2004.
5. *Behboodi M.R., Haddadi M.R.* Classical Zarisky topology of modules and spectral spaces I / *M.R. Behboodi, M.R. Haddadi* // International Electronic Journal of Algebra – 2008. – Vol. 4. – P. 104-130.
6. *Behboodi M.R., Koohy H.* Weakly prime modules / *M.R. Behboodi, H. Koohy* // Vietnam J. Math. – 2004. – Vol. 32, №2. – P. 185-195.
7. *Behboodi M.R., Noori M.J.* Zariski-like topology on the classical prime spectrum of a module / *M.R. Behboodi, M.J. Noori* // Bulletian of the Iranian Mathematical society. – 2009. – Vol. 35, №1. – P. 253-269.
8. *Behboodi M.R., Shojaee S.* On divins of classical prime submodules and dimension theory of modules / *M.R. Behboodi, S. Shojaee* // Bulletian of the Iranian Mathematical society. – 2010. – Vol. 36, №1. – P. 149-166.
9. *Dauns J.* Prime modules / *J. Dauns* // J. Reine Angew. Math. – 1978. – Vol. 298. – P. 156-181.
10. *De Marco G., Orsatti A.* Commutative rings in which every prime ideal is contained in a unique maximal ideal / *G. De Marco, A. Orsatti* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30. – P. 459-466.
11. *Golan J.S.* Topologies on the Torsion-Theoretic Spectrum of a Noncommutatie Ring / *J.S. Golan* // Pacific Journal of Math. – 1974. – Vol. 51, №. 2. – P. 439-450.
12. *Golan J.S.* Torsion theories / *J.S. Golan.* – Harlow: Longman Scientific & Technical, 1986.
13. *Johnson R.E.* Representations of prime rings / *R.E. Johnson* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 74, №. 2. – P. 351-357.
14. *Kaučikas A.* On the left strongly prime modules and ideals / *A. Kaučikas* // Liet.Mat. Rink. Special Issue. – 2001. – Vol. 41. – P. 84–87.
15. *Kaučikas A.* On the left strongly prime modules and their radicals / *A. Kaučikas* // Lietuvos matematikos rinkinys. – 2010. – Vol. 51. – P. 31–34.
16. *Kaučikas A., Wisbauer R.* On strongly prime rings and ideals / *A. Kaučikas, R. Wisbauer* // Comm. Algebra. – 2000. – Vol. 28, №11. – P. 5461-5473.
17. *Maloid-Glebova M.O.* About torsion-theoretic spectrum of left-invariant ring and weakly-multiplication and pure-multiplicayion modules / *M.O. Maloid-Glebova* // Applied Problems of Mech. and Math. – 2011. – №. 9. – P. 87-94.
18. *McCasland R.L.* On the spectrum of the module over a commutative ring / *R.L. McCasland, M.E. Moore, P.F. Smith* // Comm. Algebra. – 1997. – Vol. 25, №1. – P. 79-103.
19. *Page S.* Properties of quotient rings / *S. Page* // Can. J. Math. – 1972. – Vol. 24, №6. – P. 1122-1128.
20. *Tuganbaev A.A.* Multiplication Modules / *A. A. Tuganbaev* // J. of Math. Sciences. – 2004. – Vol. 123, №2. – P. 3839-3905.
21. *Rosenberg A.* Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras / *A. Rosenberg.* – Kluwer Academic Publishers, 1995.

22. *Wisbauer R.* On prime modules and rings / *R. Wisbauer* // Commun. Algebra. – 1983. – Vol. 11. – P. 2249-2265.

Стаття: надійшла до редакції 30.10.2013
прийнята до друку 28.02.2014

ON CLASSICAL-PRIME SPECTRUM OF CLASSICAL-HILBERT MULTIPLICATION MODULES

Marta MALOID-GLEBOVA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: martamaloid@gmail.com

Properties of classical-topological, Hilbert and classical-Hilbert modules are described. The analogue of De Marco-Orsatti's theorem for *lcpm*-modules is proven and some consequences of this theorem are given.

Key words: prime module, classical-topological module, classical-Hilbert module, theorem of De Marco-Orsatti.

О КЛАССИЧЕСКИ-ПЕРВИЧНОМ СПЕКТРЕ КЛАССИЧЕСКИ-ГИЛЬБЕРТОВЫХ МУЛЬТИПЛИКАЦИОННЫХ МОДУЛЕЙ

Марта МАЛОИД-ГЛЕБОВА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: martamaloid@gmail.com

Описано свойства классически-топологического, гильбертового и классически-гильбертового модулей. Доказано аналог теоремы Де Марко-Орсатти для *lcpm*-модулей и сформулированы следствия из этой теоремы.

Ключевые слова: первичный модуль, классически топологический модуль, классически-гильбертов модуль, теорема Де Марко-Орсатти.