ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 127–133
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 127–133

УДК 519.21 + 517.37

ПРО РЕГУЛЯРНЕ ЗРОСТАННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Марта ПЛАЦИДЕМ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: marta0691@rambler.ru

Для аналітичних в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, характеристичних функцій φ ймовірнісних законів F знайдено зв'язок між зростанням $M(r,\varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}, r \in [0,R)$ і спаданням $W_F(x) = 1 - F(x) + +F(-x), x \geqslant 0$. Отримані результати застосовано для знаходження умов на $W_F(x)$, за яких правильні асимптотичні рівності $\ln M(r,\varphi) = (1+o(1))Tr^\rho$ при $r \to \infty$, де $T > 0$, $\rho > 1$ для цілих характеристичних функцій і $M(r,\varphi) = \dfrac{(1+o(1))T}{(R-r)^\rho}$ при $r \uparrow R$, де $T > 0$, $\rho > 0$ для аналітичних в крузі $\{z : |z| < R\}$ характеристичних функцій.

Ключові слова: аналітична функція, характеристична функція, ймовірнісний закон, узагальнений порядок.

1. Вступ. Нехай φ – аналітична в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $R > 0$, характеристична функція ймовірнісного закону F, $M(r,\varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}, r \in [0,R)$, а $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x), x \geqslant 0$. Зв'язок між зростанням $M(r,\varphi)$ і спаданням $W_F(x)$ досліджували багато математиків. Для цілих характеристичних функцій цей зв'язок у термінах порядку і типу отримав Б. Рамачандран (див. [1, с. 54]), а для аналітичних в одиничному крузі такий самий зв'язок знайшов В.М. Сороківський [2]. У термінах узагальнених порядків М.М. Шеремети залежність зростання $M(r,\varphi)$ від спадання $W_F(x)$ вивчали Н.І. Яковлєва [3-4] для цілих характеристичних функцій і В.М. Сороківський [2] для аналітичних в одиничному крузі характеристичних функцій. Найзагальніші результати для цілих і для аналітичних у скінченному крузі функцій наведено в [5].

Природним стало питання, за яких умов на $W_F(x)$ для цілих характеристичних функцій $\ln M(r,\varphi) = (1+o(1))Tr^\rho$ при $r \to \infty$, де $T > 0$ і $\rho > 1$, а для аналітичних в крузі $\{z : |z| < R\}$ характеристичних функцій правильна асимптотична рівність $M(r,\varphi) = \dfrac{(1+o(1))T}{(R-r)^\rho}$ при $r \uparrow R$, де $T > 0$ і $\rho > 0$.

Відповідь на це питання буде отримано з доведеного нижче загального результату.

Через $\Omega(0,R)$ позначимо клас додатних необмежених на $[r_0,R)$ для деякого $r_0\in(0\ ,R)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $[r_0,R)$, і нехай ϕ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(r)=r-\dfrac{\Phi(r)}{\Phi'(r)}$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Будемо досліджувати умови на функції W_F і Φ, за яких

$$\ln M(r,\varphi)=(1+o(1))\Phi(r),\quad r\uparrow R. \tag{1}$$

Для цього приймемо $\mu(r,\varphi)=sup\,\{W_F(x)e^{rx}:x\geqslant 0\}$ і знайдемо спочатку умови на Φ, за яких співвідношення (1) рівносильне співвідношенню

$$\ln\mu(r,\varphi)=(1+o(1))\Phi(r),\quad r\uparrow R. \tag{2}$$

Оскільки [6, с. 55] $\mu(r,\varphi)\leqslant 2M(r,\varphi)$ при $r\to\infty$, то $\ln\mu(r,\varphi)\leqslant(1+o(1))\ln M(r,\varphi)$, і нам залишилось отримати оцінку $\ln M(r,\varphi)$ через $\ln\mu(r,\varphi)$ зверху. Але [6, с. 55] $M(r,\varphi)\leqslant rI(r,\varphi)+const$, де $I(r,\varphi)=\int_0^\infty W_F(x)\exp\{rx\}dx$. Тому, якщо $\varphi\not\equiv const$ – ціла характеристична функція, то $\dfrac{\ln M(r,\varphi)}{r}\to\sigma\in(0,+\infty]$ при $r\to+\infty$, і отже, $\ln M(r,\varphi)\leqslant(1+o(1))\ln I(r,\varphi)$, при $r\to+\infty$, якщо φ аналітична в крузі $\mathbb{D}_R=\{z:|z|<R\}$, $R<+\infty$, то $M(r,\varphi)\leqslant RI(r,\varphi)+const$ і знову

$$\ln M(r,\varphi)\leqslant(1+o(1))\ln I(r,\varphi)\quad\text{при}\quad r\uparrow R.$$

Отже, задача звелась до оцінки $I(r,\varphi)$ через $\mu(r,\varphi)$ зверху. Матимемо

$$I(r,\varphi)=\int_0^\infty W_F(x)\exp\{(r+\eta(r))x\}\exp\{-\eta(r)x\}\,dx\leqslant\frac{\mu(r+\eta(r),\varphi)}{\eta(r)}$$

для будь-якого $\eta(r)\in(0,R-r)$, тобто $r+\eta(r)<R$. Звідси випливає, що

$$\ln I(r,\varphi)\leqslant\ln\mu(r+\eta(r),\varphi)+\ln\frac{1}{\eta(r)}. \tag{3}$$

Тому з (2) випливає, що

$$\ln I(r,\varphi)\leqslant(1+o(1))\Phi(r+\eta(r))+\ln\frac{1}{\eta(r)},\quad r\uparrow R, \tag{4}$$

і отже, треба вибрати $\eta(r)$ так, щоб $\Phi(r+\eta(r))=(1+o(1))\Phi(r)$ і $\ln\eta(r)=o(\Phi(r))$ при $r\uparrow R$. Найпростішим є вибір $\eta(r)=\dfrac{1}{\Phi(r)}$ з вимогою $\Phi\left(r+\dfrac{1}{\Phi(r)}\right)=(1+$ $+o(1))\Phi(r)$ при $r\uparrow R$. Якщо $R=+\infty$, то ця вимога не є обтяжливою, оскільки її задовольняють степенева та показникова функції, а також функція $\Phi(r)=\exp_k r$, де $\exp_1 r=e^r$, $\exp_k r=\exp\{\exp_{k-1}r\}$ $(k\geqslant 2)$. Ситуація дещо інша, якщо $R\in(0,+\infty)$. Розглянемо, наприклад, $\Phi(r)=\dfrac{1+\gamma}{R-r},\gamma>0$. Тоді $r+\dfrac{1}{\Phi(r)}=r+\dfrac{R-r}{1+\gamma}<R$, але $\Phi\left(r+\dfrac{1}{\Phi(r)}\right)=\dfrac{(1+\gamma)^2}{\gamma(R-r)}\neq(1+o(1))\Phi(r)$ при $r\uparrow R$. Щоб включити цей випадок до розгляду, виберемо $\eta(r)=\dfrac{1}{\Phi'(r)}$. Тоді, якщо $\Phi'(r)\geqslant\dfrac{1+\gamma}{R-r}$ для $r\geqslant r_0$, то

$r+\eta(r) < R$ (зрозуміло, що ця умова є зайвою, якщо $R=+\infty$). Припускаючи ще, що $\Phi\left(r+\dfrac{1}{\Phi'(r)}\right)=(1+o(1))\Phi(r)$ і $\ln\Phi'(r)=o(\Phi(r))$ при $r\uparrow R\in(0,+\infty]$, з (2) і (4), отримуємо оцінку

$$\ln I(r,\varphi)\leqslant(1+o(1))\Phi(r),\quad r\uparrow R. \tag{5}$$

З проведених міркувань отримуємо таке твердження.

Твердження 1. *Нехай* $0<R\leqslant+\infty$, *а функція* $\Phi\in\Omega(0,R)$ *така, що* $\Phi'(r)\geqslant\dfrac{1+\gamma}{R-r}$ *з* $\gamma>0$ *для всіх* $r\in[r_0,R)$, $\ln\Phi'(r)=o(\Phi(r))$ *і* $\Phi\left(r+\frac{1}{\Phi'(r)}\right)=(1+o(1))\Phi(r)$ *при* $r\uparrow R$. *Тоді для кожної аналітичної в* $\mathbb{D}_R$ *характеристичної функції* φ *співвідношення (1) і (2) рівносильні.*

Зауваження 1. У випадку, коли $R=+\infty$, тобто φ – ціла характеристична функція, умови теореми задовольняють, наприклад, функції $\Phi(r)=\sigma r^{\rho}(r\geqslant r_0)$ з $\rho>1$ і $\sigma>0$, $\Phi(\sigma)=\sigma e^{\rho r}(r\geqslant r_0)$ з $\sigma>0$ і $\rho>0$, а також функція $\Phi(r)=\exp_k r$ з $k\geqslant 2$.

Зауваження 2. Якщо припустити, що $\Phi(r)=B(\frac{1}{R-r})$, то можна довести, що Φ задовольняє умови твердження 1, якщо, наприклад, $B(x)=x^{\rho}$ з $p>0$ $B(x)=\exp_k x$ з $k\geqslant 1$, $B(x)=\sigma\ln^{p}x$ з $\sigma>0$ і $p>1$. В останньому прикладі $p>1$ замінити на $p=1$ не можна.

Для знаходження умов на W_F, за яких правильна асимптотична рівність (2), можна використати результати з [7-8]. Для цього через $\Omega(-\infty,R)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty,R)$ функцій Φ_* таких, що похідна Φ'_* неперервна, додатна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty,R)$, і нехай функції Ψ_* і ϕ_* визначені як вище. Припустимо, що P – будь-яка функція, задана на $[0,+\infty)$ і відмінна від $+\infty$ (вона може набувати значень $-\infty$, але $P\not\equiv-\infty$). Тоді функція $Q(\sigma)=\sup\{P(t)+\sigma t: t>0\}$ називається спряженою з P за Юнгом, а для неї з Теореми 2.5 з [8] випливає така лема.

Лема 1. *Нехай* $\Phi_*\in\Omega(-\infty,R), 0<R\leqslant+\infty$. *Для того, щоб* $Q(\sigma)=(1+o(1))\Phi_*(\sigma)$ *при* $\sigma\uparrow R$, *необхідно і достатньо, щоб для будь-якого* $\varepsilon>0$:

1) існувало $x_0=x_0(\varepsilon)$ *таке, щоб* $P(x)\leqslant -x\Psi_*(\phi_*(\frac{x}{1+\varepsilon}))$ *для всіх* $x\geqslant x_0$;

2) існувала зростаюча до $+\infty$ *послідовність* (x_k) *додатних чисел така, що* $P(x_k)\geqslant -x_k\Psi_*(\phi_*(\frac{x_k}{1-\varepsilon}))$ *для всіх* $k\geqslant 1$ *і*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{G_1(x_k,x_{k+1},\Phi_*)}{G_2(x_k,x_{k+1},\Phi_*)}=1, \tag{6}$$

де

$$G_1(x_k,x_{k+1},\Phi_*)=\frac{x_kx_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\Phi_*(\phi_*(t))}{t^2}dt,$$

$$G_2(x_k,x_{k+1},\Phi_*)=\Phi_*(\frac{1}{x_{k+1}-x_k}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\phi_*(t)dt).$$

Оскільки $\ln\mu(r,\varphi)=\sup\{\ln W_F(x)+rx : x\geqslant 0\}$, то для $P(x)=\ln W_F(x)$ матимемо $\ln\mu(r,\varphi)=Q(r)$ для $r\geqslant 0$ і, вибираючи $\Phi_*\in\Omega(-\infty,R)$ так, щоб $\Phi_*(r)=\Phi(r)$ для $r\geqslant r_0$, за лемою 1 приходимо до такого твердження.

Твердження 2. *Нехай $0<R\leqslant+\infty$ і $\Phi\in\Omega(0,R)$. Для того, щоб асимптотична рівність (2) була правильною, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon>0$:*

1) існувало $x_0=x_0(\varepsilon)$ таке, що $\ln W_F(x)\leqslant -x\Psi(\phi(\frac{x}{1+\varepsilon}))$ для всіх $x\geqslant x_0$;

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (x_k) додатних чисел така, що $\ln W_F(x_k)\geqslant -x_k\Psi(\phi(\frac{x_k}{1-\varepsilon}))$ для всіх $k\geqslant 1$ і виконувалась рівність (6) з $\Phi_*=\Phi$.

Об'єднуючи твердження 1 і 2, отримуємо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай $0<R\leqslant+\infty$, функція $\Phi\in\Omega(0,R)$ задовольняє умови твердження 1, а φ – аналітична в $\mathbb{D}_R$ характеристична функція ймовірнісного закону F. Для того, щоб асимптотична рівність (1) була правильною, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon>0$ виконувались умови 1) і 2) твердження 2.*

Наведемо два наслідки, які стосуються цілих та аналітичних в $\mathbb{D}_R$ функцій скінченного порядку.

Наслідок 1. *Нехай φ – ціла характеристична функція ймовірнісного закону F порядку $\rho>1$. Для того, щоб $\ln M(r,\varphi)=(1+o(1))Tr^\rho$ при $r\to+\infty$, де $T\in(0,+\infty)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon>0$:*

1) існувало $x_0=x_0(\varepsilon)$ таке, що $\ln W_F(x)\leqslant -(1-\varepsilon)T(\rho-1)(\frac{x}{T\rho})^{\frac{\rho}{\rho-1}}$ для всіх $x\geqslant x_0(\varepsilon)$;

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (x_k) така, що

$$\ln W_F(x_k)\geqslant -(1+\varepsilon)T(\rho-1)(\frac{x}{T\rho})^{\frac{\rho}{\rho-1}}\quad \text{і}\quad \frac{x_{k+1}}{x_k}\to 1\quad \text{при}\quad k\to\infty.$$

Доведення. Легко перевірити, що функція $\Phi(r)=Tr^\rho (r\geqslant r_0)$ задовольняє умови твердження 1. Для цієї функції $x\Psi(\phi(x))=T(\rho-1)(\frac{x}{T\rho})^{\frac{\rho}{\rho-1}}$. Тому з огляду на довільність ε з наведених в умовах 1) і 2) нерівностях з твердження 2 для $\ln W_F(x)$ випливають відповідні нерівності в умовах 1) і 2) наслідку 1. Нарешті, як доведено в [9] рівність (6) у випадку, коли функція $\frac{\Phi'(r)}{\Phi(r)}$ не зростає, рівносильна рівності $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}}{x_k}=1$. □

Наслідок 2. *Нехай φ – аналітична в $\mathbb{D}_R, 0<R<+\infty$, характеристична функція ймовірнісного закону F порядку $\rho>0$. Для того, щоб $\ln M(r,\varphi)=\dfrac{(1+o(1))T}{(R-r)\rho}$ при $r\uparrow R$, де $T>0$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon>0$:*

1) існувало $x_0=x_0(\varepsilon)$ таке, що $\ln(W_F(x)e^{Rx})\leqslant (T+\varepsilon)(\rho+1)(\frac{x}{T\rho})^{\frac{\rho}{\rho+1}}$ для всіх $x\geqslant x_0$;

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (x_k) додатних чисел така, що $\ln(W_F(x_k)e^{Rx_k})\geqslant (T-\varepsilon)(\rho+1)(\frac{x}{T\rho})^{\frac{\rho}{\rho+1}}$ і $\frac{x_{k+1}}{x_k}\to 1$ при $k\to\infty$.

Доведення. Як видно зі зауваження 2, функція $\Phi(r)=\frac{T}{(R-r)^\rho}$ задовольняє умови твердження 1. Для цієї функції $\phi(x)=R-(\frac{T\rho}{x})^{\frac{1}{\rho+1}}$, $\Psi(r)=r-\frac{R-r}{\rho}$, $x\Psi(\phi(x))= = Rx-T(\rho+1)(\frac{x}{T\rho})^{\frac{\rho}{\rho+1}}$. Тому з огляду на довільність $\varepsilon>0$ з наведених в умовах 1) і

2) нерівностях для $\ln W_F$ у твердженні 2 випливають відповідні нерівності в умовах 1) і 2) наслідку 2. Залишилось довести, що умова (6) у випадку, коли $\Phi(r)=\frac{T}{(R-r)^\rho}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\frac{x_{k+1}}{x_k}=1,\quad k\to\infty$, тобто, якщо приймемо $x_{k+1}=(1+\theta_k)x_k$, то $\theta_k\to 0, k\to\infty$.

Неважко перевірити, що

$$G_1(x_k, x_k(1+\theta_k),\Phi)=(\rho+1)T^{\frac{1}{\rho+1}}\rho^{-\frac{\rho}{\rho+1}}x_k^{\frac{\rho}{\rho+1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\left(1-\frac{1}{(1+\theta_k)^{\frac{1}{\rho+1}}}\right)$$

і

$$G_2(x_k, x_k(1+\theta_k),\Phi)=(\rho+1)^{-\rho}T^{\frac{1}{\rho+1}}\rho^{\frac{\rho^2}{\rho+1}}x_k^{\frac{\rho}{\rho+1}}\left(\frac{(1+\theta_k)^{\frac{\rho}{\rho+1}-1}}{\theta_k}\right)^{-\rho},$$

тобто

$$\frac{G_1(x_k, x_k(1+\theta_k),\Phi)}{G_2(x_k, x_k(1+\theta_k),\Phi)}=\frac{(\rho+1)^{\rho+1}}{\rho^\rho}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\left(1-\frac{1}{(1+\theta_k)^{\frac{1}{\rho+1}}}\right)\left(\frac{(1+\theta_k)^{\frac{\rho}{\rho+1}}-1}{\theta_k}\right)^\rho. \quad (7)$$

Якщо тепер $\theta_k\to 0$, то

$$\frac{G_1(x_k, x_k(1+\theta_k),\Phi)}{G_2(x_k, x_k(1+\theta_k),\Phi)}=\left(\frac{\rho+1}{\rho}\right)^{\rho+1}\frac{1+\theta_k}{\theta+k}\left(1-\left(1-\frac{\theta_k}{\rho+1}+O(\theta_k^2)\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1+\frac{\rho}{\rho+1}\theta_k+O(\theta_k^2)}{\theta_k}\right)^\rho=\frac{(\rho+1)^{\rho+1}}{\rho^\rho}(1+o(1))\frac{1}{\rho+1}\left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^\rho=1+o(1),\quad k\to\infty,$$

тобто виконується (6).

Навпаки, нехай виконується (6). Припустимо спочатку, що $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\theta_k=+\infty$. Тоді існує зростаюча до $+\infty$ послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j}\to+\infty$ $(j\to\infty)$, а для цієї послідовності з (7) отримаємо

$$\frac{G_1(x_{k_j}, x_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)}{G_2(x_{k_j}, x_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)}=\frac{(\rho+1)^{\rho+1}}{\rho^\rho}\theta_{k_j}^{-\frac{\rho}{\rho+1}}\to 0\quad (j\to\infty),$$

що неможливо. Якщо ж $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\theta_k=\theta\in(0,+\infty)$, то для відповідної послідовності θ_{k_j} матимемо

$$\frac{G_1(x_{k_j}, x_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)}{G_2(x_{k_j}, x_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)}=\frac{(\rho+1)^{\rho+1}}{\rho^\rho}\frac{1+\theta}{\theta}\left(1-\frac{1}{(1+\theta)^{\frac{1}{\rho+1}}}\right)\left(\frac{(1+\theta)^{\frac{\rho}{\rho+1}}-1}{\theta}\right)^\rho(1+o(1)),$$

$j\to\infty$ і з (6) випливає, що

$$\frac{(1+\theta)^{\frac{\rho}{\rho+1}}}{\theta^{\rho+1}}((1+\theta)^{\frac{1}{\rho+1}}-1)((1+\theta)^{\frac{1}{\rho+1}}-1)^\rho=\frac{\rho^\rho}{(\rho+1)^{\rho+1}}.$$

В [8, с. 100] доведено, що єдиним невід'ємним розв'язком цього рівняння є $\theta=0$. Тому $\theta_k\to 0 (k\to\infty)$ і наслідок 2 повністю доведено. $\square$

Список використаної літератури

1. *Ramacshandran B.* On the order and the type of entire characteristic functions / *B. Ramacshandran* // Ann. Math. – 1962 – Vol. 33, №4. – P. 1238-1255.
2. *Сорокивский В.М.* О росте характеристических функций вероятностных законов / *В.М.Сорокивский* // Изв. вузов. Матем. – 1979. – №9. – С. 48-52.
3. *Яковлева Н.И.* О росте целых характеристических функций вероятностных законов / *Н.И. Яковлева* // Теория функций и их приложения. – 1971. – Вып. 15. – С. 43-49.
4. *Яковлева Н.И.* О росте целых характеристических функций вероятностных законов / *Н.И. Яковлева* // Вопросы математической физики и функц. анализа. – Киев: Наук. думка, 1976.
5. *Кінаш О.М.* Зростання характеристичних функцій ймовірносних законів / *О.М. Кінаш, О.М. Пароля, М.М. Шеремета* // Доп. НАН України. – 2012. – №8. – С. 13-17.
6. *Линник Ю.В.* Разложение случайных величин и векторов / *Ю.В. Линник, Н.В. Островський.* – М.: Наука, 1972.
7. *Шеремета М.М.* Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій / *М.М. Шеремета, О.М. Сумик* // Матем. студії. – 1999. – Т. 11, №1. – С. 41-47.
8. *Сумик О.М.* Асимптотичне поводження спряжених за Юнгом функцій та застосування до рядів Діріхле: дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук / *О.М. Сумик.* – Львів, 2002. – 150 с.
9. *Заболоцький М.В.* Узагальнення теореми Ліндельофа / *М.В. Заболоцький, М.М. Шеремета* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №9. – С. 1177-1192.

Стаття: надійшла до редакції 24.10.2013
прийнята до друку 11.12.2013

ON REGULAR GROWTH OF CHARACTERISTIC FUNCTIONS

Marta Platsydem

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: marta0691@rambler.ru

For analytic in $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, characteristic functions φ of probability laws F a relations between the growth of $M(r,\varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}, r \in [0,R)$ and decrease of $W_F(x) = 1-F(x)+F(-x)$, $x \geqslant 0$ are established. The results are used to find the conditions on $W_F(x)$ for which the correct asymptotic equalities $\ln M(r,\varphi) = (1+o(1))Tr^\rho$ at $r \to \infty$, where $T > 0$, $\rho > 1$ for entire characteristic functions and $M(r,\varphi) = \dfrac{(1+o(1))T}{(R-r)^\rho}$ at $r \uparrow R$, where $T>0$, $\rho>0$ for analytic in the circle $\{z : |z|< R\}$ haracteristic functions.

Key words: analytic function, characteristic function, probability law, generalized order.

О РЕГУЛЯРНОМ РОСТЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Марта ПЛАЦИДЕМ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: marta0691@rambler.ru

Для аналитических в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, характеристических функций φ вероятностных законов F найдена связь между ростом $M(r,\varphi) = \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}, r \in [0,R)$ и убыванием $W_F(x) = 1 - F(x) + F(-x), x \geqslant 0$. Полученные результаты применены для нахождения условий на $W_F(x)$, при каких верны асимптотические равенства $\ln M(r,\varphi) = (1 + o(1))Tr^\rho$ при $r \to \infty$, где $T > 0$, $\rho > 1$ для целых характеристических функций и $M(r,\varphi) = \dfrac{(1+o(1))T}{(R-r)^\rho}$ при $r \uparrow R$, где $T > 0$, $\rho > 0$ для аналитических в круге $\{z : |z| < R\}$ характеристических функций.

Ключевые слова: аналитическая функция , характеристическая функция, вероятностный закон, обобщённый порядок.