ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 148–153
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 148–153

УДК 517.95

ОБМЕЖЕНІСТЬ ІНТЕГРАЛЬНИХ СЕРЕДНІХ ЛОГАРИФМІВ ЛОКСОДРОМНИХ ФУНКЦІЙ

Святослав ТАРАСЮК, Ольга ГУЩАК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: svt.tarasyuk@gmail.com, olya_khyl@ukr.net

Доведено, що інтегральні середні $m_s(r, f)$ логарифма локсодромної функції f обмежені і при $s = 2$ неперервні.

Ключові слова: локсодромна функція, еліптична функція, інтегральні середні, коефіцієнти Фур'є.

1. Вступ. Допоміжні поняття та твердження. Систематичне вивчення мультиплікативно періодичних мероморфних функцій розпочав О. Раузенбер ([1]). Валірон ([2]) назвав ці функції локсодромними, бо точки, в яких така функція набуває однакових значень, лежать на логарифмічних спіралях, а образи логарифмічних спіралей на сфері Рімана перетинають кожен меридіан під однаковим кутом. Локсодромні мероморфні функції дають просту конструкцію еліптичних функцій ([2], [3]).

Означення 1 ([2], [3]). *Нехай* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Функція* $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ *називається локсодромною з мультиплікатором* q, $0 < |q| < 1$, *якщо* f *мероморфна в* $\mathbb{C}^*$ *і* $\forall z \in \mathbb{C}^*$ *виконується рівність* $f(qz) = f(z)$.

Нагадаємо деякі властивості локсодромних функцій ([2], [3], [7]).

Кожна відмінна від нуля локсодромна функція з мультиплікатором q має не менше, ніж два полюси в кільці $A_r = \{z : |q|r < |z| \leqslant r\}$. Кількість полюсів функції f однакова в кожному кільці A_r.

Порядком m, $m \geqslant 2$, локсодромної функції f називають кількість її полюсів у кільці A_r.

Означення 2 ([4]). *Нехай* f *– мероморфна в кільці* $A = \{z : \frac{1}{r_0} < |z| < r_0\}$ *функція, де* $1 < r_0 \leqslant +\infty$. *Функція*

$$T_0(r, f) = m_0(r, f) + N_0(r, f), \quad 1 \leqslant r < r_0,$$

називається характеристикою Неванлінни функції f, *де*

$$m_0(r,f) = m(r,f) + m(\frac{1}{r}, f) - 2m(1,f), \quad m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

$$a^+ = \max(a,0), \quad N_0(r,f) = \int_1^r \frac{n_0(t,f)}{t} dt,$$

$n_0(r,f)$ – *лічильна функція полюсів функції* f *в кільці* $\{z : \frac{1}{r} < |z| \leqslant r\}$.

Теорема А ([5]). *Нехай* f – *локсодромна функція порядку* m. *Тоді*

$$T_0(r,f) = \frac{m}{\log \frac{1}{|q|}} \log^2 r + Q(\log r), \quad r > 1,$$

де $Q(t)$ – *така, що*

$$|Q(t)| \leqslant 2mt + C, \quad t > 0,$$

а C – *деяка стала.*

Означення 3 ([4]). *Нехай* λ – *додатна, неспадна, неперервна, необмежена на* $[1,+\infty)$ *функція і* f – *мероморфна функція в* $\mathbb{C}^*$. *Функцію* f – *називають функцією скінченого* λ*-типу, якщо* $T_0(r,f) \leqslant B\lambda(Cr)$ *за деяких сталих* B, C, *для всіх* $r \geqslant 1$.

Теорема Б ([4]). *Нехай функція* f *мероморфна в* $\mathbb{C}^*$,

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad r > 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Такі твердження еквівалентні:

а) f *є функцією скінченого* λ*-типу;*

б) $(\exists B, C)$ $(\forall r \geqslant 1)$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$*:* $|c_k(r,f)| + |c_k(\frac{1}{r}, f)| \leqslant B\lambda(Cr)$;

в) $(\exists B, C)$ $(\forall r \geqslant 1)$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$*:* $|c_k(r,f)| + |c_k(\frac{1}{r}, f)| \leqslant \frac{B\lambda(Cr)}{|k|+1}$.

Теорема В (Гаусдорфа-Юнга). *Нехай* $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = 1$, $1 < p \leqslant 2$, *а*

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $f \in L_p[0, 2\pi]$, *то*

$$\|f\|_{l_s} \overset{def}{=} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^s\right)^{1/s} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \overset{def}{=} \|f\|_{L_p}.$$

Якщо $\|f\|_{l_p} < \infty$, *то існує функція* $f \in L_s[0, 2\pi]$, *для якої* $c_k = c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}$, *і* $\|f\|_{L_s} \leqslant \|f\|_{l_p}$.

2. Властивості інтегральних середніх логарифмів локсодромних функцій. У цьому підрозділі доведено деякі властивості інтегральних середніх логарифмів локсодромних функцій.

Теорема 1. *Нехай $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ – локсодромна функція. Тоді для будь-якого фіксованого $s \geqslant 1$ інтегральні середні*

$$m_s(t, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log|f(te^{i\theta})||^s d\theta \right)^{1/s}$$

обмежені на $\mathbb{R}_+$.

Доведення. З теореми А випливає, що

$$T_0(r, f) \leqslant C_1 \log^2(r+1), \quad r > 1,$$

де C_1 – деяка стала. Тому f є функцією скінченого λ-типу при $\lambda(r) = \log^2(r+1)$.

За теоремою Б

$$|c_k(r, f)| \leqslant \frac{B\lambda(r)}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r > 0,$$

за деякого $B > 0$.

Нехай $1 < r \leqslant \frac{1}{|q|}$. Тоді

$$|c_k(r, f)| \leqslant \frac{B\log^2(\frac{1}{|q|}+1)}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

З огляду на теорему В, при $s \geqslant 2$ одержимо

$$m_s(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log|f(re^{i\theta})||^s d\theta \right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(r, f)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{B\log^2\left(\frac{1}{|q|}+1\right)}{|k|+1} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{p} = 1.$$

Нехай $t > 0$, а $n \in \mathbb{Z}$ таке, що $n \in \left[\frac{-\log t}{\log|q|} - 1, \frac{-\log t}{\log|q|}\right)$. Тоді $1 < |q|^n t \leqslant \frac{1}{|q|}$. З локсодромності функції f випливає, що

$$(\forall n \in \mathbb{Z}): \quad m_s(|q|^n t, f) = m_s(t, f), \quad t > 0.$$

Тому

$$m_s(t, f) \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(|k|+1)^p} \right)^{\frac{1}{p}} B\log^2\left(\frac{1}{|q|}+1\right), \quad t > 0.$$

Отже, обмеженість інтегральних середніх $m_s(t, f)$ при $s \geqslant 2$ доведено.

Оскільки інтегральні середні $m_s(t, f)$ монотонно неспадні функції змінної s, то при $1 \leqslant s < 2$ їхня обмеженість також випливає з останньої нерівності.

Теорему 1 доведено. □

Теорема 2. *Нехай $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ – локсодромна функція. Тоді для всіх $k \in \mathbb{Z}$ функції $c_k(r, f)$ і $m_2(r, f)$ – неперервні на $(0, +\infty)$.*

Доведення. Нехай q – мультиплікатор функції f. Тоді

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ik\varphi}\log|f(q^nre^{i\varphi})|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ik\varphi}\log|f(|q|^nre^{in\alpha}e^{i\varphi})|d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ik\theta}\log|f(|q|^nre^{i\theta})|d\theta=c_k(|q|^nr,f),$$

тобто

$$c_k(|q|^nr,f)=c_k(r,f),\quad r>0,\quad n\in\mathbb{Z},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Це означає, що коефіцієнти $c_k(r,f)$ мультиплікативно періодичні на $\mathbb{R}^+$ з мультиплікатором $|q|$.

Доведемо неперервність $c_k(r,f),\quad k\neq 0$.

Нехай $A=\{z:|q|\leqslant|z|\leqslant\frac{1}{|q|}\}$. Через A^* позначимо A з розрізами $\{z=\tau a,\quad \tau\geqslant 1\}$, якщо $|a|>1$, і $\{z=\tau a,\quad 0\leqslant\tau\leqslant 1\}$, якщо $|a|<1$, де a є нулем чи полюсом функції f.

Нехай $F(z)=\frac{f(z)}{z^p}$, де $p=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$, і виберемо деяке значення $\log F(1)$. Як і в ([4]) приймемо

$$\log F(z)\stackrel{def}{=}\log F(1)+\int\limits_1^z\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}d\xi,\quad z\in A^*.$$

Якщо $1<r\leqslant\frac{1}{|q|}$, тоді, як і в [4] та [7], отримаємо

$$c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f)=\frac{1}{2}(\alpha_kr^k+\overline{\alpha}_{-k}r^{-k}+\alpha_kr^{-k}+\overline{\alpha}_{-k}r^k)+$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{1<|a_j|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{a_j}\right)^k-\left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k\right)+\frac{1}{2k}\sum_{\frac{1}{r}\leqslant|a_j|\leqslant 1}\left((\overline{a}_jr)^k-\left(\frac{1}{a_jr}\right)^k\right)-$$

$$-\frac{1}{2k}\sum_{1<|a_j|\leqslant r}\left(\left(\frac{r}{b_j}\right)^k-\left(\frac{\overline{b}_j}{r}\right)^k\right)-\frac{1}{2k}\sum_{\frac{1}{r}\leqslant|b_j|\leqslant 1}\left((\overline{b}_jr)^k-\left(\frac{1}{b_jr}\right)^k\right)-\frac{n_k(\mathbf{T})}{2k}\left(\frac{1}{r^k}+r^k\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha_k+\overline{\alpha}_k)(r^k+r^{-k})+\frac{1}{2k}\int_1^r\left[\left(\frac{r}{t}\right)^k-\left(\frac{t}{r}\right)^k\right]dn_k(t,f)-\frac{n_k(\mathbb{T})}{2k}\left(\frac{1}{r^k}+r^k\right),\quad k\neq 0,$$

де $\mathbb{T}$ – одиничне коло,

$$n_k(\mathbb{T})\stackrel{def}{=}\sum_{|a_j|=1}e^{-ik\gamma_j},\quad n_k(t,f)=\sum_{\frac{1}{t}\leqslant|a_j|\leqslant t}e^{-ik\gamma_j},\quad a_j=|a_j|e^{i\gamma_j},$$

a_j і b_j – відповідно послідовність нулів і полюсів функції f, α_k – коефіцієнти розвинення в ряд Лорана функції $\log F(z)$ в деякому кільці з центром у точці $z=0$, яке містить одиничне коло.

Подібно як в [7], інтегруючи частинами, отримаємо

$$c_k(r,f)+c_k(\frac{1}{r},f)=\frac{1}{2}(\alpha_k+\overline{\alpha}_k)(r^k+r^{-k})+\frac{1}{2}\int_1^r\left[\left(\frac{r}{t}\right)^k-\left(\frac{t}{r}\right)^k\right]\frac{n_k(t,f)}{t}dt-\frac{r^k}{k}n_k(\mathbb{T})=$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_k+\overline{\alpha}_k)(r^k+r^{-k})+\frac{r^k}{2}\int_1^r \frac{1}{t^{k+1}}n_k(t,f)dt-\frac{1}{2r^k}\int_1^r t^{k-1}n_k(t,f)dt-\frac{r^k}{k}n_k(\mathbb{T}),\ k\neq 0.$$

Отже, $\forall k \neq 0$ коефіцієнти $c_k(r,f)$ неперервні на $\left[1, \frac{1}{|q|}\right]$ як сума неперервних функцій та інтегралів зі змінною верхньою межею. Оскільки $c_k(r,f)$ мультиплікативно періодичні, то вони неперервні на $\mathbb{R}^+$.

Доведемо неперервність $c_0(r,f)$. Довільну мероморфну функцію f можна записати як частку двох голоморфних функцій g і h

$$f(re^{i\theta}) = \frac{g(re^{i\theta})}{h(re^{i\theta})}.$$

Звідси

$$\log|f(re^{i\theta})| = \log|g(re^{i\theta})| - \log|h(re^{i\theta})|.$$

За означенням

$$c_0(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(re^{i\theta})|d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|h(re^{i\theta})|d\theta.$$

Логарифм модуля голоморфної функції є субгармонійною функцією. Оскільки інтеграл від субгармонійної функції є опуклою функцією стосовно $\log r$ ([6]), тому і неперервною, то коефіцієнт $c_0(r,f)$ – неперервна функція.

Отже, для всіх $k \in \mathbb{Z}$ коефіцієнти $c_k(r,f)$ неперервні на $\mathbb{R}_+$.

Неперервність $m_2(r,f)$ отримуємо з рівності Парсеваля

$$m_2(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|f(re^{i\theta})||^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(r,f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

оскільки з (1) випливає рівномірна збіжність ряду у співвідношенні (2). □

Список використаної літератури

1. *Rausenberger O.* Lehrbuch der Theorie der periodischen functionen einer Variabeln / *O. Rausenberger.* – Leipzig: Druck und Ferlag von B.G. Teubner, 1884.
2. *Valiron G.* Cours d'Analyse Mathematique. Theorie des fonctions: 2nd Edition. / *G. Valiron.* – Paris: Masson et. Cie., 1947.
3. *Hellegouarch Y.* Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles / *Y. Hellegouarch.* – San Diego: Academic Press, 2002.
4. *Kondratyuk A.* Meromorphic functions in multiply connected domains / *A. Kondratyuk, I. Laine* // Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. – 2006. – Vol. 10. – P. 9-111.
5. *Khrystiyanyn A.Ya.* Growth characteristics of loxodromic and elliptic functions / *A.Ya. Khrystiyanyn, A.A. Kondratyuk, N.B. Sokul's'ka* // Mat. Stud. – 2012. – Vol. 37, №1. – P. 52-57.
6. *Хейман У.* Субгармонические функции / *У. Хейман, П. Кеннеди.* – М.: Мир, 1980.
7. *Голдак М.* Обернені формули для коефіцієнтів Фур'є мероморфних у кільцях функцій / *М. Голдак, А. Християнин* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 71-77.

Стаття: надійшла до редакції 23.10.2013
прийнята до друку 21.01.2014

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79

BOUNDEDNESS OF INTEGRAL MEANS OF LOXODROMIC FUNCTION LOGARITHMS

Svyatoslav TARASYUK, Olha HUSHCHAK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: tidisi.dt@gmail.com, olya_khyl@ukr.net

It is proved that the integral means $m_s(r, f)$ of a loxodromic function logarithm are bounded and in the case $s = 2$ they are continuous.

Key words: loxodromic function, elliptic function, integral means, Fourier coefficients.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ЛОГАРИФМОВ ЛОКСОДРОМНЫХ ФУНКЦИЙ

Святослав ТАРАСЮК, Ольга ГУЩАК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: tidisi.dt@gmail.com, olya_khyl@ukr.net

Доказано, что интегральные средние $m_s(r, f)$ логарифма локсодромной функции f ограничены и при $s = 2$ непрерывны.

Ключевые слова: локсодромная функция, эллиптическая функция, интегральные средние, коэффициенты Фурье.