ISSN 2078-3744. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 12–32*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 12–32

УДК 517.95

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ПІВЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ПОКАЗНИКОМ НЕЛІНІЙНОСТІ $q(x,t) > 2 + \frac{2}{n}$

Олег БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Досліджено мішану задачу Діріхле для рівняння

$$u_t - \Delta u + g(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u = f(x,t)$$

у циліндричній області з $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. За умови $q(x,t) \geq q_0 > 2 + \frac{2}{n}$ доведено існування слабкого розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: нелінійне параболічне рівняння, мішана задача, змінний показник нелінійності, узагальнені простори Лебега, слабкий розв'язок, функція Гріна.

1. Вступ. Ми продовжуємо дослідження задачі, розглянутої в [1], [2]. Нехай $T > 0$, $n \in \mathbb{N}$ – фіксовані числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega$, $\mathcal{T} = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s < t \leq T\}$, $\Lambda = \{(x,t,\xi,s) \in \mathbb{R}^{2n+2} \mid x \in \Omega,\ \xi \in \Omega,\ (t,s) \in \mathcal{T}\}$, $Q_{0,T} = \Omega \times (0,T]$. Розглянемо задачу

$$u_t - \Delta u + g(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{3}$$

де $\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_1x_1}$ – оператор Лапласа, g, q, f, u_0 – деякі функції.

Існування розв'язку задачі (1)-(3) за умови, коли змінний показник нелінійності рівняння – функція q – задовольняє умову $q(x,t) < 2$ доведено у [1]. Відповідну задачу з неоднорідною крайовою умовою замість (2) вивчено у [2]. Задачі для параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності розглянуто також, наприклад, у [3]-[6]. Детальний огляд літератури за тематикою статті можна знайти у [1].

Мета нашої праці – довести існування узагальненого розв'язку задачі (1)-(3) у випадку $q(x,t) > 2$.

2. Формулювання основних результатів. Для формулювання результату введемо необхідні позначення. Для кожної області $Q \subset \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) через $\mathcal{L}(Q)$ позначимо множину всіх вимірних за Лебегом підмножин Q, а через $\mathcal{ML}(Q)$ – множину всіх функцій $v : Q \to \mathbb{R}^1$, вимірних стосовно $\mathcal{L}(Q)$. Нехай $L^p(Q)$ ($p \geq 1$) – стандартний простір Лебега (див. [7, с. 37]) з нормою

$$||u; L^p(Q)|| := \Big(\int\limits_Q |u(y)|^p \, dy\Big)^{1/p},$$

$W^{m,p}(Q)$ ($m \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$) – простір Соболєва (див. [7, с. 44]) з нормою

$$||u; W^{m,p}(Q)|| := \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} ||D_x^\alpha u; L^p(Q)||^p\Big)^{1/p}.$$

У випадку $Q = (a, b) \subset \mathbb{R}$ писатимемо $L^p(a, b)$ замість $L^p((a, b))$, а при $Q = \Omega$ вживатимемо позначення

$$||u||_p := ||u; L^p(\Omega)||, \qquad ||u||_{m,p} := ||u; W^{m,p}(\Omega)||. \tag{4}$$

Аналогічно, як в [7, с. 145], будемо у разі потреби розглядати функцію $u = u(x, t)$, $(x, t) \in Q_{0,T}$, як функцію, яка кожному моменту часу $t \in (0, T)$ ставить у відповідність функцію змінної $x \in \Omega$ і писатимемо $u(t)$ замість $u(\cdot, t)$. Через $L^k(0, T; L^p(\Omega))$ ($k \geq 1$, $p \geq 1$) позначимо стандартний простір Лебега (див. [7, с. 154]) з нормою

$$||u||_{p,k,T} \equiv ||u; L^k(0, T; L^p(\Omega))|| := \Big(\int\limits_0^T ||u(t)||_p^k \, dt\Big)^{1/k}. \tag{5}$$

Нехай $C^{(2,\omega)}$ – клас Діні гіперповерхонь у просторі $\mathbb{R}^n$, що відповідає деякій функції $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (див., наприклад, [2, с. 32-33]). Припустимо, що виконуються умови:

(E): $\partial\Omega \in C^{(2,\omega)}$;

(G): $g \in \mathcal{ML}(Q_{0,T})$, $|g(x, t)| \leq g^0 < +\infty$ майже для всіх $(x, t) \in Q_{0,T}$;

(Q): $q \in \mathcal{ML}(Q_{0,T})$, $2 < q_0 \leq q^0 < +\infty$, де $q_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in Q_{0,T}} q(x, t)$, $q^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in Q_{0,T}} q(x, t)$;

(UF): $u_0 \in L^p(\Omega)$, $f \in L^\varkappa(0, T; L^p(\Omega))$, де $p > 1$ та $\varkappa > 1$ – фіксовані числа.

Нехай $\mathtt{G}$ – функція Гріна (див. [8, с. 1118]) мішаної задачі

$$u_t - \Delta u = h(x, t), \quad (x, t) \in Q_{0,T}, \qquad u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad u|_{t=0} = 0. \tag{6}$$

Зауважимо (див. теорему 2.8 з [9, с. 136]), що при виконанні умови **(E)** така функція $\mathtt{G}$ існує і задовольняє на Λ оцінку

$$|D_x^\alpha \mathtt{G}(x, t, \xi, s)| \leq M_1 \, (t - s)^{-\frac{n+|\alpha|}{2}} \, e^{-M_2 \frac{|x-\xi|^2}{t-s}}, \quad |\alpha| \leq 2, \tag{7}$$

де $M_1, M_2 > 0$ – сталі; α – мультиіндекс, та формулу згортки

$$\mathtt{G}(x, t, \xi, s) = \int\limits_\Omega \mathtt{G}(x, t, y, \tau)\mathtt{G}(y, \tau, \xi, s) \, dy, \quad \tau \in (s, t). \tag{8}$$

Оскільки головна частина (1) має сталі коефіцієнти, то можна довести, що

$$\mathtt{G}(x, t + \tau, \xi, s + \tau) = \mathtt{G}(x, t, \xi, s), \quad \tau \in (0, T - t). \tag{9}$$

Аналогічно як в [1] подамо означення розв'язку нашої задачі.

Означення 1. *Слабким (узагальненим) розв'язком задачі (1)-(3) називатимемо таку функцію* $u \in L^{\varkappa}(0,\tau;L^p(\Omega))$, *яка майже для всіх* $(x,t) \in Q_{0,T}$ *задовольняє рівність*

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} \mathtt{G}(x,t,\xi,0)u_0(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} \mathtt{G}(x,t,\xi,s)f(\xi,s)\,d\xi ds -$$

$$- \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} \mathtt{G}(x,t,\xi,s)g(\xi,s)|u(\xi,s)|^{q(\xi,s)-2}u(\xi,s)\,d\xi ds. \tag{10}$$

Якщо $\tau = T$, *то розв'язок називатимемо глобальним. При* $\tau \in (0,T)$ *розв'язок називатимемо локальним.*

Основний результат праці – наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови **(E)**, **(G)**, виконується умова **(Q)** зі сталими* q_0 *і* q^0, *причому* $2+\frac{n}{2} < q_0 \le q^0 < +\infty$ *й умова **(UF)** зі сталими* $p>1$, $\varkappa \in (q^0-1,p)$. *Якщо, додатково,* $p > \frac{n}{2}(q^0-1)^2$, $\varkappa \in [\frac{2p(q^0-1)}{2p-n(q^0-1)}, \frac{2p}{n(q^0-2)})$, *то мішана задача (1)-(3) має слабкий розв'язок* $u \in L^{\varkappa}(0,\tau;L^p(\Omega))$ *при виконанні однієї з умов:*

1) $\tau \in (0,T]$ *є досить малим (локальний розв'язок);*
2) *норми* u_0 *в* $L^p(\Omega)$ *та* f *в* $L^{\varkappa}(0,T;L^p(\Omega))$ *є досить малими (глобальний розв'язок для малих вихідних даних).*

Теорема 1 поширює результати праці [10] на випадок рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Її доведення подано у підрозділі 4. Деякі допоміжні твердження містить третій підрозділ цієї праці.

3. Допоміжні факти. Нехай X – деякий нормований простір з нормою $||\cdot;X||$, $B \subset X$, $\mathcal{A}: X \to X$.

Означення 2. *Оператор* $\mathcal{A}$ *називається стиском на множині* B *(див.* [11, с. 380]*), якщо існує така стала (коефіцієнт стиску)* $D \in (0,1)$, *що для всіх* $x,y \in B$ *виконується оцінка* $||\mathcal{A}x - \mathcal{A}y;X|| \le D||x-y;X||$.

Для доведення теореми 1 користуватимемося таким твердженням.

Твердження 1. *(Теорема з* [11, с. 381]*). Нехай* X *– банахів простір,* $B \subset X$ *– замкнена множина,* $\mathcal{A}: X \to X$ *– оператор, який задовольняє умови: 1)* $\mathcal{A}(B) \subset B$; *2)* $\mathcal{A}$ *– стиск на* B *з коефіцієнтом стиску* D. *Тоді оператор* $\mathcal{A}$ *має в* B *єдину нерухому точку* x^*. *Крім того, якщо* $x_0 \in B$ *та* $x_j := \mathcal{A}x_{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, *то:*

i) $\forall\, j \in \mathbb{N}$: $x_j \in B$;
ii) $x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ *в просторі* X;
iii) $\forall\, j \in \mathbb{N}$: $||x_j - x^*;X|| \le \frac{D^j}{1-D}\,||\mathcal{A}x_0 - x_0;X||$.

Для того, щоб використати твердження 1, подамо рівність (10) у вигляді

$$u = \mathcal{A}u, \tag{11}$$

де $\mathcal{A}$ – деякий оператор. Для зручності введемо додаткові позначення. Розглянемо двопараметричну сім'ю лінійних інтегральних операторів $\{\mathcal{I}(t,s)\}_{(t,s)\in\mathcal{T}}$, сім'ю нелінійних операторів Немицького $\{\mathcal{N}(t)\}_{t\in[0,T]}$ і лінійний інтегральний оператор $\mathcal{J}_0$ такі, що

$$(\mathcal{I}(t,s)v)(x) := \int\limits_\Omega \mathtt{G}(x,t,\xi,s)v(\xi)\,d\xi, \quad x\in\Omega, \quad (t,s)\in\mathcal{T}, \tag{12}$$

$$(\mathcal{N}(t)v)(x) := g(x,t)|v(x)|^{q(x,t)-2}v(x), \quad x\in\Omega, \quad t\in[0,T], \tag{13}$$

$$(\mathcal{J}_0 v)(x,t) := \Big(\mathcal{I}(t,0)v\Big)(x) = \int\limits_\Omega \mathtt{G}(x,t,\xi,0)v(\xi)\,d\xi, \ \ (x,t)\in Q_{0,T}, \tag{14}$$

де v – функція змінної x. Нехай лінійний інтегральний оператор $\mathcal{J}$ такий:

$$(\mathcal{J}w)(x,t) := \int\limits_0^t \Big(\mathcal{I}(t,s)w(s)\Big)(x)\,ds = \int\limits_0^t\int\limits_\Omega \mathtt{G}(x,t,\xi,s)w(\xi,s)\,d\xi ds, \ (x,t)\in Q_{0,T}. \tag{15}$$

Тут w – функція змінних (x,t). Нехай сім'я елементів $\{z_0(t)\}_{t\in[0,T]}$ є такою, що

$$(z_0(t))(x) := (\mathcal{J}_0u_0)(x,t) + (\mathcal{J}f)(x,t), \quad x\in\Omega, \quad t\in[0,T], \tag{16}$$

де u_0 і f взято з умови **(UF)**. Аргумент x часто опускатимемо, а означення введених операторів (область визначення і т.д.) уточнимо далі.

Зрозуміло, що (11) збігається з (10), якщо

$$(\mathcal{A}u)(t) := z_0(t) - \int\limits_0^t \mathcal{I}(t,s)\mathcal{N}(s)u(s)\,ds, \quad t\in[0,T]. \tag{17}$$

Для зручності потрібні нам далі числові перетворення подано у вигляді леми.

Лема 1. *Нехай числа q_0, q^0, r і p задовольняють умови $2 < q_0 \le q^0 < +\infty$, $1 < r \le p < +\infty$;*

$$\varkappa := \frac{2}{n}\,\frac{pr}{p-r} \quad (\text{для } r\ne p), \qquad \phi := \frac{n}{2}\,(q_0-2); \tag{18}$$

функції σ і β означено так:

$$\sigma(p_1,p_2) := \frac{n}{2}\Big(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\Big), \quad p_1,p_2\ge 1, \tag{19}$$

$$\beta(s_1,s_2) := \frac{n(s_1-2)}{2s_2}, \quad s_1\ge 2, \quad s_2\ge 1. \tag{20}$$

Нехай також $\gamma>2$ – фіксоване число. Тоді виконуються такі твердження:

1) *$\sigma(r,p)\ge 0$, $\varkappa = \frac{1}{\sigma(r,p)} > 0$ при $r\ne p$, $\beta(q^0,r) = \frac{\phi}{r}\ge 0$, $\beta(\gamma,p)\le\beta(\gamma,r)$;*
2) *$\phi>1$ тоді і тільки тоді, коли $q_0 > 2+\frac{2}{n}$;*
3) *якщо $p>r\ge\frac{n}{2}(q^0-1)$, то $0<\sigma(r,p)<\frac{1}{q^0-1}$ та $\varkappa > q^0-1$;*
4) *$p>\phi$ тоді і тільки тоді, коли $\beta(q^0,p)\in(0,1)$;*
5) *$p>r(\gamma-1)$ тоді і тільки тоді, коли $\beta(\gamma,p)\varkappa<1$;*
6) *$\beta(\gamma,p)\varkappa = \beta(\gamma,r)\varkappa-(\gamma-2)$;*

7) *якщо* $p > \frac{n}{2}(q^0-1)^2$ *і* $r \in [\frac{n}{2}(q^0-1), \frac{p}{q^0-1})$, *то* $\varkappa \in [\frac{2p(q^0-1)}{2p-n(q^0-1)}, \frac{2p}{n(q^0-2)})$.

Доведення. 1) Твердження цього пункту очевидне.

2) Такі нерівності еквівалентні: $\phi > 1$, $\frac{n}{2}(q_0-2) > 1$, $q_0 - 2 > \frac{2}{n}$, $q_0 > 2 + \frac{2}{n}$.

3) Зрозуміло, що при $p > r$ отримаємо нерівності $\varkappa > 0$, $\sigma > 0$ і тому, враховуючи рівність з пункту 1, оцінки $\sigma(r,p) < \frac{1}{q^0-1}$ та $\varkappa > q^0 - 1$ є еквівалентними.

Оскільки $r \geq \frac{n}{2}(q^0-1)$, то $r \geq \frac{n(q^0-2)(q^0-1)}{2(q^0-2)} = \phi\,\frac{q^0-1}{q^0-2}$, зокрема $r > \phi$. Тоді

$$\frac{1}{r} \leq \frac{q^0-2}{\phi(q^0-1)} = \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi(q^0-1)}.$$

Отже,

$$\frac{1}{\phi(q^0-1)} \leq \frac{1}{\phi} - \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\phi} \leq (q^0-1)\Big(\frac{1}{\phi} - \frac{1}{r}\Big), \quad \frac{1}{\phi} - (q^0-1)\Big(\frac{1}{\phi} - \frac{1}{r}\Big) \leq 0.$$

Тому для всіх додатних p, тобто і для $p > r$ одержуємо

$$\frac{q^0-1}{p} > \frac{1}{\phi} - (q^0-1)\Big(\frac{1}{\phi} - \frac{1}{r}\Big) = \frac{1}{\phi} - \frac{q^0-1}{\phi} + \frac{q^0-1}{r} = \frac{2-q^0}{\phi} + \frac{q^0-1}{r} =$$

$$= \frac{2-q^0}{\frac{n}{2}(q^0-2)} + \frac{q^0-1}{r} = -\frac{2}{n} + \frac{q^0-1}{r}.$$

Поділивши отриману нерівність на $q^0 - 1 > 0$, отримаємо таке:

$$\frac{1}{p} > -\frac{2}{n(q^0-1)} + \frac{1}{r}, \quad \frac{2}{n(q^0-1)} > \frac{1}{r} - \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{q^0-1} > \frac{n}{2}\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\Big) = \sigma(r,p).$$

4) Твердження цього пункту очевидне.

5) Зрозуміло, що $p > r$ і що наступні нерівності еквівалентні

$$p > r(\gamma-1), \quad p - r > r(\gamma-2), \quad 1 > \frac{r(\gamma-2)}{p-r} = \frac{n(\gamma-2)}{2p}\,\frac{2}{n}\,\frac{pr}{p-r} = \beta(\gamma,p)\varkappa.$$

6) Оскільки

$$\beta(\gamma,p) + \sigma(r,p)(\gamma-2) = \frac{n(\gamma-2)}{2p} + \frac{n}{2}\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\Big)(\gamma-2) =$$

$$= \frac{n(\gamma-2)}{2p} + \frac{n(\gamma-2)}{2r} - \frac{n(\gamma-2)}{2p} = \frac{n(\gamma-2)}{2r} = \beta(\gamma,r),$$

то з пункту 1 випливає формула $\beta(\gamma,p) + \frac{1}{\varkappa}(\gamma-2) = \beta(\gamma,r)$.

7) Зрозуміло, що $\varkappa := \frac{2}{n}\,\frac{p}{\frac{p}{r}-1}$ – зростаюча функція за r. Тоді

$$\varkappa|_{r=\frac{n}{2}(q^0-1)} = \frac{2}{n}\,\frac{p}{\frac{p}{\frac{n}{2}(q^0-1)} - 1} = \frac{2p}{\frac{2p}{q^0-1} - n} = \frac{2p(q^0-1)}{2p - n(q^0-1)},$$

$$\varkappa|_{r=\frac{p}{q^0-1}} = \frac{2}{n}\,\frac{p}{\frac{p}{\frac{p}{q^0-1}} - 1} = \frac{2p}{n(q^0-2)},$$

звідки і випливає твердження нашого пункту.

Лему доведено. □

Отримаємо деякі властивості введених операторів.

Лема 2. *Нехай функція* $\mathtt{G} \in \mathcal{ML}(\Lambda)$ *задовольняє оцінку (7),* $\lambda \in [1, +\infty)$ *– фіксоване число,*

$$J_\lambda^\alpha(x,t,s) := \int\limits_\Omega |D_x^\alpha \, \mathtt{G}(x,t,\xi,s)|^\lambda \, d\xi, \qquad \widehat{J}_\lambda^\alpha(\xi,t,s) := \int\limits_\Omega |D_x^\alpha \, \mathtt{G}(x,t,\xi,s)|^\lambda \, dx, \tag{21}$$

$(x,t,\xi,s) \in \Lambda$, α *– мультиіндекс. Тоді існує така стала* $\mathscr{M}_1(\lambda) > 0$*, що для всіх* α *(*$|\alpha| \le 2$*) і для всіх* $(x,t,\xi,s) \in \Lambda$ *виконуються оцінки*

$$J_\lambda^\alpha \le \frac{\mathscr{M}_1(\lambda)}{(t-s)^{\frac{n}{2}(\lambda-1)+\frac{|\alpha|}{2}\lambda}}, \qquad \widehat{J}_\lambda^\alpha \le \frac{\mathscr{M}_1(\lambda)}{(t-s)^{\frac{n}{2}(\lambda-1)+\frac{|\alpha|}{2}\lambda}}. \tag{22}$$

Доведення. Використовуючи оцінку (7) та збільшивши область інтегрування з Ω до $\mathbb{R}^n$, одержимо

$$J_\lambda^\alpha \le \frac{M_1^\lambda}{(t-s)^{\lambda\frac{n+|\alpha|}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-M_2\lambda\frac{|x-\xi|^2}{t-s}} \, d\xi.$$

Зробивши заміну змінних $\xi \rightsquigarrow \eta$, де $\xi = x + \sqrt{\frac{t-s}{M_2\lambda}}\,\eta$, $d\xi = (\sqrt{\frac{t-s}{M_2\lambda}})^n \, d\eta$, одержимо

$$J_\lambda^\alpha \le \frac{M_1^\lambda}{(t-s)^{\lambda\frac{n+|\alpha|}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(t-s)^{\frac{n}{2}}}{(M_2\lambda)^{\frac{n}{2}}} \, e^{-|\eta|^2} \, d\eta = \frac{\mathscr{M}_1(\lambda)}{(t-s)^{\frac{n}{2}(\lambda-1)+\frac{|\alpha|}{2}\lambda}},$$

де $\mathscr{M}_1(\lambda) = M_1^\lambda(\frac{\pi}{M_2\lambda})^{\frac{n}{2}}$. Другу оцінку з (22) з тією самою сталою $\mathscr{M}_1(\lambda)$ отримуємо аналогічно. Лему доведено. □

Зауважимо, що у випадку $|\alpha| = 0$ оцінки (22) отримано у лемі 2 [1, с. 83]. Тепер доведемо аналог півгрупової властивості для введених операторів.

Лема 3. *Нехай функція* $\mathtt{G} \in \mathcal{ML}(\Lambda)$ *задовольняє рівності (7)-(9), сім'я операторів* $\{\mathcal{I}(t,s)\}_{(t,s)\in\mathcal{T}}$ *означена у (12). Тоді для всіх* $(t_1,s_1) \in \mathcal{T}$, $(t_2,s_2) \in \mathcal{T}$ *(*$t_2 \in (0, T-t_1)$, $s_2 \in (0, t_1+t_2-s_1)$*) виконується рівність*

$$\mathcal{I}(t_1+t_2, s_1+s_2) = \mathcal{I}(t_1,s_1) \circ \mathcal{I}(t_2,s_2). \tag{23}$$

Доведення. Використавши (8) (зауважимо, що $\tau = s_1 + t_2 \in (s_1+s_2, t_1+t_2)$, бо $s_1 < t_1$, $s_2 < t_2$), (9) та теорему Фубіні, отримаємо

$$\mathcal{I}(t_1+t_2, s_1+s_2)v = \int\limits_\Omega \mathtt{G}(x, t_1+t_2, \xi, s_1+s_2)\, v(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_\Omega \mathtt{G}(x, t_1+t_2, y, s_1+t_2)\mathtt{G}(y, s_1+t_2, \xi, s_1+s_2)\, dy\Big) v(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_\Omega \mathtt{G}(x, t_1, y, s_1)\mathtt{G}(y, t_2, \xi, s_2)\, dy\Big) v(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_\Omega \mathtt{G}(x, t_1, y, s_1) \Big(\int\limits_\Omega \mathtt{G}(y, t_2, \xi, s_2)\, v(\xi)\, d\xi\Big)\, dy.$$

Тому $(\mathcal{I}(t_1+t_2, s_1+s_2)v)(x) = \Big(\mathcal{I}(t_1,s_1)\,(\mathcal{I}(t_2,s_2)v)(y)\Big)(x)$ і лему доведено. □

Для доведення наступної леми ми потребуватимемо такого твердження.

Твердження 2. *(Теорема з* [12, с. 293]*). Якщо* $m \in \mathbb{N}$*,* $\partial\Omega \in C^m$ *та* $1 < q_1 < < q_2 < +\infty$*,* $a := \frac{n}{m}\,(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}) \le 1$*, то існує стала* $\mathcal{C}(q_1, q_2, m) > 0$ *така, що для всіх* $v \in W^{m,q_1}(\Omega)$ *виконується (див. позначення (4)) нерівність Соболева*

$$||v||_{q_2} \le \mathcal{C}(q_1, q_2, m)\, ||v||^{a}_{m,q_1} ||v||^{1-a}_{q_1}. \tag{24}$$

Зауважимо також, що для всіх $\lambda > 0$, $\eta_1, \dots, \eta_m \in \mathbb{R}$ виконується оцінка

$$|\eta_1 + \ldots + \eta_m|^{\lambda} \le m^{\lambda}(\max_{1\le j\le m} |\eta_j|)^{\lambda} \le m^{\lambda}(|\eta_1|^{\lambda} + \ldots + |\eta_m|^{\lambda}). \tag{25}$$

Лема 4. *Нехай функція* $\mathtt{G} \in \mathcal{ML}(\Lambda)$ *задовольняє оцінку (7), сім'я операторів* $\{\mathcal{I}(t, s)\}_{(t,s)\in\mathcal{T}}$ *означена у (12),* σ *– функція з (19),* $1 < p_1 \le p_2 < +\infty$*. Тоді для всіх* $(t, s) \in \mathcal{T}$ *лінійний оператор* $\mathcal{I}(t, s) : L^{p_1}(\Omega) \to L^{p_2}(\Omega)$ *є обмеженим (тому і неперервним). Крім того, існує стала* $\mathscr{M}_2(p_1, p_2) > 0$ *така, що для всіх* $v \in L^{p_1}(\Omega)$ *та* $(t, s) \in \mathcal{T}$ *виконується нерівність*

$$||\mathcal{I}(t, s)v||_{p_2} \le \frac{\mathscr{M}_2(p_1, p_2)}{(t - s)^{\sigma(p_1,p_2)}}||v||_{p_1}. \tag{26}$$

Нерівність (26) виконується також при $p_1 = p_2 = 1$*.*

Доведення. Для доведення леми достатньо довести (26). Нехай спочатку $p_1 = p_2 = 1$. Тоді з теореми Фубіні та оцінки (22) з $\alpha = 0$ і $\lambda = 1$ отримаємо таке:

$$||\mathcal{I}(t, s)v||_1 = \int\limits_{\Omega}\Big|\int\limits_{\Omega} \mathtt{G}(x, t, \xi, s)v(\xi)\, d\xi\Big|\, dx \le \int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{\Omega} |\mathtt{G}(x, t, \xi, s)|\, |v(\xi)|\, d\xi\Big)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{\Omega} |\mathtt{G}(x, t, \xi, s)|\, dx\Big)\, |v(\xi)|\, d\xi \le \mathscr{M}_1(1) \int\limits_{\Omega} |v(\xi)|\, d\xi = \mathscr{M}_1(1)\, ||v||_1$$

для всіх $(t, s) \in \mathcal{T}$. Нехай далі $p_1 \in (1, +\infty)$, $p_1' = \frac{p_1}{p_1-1}$ (тобто $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1$), $v \in L^{p_1}(\Omega)$, $(t, s) \in \mathcal{T}$. Розглянемо три випадки.

1. Припустимо спочатку, що $p_2 = p_1$. Для зручності позначимо $I_1 := ||\mathcal{I}(t, s)v||_{p_1}$. Використавши нерівність Гельдера, одержимо

$$I_1^{p_1} = \int\limits_{\Omega}\Big|\int\limits_{\Omega} \mathtt{G}(x, t, \xi, s)v(\xi)\, d\xi\Big|^{p_1}\, dx \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega}\Big|\int\limits_{\Omega} |\mathtt{G}|^{\frac{1}{p_1'}}\, |\mathtt{G}|^{\frac{1}{p_1}} |v|\, d\xi\Big|^{p_1}\, dx \le \int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{\Omega} |\mathtt{G}|\, d\xi\Big)^{\frac{p_1}{p_1'}}\Big(\int\limits_{\Omega} |\mathtt{G}|\, |v|^{p_1}\, d\xi\Big)\, dx. \tag{27}$$

Використавши (22) з $\alpha = 0$ і $\lambda = 1$, рівність $\frac{p_1}{p_1'} = p_1 - 1$ та теорему Фубіні, отримаємо

$$I_1^{p_1} \le |\mathscr{M}_1(1)|^{p_1-1} \int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{\Omega} |\mathtt{G}(x, t, \xi, s)|\, |v(\xi)|^{p_1}\, d\xi\Big)\, dx =$$

$$= |\mathscr{M}_1(1)|^{p_1-1} \int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{\Omega} |\mathtt{G}(x, t, \xi, s)|\, dx\Big)\, |v(\xi)|^{p_1}\, d\xi \le |\mathscr{M}_1(1)|^{p_1}||v||^{p_1}_{p_1},$$

звідки й одержуємо (26) з $\sigma(p_1, p_1) = 0$, $\mathscr{M}_2(p_1, p_2) = \mathscr{M}_1(1)$.

2. Нехай тепер $p_2 \in (p_1, +\infty)$ і, крім того, $\sigma(p_1, p_2) \le 1$. Для зручності позначимо $I_2 := ||\mathcal{I}(t,s)v||_{p_2}$. Тоді з оцінки (24) для $a := \sigma(p_1,p_2)$, $m = 2$, $q_1 := p_1$, $q_2 := p_2$ отримаємо, що

$$I_2 \le \mathcal{C}(p_1,p_2,2)\, ||\mathcal{I}(t,s)v||_{2,p_1}^{\sigma(p_1,p_2)} ||\mathcal{I}(t,s)v||_{p_1}^{1-\sigma(p_1,p_2)} =$$

$$= \mathcal{C}(p_1,p_2,2)\Big(\sum_{|\alpha|\le 2} ||D_x^\alpha \mathcal{I}(t,s)v||_{p_1}^{p_1}\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}} ||\mathcal{I}(t,s)v||_{p_1}^{1-\sigma(p_1,p_2)} = \mathcal{C}(p_1,p_2,2)\ \times$$

$$\times\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\int_\Omega\Big|\int_\Omega D_x^\alpha \mathtt{G}(x,t,\xi,s)v(\xi)\,d\xi\Big|^{p_1}dx\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\Big(\int_\Omega\Big|\int_\Omega \mathtt{G}(x,t,\xi,s)v(\xi)\,d\xi\Big|^{p_1}dx\Big)^{\frac{1-\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}.$$

Застосувавши до наявних тут інтегральних виразів перетворення типу (27), отримаємо таке:

$$I_2 \le \mathcal{C}(p_1,p_2,2)\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\int_\Omega\Big(\int_\Omega |D_x^\alpha \mathtt{G}|\,d\xi\Big)^{\frac{p_1}{p_1'}}\Big(\int_\Omega |D_x^\alpha \mathtt{G}|\,|v|^{p_1}\,d\xi\Big)\,dx\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\ \times$$

$$\times\Big(\int_\Omega\Big(\int_\Omega |\mathtt{G}|\,d\xi\Big)^{\frac{p_1}{p_1'}}\Big(\int_\Omega |\mathtt{G}|\,|v|^{p_1}\,d\xi\Big)\,dx\Big)^{\frac{1-\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}.$$

Тому з (22) для $\lambda = 1$, рівності $\frac{p_1}{p_1'} = p_1 - 1$ та теореми Фубіні випливає, що

$$I_2 \le \mathcal{C}(p_1,p_2,2)\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\int_\Omega\Big(\frac{\mathscr{M}_1(1)}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}}}\Big)^{p_1-1}\Big(\int_\Omega |D_x^\alpha \mathtt{G}|\,|v|^{p_1}\,d\xi\Big)\,dx\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\ \times$$

$$\times\Big(\int_\Omega\Big(\frac{\mathscr{M}_1(1)}{1}\Big)^{p_1-1}\Big(\int_\Omega |\mathtt{G}|\,|v|^{p_1}\,d\xi\Big)\,dx\Big)^{\frac{1-\sigma(p_1,p_2)}{p_1}} =$$

$$= C_1\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{1}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}(p_1-1)}}\int_\Omega\Big(\int_\Omega |D_x^\alpha \mathtt{G}|\,|v|^{p_1}\,d\xi\Big)\,dx\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\ \times$$

$$\times\Big(\int_\Omega\Big(\int_\Omega |\mathtt{G}|\,|v|^{p_1}\,d\xi\Big)\,dx\Big)^{\frac{1-\sigma(p_1,p_2)}{p_1}} =$$

$$= C_1\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{1}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}(p_1-1)}}\int_\Omega |v(\xi)|^{p_1}\Big(\int_\Omega |D_x^\alpha \mathtt{G}|\,dx\Big)\,d\xi\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\ \times$$

$$\times\Big(\int_\Omega |v(\xi)|^{p_1}\Big(\int_\Omega |\mathtt{G}|\,dx\Big)\,d\xi\Big)^{\frac{1-\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}.$$

Тоді знову з (22) для $\lambda = 1$ одержимо, що

$$I_2 \le C_1\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{1}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}(p_1-1)}}\int_\Omega |v(\xi)|^{p_1}\Big(\frac{\mathscr{M}_1(1)}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}}}\Big)\,d\xi\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\ \times$$

$$\times\Big(\int\limits_{\Omega}|v(\xi)|^{p_1}\Big(\frac{\mathscr{M}_1(1)}{1}\Big)\,d\xi\Big)^{\frac{1-\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}=$$

$$=C_2\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{1}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}p_1}}\int\limits_{\Omega}|v(\xi)|^{p_1}\,d\xi\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\Big(\int\limits_{\Omega}|v(\xi)|^{p_1}\,d\xi\Big)^{\frac{1-\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}=$$

$$=C_2||v||_{p_1}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{1}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}p_1}}\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}. \tag{28}$$

Оскільки $|\alpha|\le 2$, $s<t\le T$, то

$$\frac{1}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}p_1}}=\frac{(t-s)^{(1-\frac{|\alpha|}{2})\,p_1}}{(t-s)^{\frac{|\alpha|}{2}p_1+(1-\frac{|\alpha|}{2})\,p_1}}=\frac{(t-s)^{(1-\frac{|\alpha|}{2})\,p_1}}{(t-s)^{p_1}}\le\frac{T^{(1-\frac{|\alpha|}{2})\,p_1}}{(t-s)^{p_1}}.$$

Використавши цю оцінку та (25), з (28) одержимо оцінку

$$I_2\le C_2||v||_{p_1}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{T^{(1-\frac{|\alpha|}{2})\,p_1}}{(t-s)^{p_1}}\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}=\frac{C_2||v||_{p_1}}{(t-s)^{\sigma(p_1,p_2)}}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}T^{(1-\frac{|\alpha|}{2})\,p_1}\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\le$$

$$\le\frac{C_3||v||_{p_1}}{(t-s)^{\sigma(p_1,p_2)}}\Big(T^{p_1}+T^{\frac{p_1}{2}}+1\Big)^{\frac{\sigma(p_1,p_2)}{p_1}}\le\frac{C_4||v||_{p_1}}{(t-s)^{\sigma(p_1,p_2)}}\Big(T+\sqrt{T}+1\Big)^{\sigma(p_1,p_2)}, \tag{29}$$

де стала $C_4>0$ не залежить від t,s,v,T. Отже, ми отримали оцінку (26) зі сталою $\mathscr{M}_2(p_1,p_2)$, яка залежить від T, проте є обмеженою і відокремленою від нуля при $T\to+0$ (це ми використовуватимемо далі).

3. Нехай тепер $p_2\in(p_1,+\infty)$ і $\sigma(p_1,p_2)>1$. Оскільки $\sigma(p,q)\underset{|p-q|\to 0}{\longrightarrow}0$, то інтервал (p_1,p_2) можна розбити на k частин так: $p_1=r_0<r_1<\ldots<r_{k-1}<r_k=p_2$, $\sigma(r_{j-1},r_j)\le 1$, $j=\overline{1,k}$. З вигляду функції σ випливає, що

$$\sigma(r_0,r_1)+\sigma(r_1,r_2)+\ldots+\sigma(r_{k-1},r_k)=\sigma(r_0,r_k)=\sigma(p_1,p_2).$$

Тому, використавши формулу (23) і вже доведений частинний випадок оцінки (26) для показників r_{j-1},r_j, одержимо таке:

$$||\mathcal{I}(t,s)v||_{p_2}=||\mathcal{I}(t,s)v||_{r_k}=\Big|\Big|\mathcal{I}\Big(\frac{t}{k}+\ldots+\frac{t}{k},\frac{s}{k}+\ldots+\frac{s}{k}\Big)v\Big|\Big|_{r_k}=$$

$$=\Big|\Big|\underbrace{\mathcal{I}\Big(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\Big)\circ\ldots\circ\mathcal{I}\Big(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\Big)}_{k}v\Big|\Big|_{r_k}\le\frac{\mathscr{M}_2(r_{k-1},r_k)}{(\frac{t-s}{k})^{\sigma(r_{k-1},r_k)}}\Big|\Big|\underbrace{\mathcal{I}\Big(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\Big)\circ\ldots\circ\mathcal{I}\Big(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\Big)}_{k-1}v\Big|\Big|_{r_{k-1}}\le$$

$$\le\frac{\mathscr{M}_2(r_{k-1},r_k)\mathscr{M}_2(r_{k-2},r_{k-1})}{(\frac{t-s}{k})^{\sigma(r_{k-1},r_k)+\sigma(r_{k-2},r_{k-1})}}\Big|\Big|\underbrace{\mathcal{I}\Big(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\Big)\circ\ldots\circ\mathcal{I}\Big(\frac{t}{k},\frac{s}{k}\Big)}_{k-2}v\Big|\Big|_{r_{k-2}}\le\ldots\le$$

$$\le\frac{\mathscr{M}_2(r_{k-1},r_k)\mathscr{M}_2(r_{k-2},r_{k-1})\cdot\ldots\cdot\mathscr{M}_2(r_0,r_1)}{(\frac{t-s}{k})^{\sigma(r_{k-1},r_k)+\sigma(r_{k-2},r_{k-1})+\ldots+\sigma(r_0,r_1)}}||v||_{r_0}=\frac{\mathscr{M}_2(p_1,p_2)}{(t-s)^{\sigma(p_1,p_2)}}||v||_{p_1},$$

де $\mathscr{M}_2(p_1,p_2):=k^{\sigma(p_1,p_2)}\mathscr{M}_2(r_{k-1},r_k)\mathscr{M}_2(r_{k-2},r_{k-1})\cdot\ldots\cdot\mathscr{M}_2(r_0,r_1)$. □

Зауваження 1. За певних умов аналог оцінки (26) отримано у [12, с. 293].

Лема 5. *Нехай функція* $\mathtt{G} \in \mathcal{ML}(\Lambda)$ *задовольняє (7), оператор* $\mathcal{J}_0$ *означено у (14),* σ *– функція з (19),* $1 < p_1 \le p_2 < +\infty$, $\sigma(p_1,p_2) \le 1$, $\tau \in (0,T]$. *Тоді лінійний інтегральний оператор* $\mathcal{J}_0 : L^{p_1}(\Omega) \to L^{\mu}(0,\tau; L^{p_2}(\Omega))$ *є обмеженим (тому і неперервним), якщо виконується одна з умов: 1)* $p_2 = p_1$, $\mu \ge 1$; *2)* $p_2 > p_1$, $\mu \in [1, \frac{1}{\sigma(p_1,p_2)})$. *Крім того, існує така незалежна від* τ *стала* $\mathscr{L}_0(p_1,p_2) > 0$, *що для всіх* $v \in L^{p_1}(\Omega)$ *виконується оцінка*

$$||\mathcal{J}_0 v||_{p_2,\mu,\tau} \le \mathscr{L}_0(p_1,p_2)\, \tau^{\frac{1}{\mu}-\sigma(p_1,p_2)} ||v||_{p_1}, \tag{30}$$

причому $\frac{1}{\mu} - \sigma(p_1,p_2) > 0$.

Доведення. Нехай p_1, p_2 такі як у формулюванні леми, $\mu \ge 1$, $\tau \in (0,T]$, $v \in L^{p_1}(\Omega)$, $I_3 := ||\mathcal{J}_0 v||^{\mu}_{p_2,\mu,\tau}$. Використавши (26) для $s = 0$ (це законно, бо $p_1 \le p_2$), одержуємо, що

$$I_3 = \int_0^\tau ||\mathcal{I}(t,0)v||^{\mu}_{p_2}\, dt \le \int_0^\tau \Big(\frac{\mathscr{M}_2(p_1,p_2)}{t^{\sigma(p_1,p_2)}}||v||_{p_1}\Big)^{\mu} dt = |\mathscr{M}_2(p_1,p_2)|^{\mu} I_4 ||v||^{\mu}_{p_1}, \tag{31}$$

де $I_4 := \int_0^\tau \frac{dt}{t^{\sigma(p_1,p_2)\mu}}$. У випадку 1 отримаємо, що $\sigma(p_1,p_1) = 0$, тому $I_4 = \int_0^\tau dt = \tau$ для всіх μ. У випадку 2 з вибору μ випливає, що $\sigma(p_1,p_2)\mu < 1$, тому $I_4 = \frac{\tau^{1-\sigma(p_1,p_2)\mu}}{1-\sigma(p_1,p_2)\mu}$. В обох випадках лему доведено, бо (30) випливає з (31). □

Для подальших потреб нагадаємо таке твердження.

Твердження 3. *(Теорема 202 з* [17, с. 179]*). Якщо* $k \ge 1$, *то*

$$\int_a^b \Big|\int_c^d h(t,s)\, ds\Big|^k dt \le \Big[\int_c^d \Big|\int_a^b |h(t,s)|^k\, dt\Big|^{\frac{1}{k}} ds\Big]^k.$$

Лема 6. *Нехай функція* $\mathtt{G} \in \mathcal{ML}(\Lambda)$ *задовольняє (7), оператор* $\mathcal{J}$ *означено у (15),* σ *– функція з (19),* $1 < p_1 \le p_2 < +\infty$, $\sigma(p_1,p_2) \le 1$, $\tau \in (0,T]$. *Тоді лінійний інтегральний оператор* $\mathcal{J} : L^{\lambda}(0,\tau; L^{p_1}(\Omega)) \to L^{\mu}(0,\tau; L^{p_2}(\Omega))$ *є обмеженим (тому і неперервним), якщо виконується одна з умов: 1)* $p_2 = p_1$, $\lambda \ge 1$, $\mu \ge 1$; *2)* $p_2 > p_1$, $\lambda \ge 1$, $\mu \in [1, \frac{1}{\sigma(p_1,p_2)})$. *Крім того, існує незалежна від* τ *стала* $\mathscr{L}(p_1,p_2;\lambda,\mu) > 0$ *така, що для всіх* $v \in L^{\lambda}(0,T; L^{p_1}(\Omega))$ *виконується оцінка*

$$||\mathcal{J}w||_{p_2,\mu,\tau} \le \mathscr{L}(p_1,p_2;\lambda,\mu)\tau^{\frac{1}{\mu}-\sigma(p_1,p_2)+\frac{\lambda-1}{\lambda}} ||v||_{p_1,\lambda,\tau}, \tag{32}$$

причому $\frac{1}{\mu} - \sigma(p_1,p_2) > 0$.

Доведення. Нехай p_1, p_2 такі як у формулюванні леми, $\lambda \ge 1$, $\mu \ge 1$, $\tau \in (0,T]$, $v \in L^{\lambda}(0,\tau; L^{p_1}(\Omega))$, $I_5 := ||\mathcal{J}w||^{\mu}_{p_2,\mu,\tau}$. Тоді

$$I_5 = \int_0^\tau \Big|\Big|\int_0^t \mathcal{I}(t,s)w(s)\, ds\Big|\Big|^{\mu}_{p_2} dt \le \int_0^\tau \Big[\int_0^t ||\mathcal{I}(t,s)w(s)||_{p_2}\, ds\Big]^{\mu} dt =$$

$$= \int_0^\tau \Big[\int_0^\tau \chi(t,s)||\mathcal{I}(t,s)w(s)||_{p_2}\, ds\Big]^{\mu} dt,$$

де
$$\chi(t,s)=\begin{cases}1, & t>s,\\ 0, & t\le s.\end{cases} \tag{33}$$
Використавши оцінку з твердження 3, одержимо
$$I_5\le\Big[\int\limits_0^\tau\Big|\int\limits_0^\tau \chi^\mu(t,s)||\mathcal{I}(t,s)w(s)||_{p_2}^\mu\,dt\Big|^{\frac{1}{\mu}}ds\Big]^\mu=\Big[\int\limits_0^\tau\Big|\int\limits_s^\tau ||\mathcal{I}(t,s)w(s)||_{p_2}^\mu\,dt\Big|^{\frac{1}{\mu}}ds\Big]^\mu.$$
Використавши оцінку (26) (це законно, бо $0\le\sigma(p_1,p_2)\le 1$), отримаємо, що
$$I_5\le\Big[\int\limits_0^\tau\Big|\int\limits_s^\tau\Big(\frac{\mathscr{M}_2(p_1,p_2)}{(t-s)^{\sigma(p_1,p_2)}}||w(s)||_{p_1}\Big)^\mu dt\Big|^{\frac{1}{\mu}}ds\Big]^\mu=$$
$$=|\mathscr{M}_2(p_1,p_2)|^\mu\Big[\int\limits_0^\tau||w(s)||_{p_1}|I_6|^{\frac{1}{\mu}}ds\Big]^\mu, \tag{34}$$
де $I_6=\int_s^\tau\frac{dt}{(t-s)^{\sigma(p_1,p_2)\mu}}$. У випадку 1 одержуємо, що $\sigma(p_2,p_2)=0$, тому $I_6=\int_s^\tau dt=$ $=\tau-s\le\tau$ для всіх μ. У випадку 2 з вибору μ випливає, що $\sigma(p_1,p_2)\mu<1$, тому $I_6=\frac{\tau^{1-\sigma(p_1,p_2)\mu}}{1-\sigma(p_1,p_2)\mu}$. В обох випадках з (34) отримаємо оцінку
$$I_5\le C_5\tau^{1-\sigma(p_1,p_2)\mu}\Big[\int\limits_0^\tau||w(s)||_{p_1}\,ds\Big]^\mu, \tag{35}$$
де стала $C_5>0$ не залежить від v,τ.

При $\lambda=1$ оцінка (35) збігається з (32). Якщо $\lambda>1$, то, використавши у (35) нерівність Гельдера з показниками $\lambda>1$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}>1$, одержимо таке:
$$I_5\le C_5\tau^{1-\sigma(p_1,p_2)\mu}\Big[\Big(\int\limits_0^\tau||w(s)||_{p_1}^\lambda\,ds\Big)^{\frac{1}{\lambda}}\Big(\int\limits_0^\tau ds\Big)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\Big]^\mu\le C_5\tau^{1-\sigma(p_1,p_2)\mu+\frac{\lambda-1}{\lambda}\mu}||w||_{p_1,\lambda,\tau},$$
звідки і випливає (32). Лему доведено. □

Зауваження 2. Аналог оцінки (30) з $\lambda=p_1=p_2$ отримано у лемі 1 з [2, с. 34], а оцінки (32) з $\lambda=\mu=p_1=p_2$ – у лемі 2 з [2, с. 35]. Зауважимо також, що на відміну від леми 4, твердження лем 6 і 5 не можна отримати при $\sigma(p_1,p_2)>1$ запропонованим тут методом, бо інтеграли I_4, I_6 з доведення цих лем є розбіжними для всіх $\mu\ge 1$.

Тепер нагадаємо декілька оцінок.

Зауваження 3. Якщо $q\ge 2$, то з теореми 1 [13, с. 2] для всіх $\xi,\eta\in\mathbb{R}$ одержуємо, що
$$\big|\,|\xi|^{q-2}\xi-|\eta|^{q-2}\eta\,\big|\le(q-1)2^{2-q}(|\xi|+|\eta|)^{q-2}|\xi-\eta|. \tag{36}$$

При розгляді рівнянь зі змінними показниками нелінійності виникає потреба працювати з узагальненими просторами Лебега, які вперше введено у [14] (деякі їхні властивості вивчено у [15]). Нехай $Q\subset\mathbb{R}^m$ $(m\in\mathbb{N})$ – обмежена область,
$$p\in\mathcal{ML}(Q),\quad p_0:=\operatorname*{ess\,inf}_{y\in Q}p(y),\quad p^0:=\operatorname*{ess\,sup}_{y\in Q}p(y). \tag{37}$$

Узагальненим простором Лебега $L^{p(y)}(Q)$ називається множина таких функцій $v \in \mathcal{ML}(Q)$, для яких $\rho_p(v,Q) < +\infty$, де

$$\rho_p(v,Q) := \int\limits_Q |v(y)|^{p(y)}\, dy.$$

Спершу припустимо, що $1 < p_0 \le p^0 < +\infty$. Тоді цей простір є (див. [15, с. 599, 600]) рефлексивним банаховим простором стосовно норми Люксембурга

$$||v; L^{p(y)}(Q)|| := \inf\{\lambda > 0 \ : \ \rho_p(v/\lambda, Q) \le 1\}.$$

Крім того, виконуються неперервні вкладення $L^{p(y)}(Q) \circlearrowleft L^{r(y)}(Q)$, якщо $p(y) \ge r(y)$ (див. [15, с. 599-600]).

Особливості узагальнених просторів Лебега, зокрема вигляд норми в них, зумовлюють певну специфіку інтегральних оцінок у таких просторах. Нагадаємо узагальнену нерівність Гельдера (див. [16, с. 175]): для всіх функцій $u \in L^{p(y)}(Q)$ та $v \in L^{p'(y)}(Q)$, де $p'(y) = \frac{p(y)}{p(y)-1}$ (тобто $1/p(y) + 1/p'(y) = 1$) майже для всіх $y \in Q$,

$$\int\limits_Q |u(y)v(y)|\, dy \le 2\, ||u; L^{p(y)}(Q)|| \cdot ||v; L^{p'(y)}(Q)||. \tag{38}$$

Справа в (38) наявний множник 2, якого немає при $p(y) \equiv const$. Крім того, наявні в (38) норми, взагалі кажучи, не дорівнюють степеневим функціям від відповідних інтегралів. Для зручності, зокрема використання (38), введемо додаткові позначення. Оператором Лавренюка назвемо відображення $\mathcal{ML}(Q) \ni p \overset{S}{\mapsto} S_p \in \mathcal{ML}(Q)$, яке діє за правилом

$$\forall\, p \in \mathcal{ML}(Q): \quad S_p(s) = \begin{cases} s^{p_0}, & s \in [0,1], \\ s^{p^0}, & s > 1, \end{cases} \tag{39}$$

де числа p_0, p^0 будують для p за правилом (37). Областю визначення оператора S є множина суттєво обмежених функцій з $\mathcal{ML}(Q)$. Проте ми використовуватимемо значення цього оператора лише на невід'ємних функціях. Принагідно зауважимо, що $S_{1/p}(s) = \begin{cases} s^{1/p^0}, & s \in [0,1], \\ s^{1/p_0}, & s > 1, \end{cases}$ при $p_0 > 0$.

Зауваження 4. (Лема 1 [5, с. 168], зауваження 3.1 [6, с. 453]). Якщо p, p_0, p^0 взято з (37), $1 < p_0 \le p^0 < +\infty$, то виконуються такі оцінки:

1) $||v; L^{p(y)}(Q)|| \le S_{1/p}(\rho_p(v,Q))$ при $\rho_p(v,Q) < \infty$;
2) $\rho_p(v,Q) \le S_p(||v; L^{p(y)}(Q)||)$ при $||v; L^{p(y)}(Q)|| < \infty$.

Наступні елементарні властивості оператора S подамо у вигляді леми.

Лема 7. *Нехай S – оператор з (39), p, p_0, p^0 взято з (37), $0 \le p_0 \le p^0 < +\infty$. Тоді:*

1) *функція $\mathbb{R}_+ \ni s \overset{S_p}{\mapsto} S_p(s) \in \mathbb{R}_+$ монотонно неспадна і неперервна, $S_p(0) = 0$;*
2) *$[S_p(s)]^r = S_p(s^r) = S_{pr}(s)$, $s \ge 0$, $r \ge 0$;*
3) *$S_p(sr) \le S_p(s)S_p(r)$, $s \ge 0$, $r \ge 0$;*
4) *$S_p(s_1 + \ldots + s_m) \le m^{p^0}(S_p(s_1) + \ldots + S_p(s_m))$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \ge 0$, $m \in \mathbb{N}$.*

Доведення. 1), 2) Твердження цих пунктів очевидні.

3) Якщо $s = r$, то твердження цього пункту випливає з пункту 2 цієї леми. Далі, не зменшуючи загальності, припустимо, що $s < r$. Отримаємо таке:
якщо $s < r \leq 1$, то $S_p(sr) = (sr)^{p_0} = s^{p_0} r^{p_0} = S_p(s)S_p(r)$;
якщо $1 < s < r$, то $S_p(sr) = (sr)^{p^0} = s^{p^0} r^{p^0} = S_p(s)S_p(r)$;
якщо $s \leq 1 < r$, то отримаємо $S_p(sr) = (sr)^{p^0} = s^{p^0} r^{p^0} \leq s^{p_0} r^{p^0} = S_p(s)S_p(r)$ при $sr > 1$ й одержимо $S_p(sr) = (sr)^{p_0} = s^{p_0} r^{p_0} \leq s^{p_0} r^{p^0} = S_p(s)S_p(r)$ при $sr \leq 1$.

4) Нехай $m \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, \ldots, s_m \geq 0$. Не зменшуючи загальності припустимо, що $s_1 = \max\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$. Тому, використавши результати пунктів 1 та 3 цієї леми, отримаємо

$$S_p(s_1 + \ldots + s_m) \leq S_p(ms_1) \leq S_p(m)S_p(s_1) = m^{p^0} S_p(s_1) \leq m^{p^0}(S_p(s_1) + \ldots + S_p(s_m)),$$

що і доводить твердження пункту і лему. □

Доведемо деякі елементарні властивості операторів Немицького з (13).

Лема 8. *Нехай виконуються умови **(G)**, **(Q)**, q_0 і q^0 – сталі з умови **(Q)**, S – оператор з формули (39), $\{\mathcal{N}(t)\}_{t\in[0,T]}$ – сім'я операторів з (13), $\delta \in (0, 1]$. Якщо $p \in [q^0 + \delta - 1, +\infty)$, то існує така стала $\mathscr{N}_1(p, q_0, q^0)$, що для всіх $v, w \in L^p(\Omega)$ та $t \in [0, T]$ виконується оцінка*

$$||\mathcal{N}(t)v - \mathcal{N}(t)w||_h \leq \mathscr{N}_1(p, q_0, q^0)||v - w||_p\, S_{q-2}(||v||_p + ||w||_p), \tag{40}$$

де $h := \frac{p}{q^0+\delta-1} \geq 1$ (стала $\mathscr{N}_1(p, q_0, q^0)$ не залежить від δ).

Доведення. З умов **(G)**, $q_0 > 2$ та нерівності (36) отримаємо

$$I_7(t) := ||\mathcal{N}(t)v - \mathcal{N}(t)w||_h^h \leq |g^0|^h \int\limits_\Omega \Big| |v(x)|^{q(x,t)-2} v(x) - |w(x)|^{q(x,t)-2} w(x)\Big|^h \, dx \leq$$

$$\leq |g^0|^h \int\limits_\Omega |(q(x,t) - 1)2^{2-q(x,t)}|^h \Big(|v(x)| + |w(x)|\Big)^{h(q(x,t)-2)} |v(x) - w(x)|^h \, dx \leq$$

$$\leq C_6(\delta) \int\limits_\Omega \Big(|v| + |w|\Big)^{h(q(x,t)-2)} |v - w|^h \, dx, \quad t \in [0, T].$$

де $C_6(\delta) = |g^0(q^0 - 1)2^{2-q_0}|^{\frac{p}{q^0+\delta-1}}$. Нехай $C_7 := \sup\limits_{\delta\in[0,1]} C_6(\delta)$. Зрозуміло, що стала $C_7 \geq 0$ залежить тільки від g^0, p, q_0, q^0.

Використавши нерівність Гельдера з показниками $\frac{q^0+\delta-1}{q^0-2+\delta} > 1$, $q^0 + \delta - 1 > 1$, з попередньої нерівності та вигляду h одержимо

$$I_7(t) \leq C_7 \Big(\int\limits_\Omega |z(x)|^{\frac{p(q(x,t)-2)}{q^0+\delta-1}\,\frac{q^0+\delta-1}{q^0-2+\delta}} \, dx\Big)^{\frac{q^0-2+\delta}{q^0+\delta-1}} \Big(\int\limits_\Omega |v - w|^{\frac{p(q^0+\delta-1)}{q^0+\delta-1}} \, dx\Big)^{\frac{1}{q^0+\delta-1}}, \tag{41}$$

де $z(x) = |v(x)| + |w(x)|$, $x \in \Omega$.

Оскільки $\delta > 0$, то $\frac{q^0-2+\delta}{q(x,t)-2} \geq \frac{q^0-2+\delta}{q^0-2} > 1$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$. Тому з узагальненої нерівності Гельдера для області Ω і показників $\frac{q^0-2+\delta}{q(x,t)-2} > 1$, $\frac{q^0-2+\delta}{q^0-q(x,t)+\delta} > 1$ випливає оцінка

$$I_8(t) := \int\limits_\Omega |z(x)|^{\frac{p(q(x,t)-2)}{q^0-2+\delta}}\, dx \leq 2\,||z^{\frac{p(q(t)-2)}{q^0-2+\delta}}; L^{\frac{q^0-2+\delta}{q(x,t)-2}}(\Omega)|| \cdot ||1; L^{\frac{q^0-2+\delta}{q^0-q(x,t)+\delta}}(\Omega)|| =$$

$$= C_8(\delta)||z^{\frac{p(q(t)-2)}{q^0-2+\delta}}; L^{\frac{q^0-2+\delta}{q(x,t)-2}}(\Omega)||,$$

де (скористаємося тут оцінками з зауваження 4 для області Ω та лемою 7)

$$C_8(\delta) := 2\,||1; L^{\frac{q^0-2+\delta}{q^0-q(x,t)+\delta}}(\Omega)|| \leq 2S_{1/(\frac{q^0-2+\delta}{q^0-q+\delta})}\Big(\rho_{\frac{q^0-2+\delta}{q^0-q+\delta}}(1,\Omega)\Big) =$$

$$= 2S_{(q^0-q+\delta)/(q^0-2+\delta)}(|\Omega|) = \begin{cases} 2|\Omega|^{\frac{\delta}{q^0-2+\delta}}, & |\Omega| \in [0,1], \\ 2|\Omega|^{\frac{q^0-q_0+\delta}{q^0-2+\delta}}, & |\Omega| > 1, \end{cases}$$

де $|\Omega|$ – міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ області Ω. З вигляду функції $C_8(\delta)$ випливає, що число $C_9 := \sup\limits_{\delta\in(0,1)} C_8(\delta)$ задовольняє оцінки $0 < C_9 < +\infty$. Зрозуміло також, що C_9 не залежить від δ. Тому, використавши зауваження 4 та лему 7, одержимо

$$I_8(t) \leq C_9 S_{1/\frac{q^0-2+\delta}{q-2}}\Big(\rho_{\frac{q^0-2+\delta}{q-2}}(z^{\frac{p(q(t)-2)}{q^0-2+\delta}};\Omega)\Big) = C_9 S_{(q-2)/(q^0-2+\delta)}\Big(\int\limits_\Omega |z(x)|^p\, dx\Big) =$$

$$= C_9 S_{(q-2)/(q^0-2+\delta)}(||z||_p^p).$$

Підставивши цей вираз у (41), з леми 7 отримаємо таке:

$$I_7(t) \leq C_7 |I_8(t)|^{\frac{q^0-2+\delta}{q^0+\delta-1}} \Big(\int\limits_\Omega |v-w|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{q^0+\delta-1}} \leq$$

$$\leq C_7 \Big| C_9 S_{(q-2)/(q^0-2+\delta)}(||z||_p^p)\Big|^{\frac{q^0-2+\delta}{q^0+\delta-1}} ||v-w||_p^{\frac{p}{q^0+\delta-1}} =$$

$$= C_{10} S_{p(q-2)/(q^0+\delta-1)}(||z||_p) ||v-w||_p^{\frac{p}{q^0+\delta-1}} = C_{10} S_{h(q-2)}(||\,|v|+|w|\,||_p) ||v-w||_p^h \leq$$

$$\leq C_{10} S_{h(q-2)}(||v||_p + ||w||_p)||v-w||_p^h = \Big(C_{10}^{\frac{1}{h}} S_{q-2}(||v||_p+||w||_p)||v-w||_p\Big)^h,$$

звідки і випливає оцінка (40). Лему доведено. □

Лема 9. *Нехай виконуються умови **(G)**, **(Q)**, q_0 і q^0 – сталі з умови **(Q)**, S – оператор з (39), функція $\mathtt{G} \in \mathcal{ML}(\Lambda)$ задовольняє оцінку (7), $\{\mathcal{I}(t,s)\}_{(t,s)\in\mathcal{T}}$ взято з (12), $\{\mathcal{N}(t)\}_{t\in[0,T]}$ означено в (13), σ – функція з (19), β – функція з (20). Якщо $p \in (q^0-1,+\infty)$, $\mu \in (\frac{p}{q^0-1},+\infty)$, то існує така стала $\mathscr{M}_3(p,q_0,q^0,\mu) > 0$, що для всіх $(t,s) \in \mathcal{T}$ і $\tau \in [0,T]$ виконується оцінка*

$$||\mathcal{I}(t,s)(\mathcal{N}(\tau)v - \mathcal{N}(\tau)w)||_\mu \leq \frac{\mathscr{M}_3(p,q_0,q^0,\mu)}{(t-s)^{\beta(q^0,p)-\sigma(\mu,p)}}||v-w||_p\, S_{q-2}(||v||_p+||w||_p), \quad (42)$$

причому $\beta(q^0,p)-\sigma(\mu,p)\geq 0$.

Доведення. Позначимо через I_9 ліву частину нерівності (42). Нехай p,μ такі як у формулюванні леми. Тоді з (23) отримаємо, що

$$I_9=\Big|\Big|\mathcal{I}\Big(\frac{t}{2}+\frac{t}{2},\frac{s}{2}+\frac{s}{2}\Big)(\mathcal{N}(\tau)v-\mathcal{N}(\tau)w)\Big|\Big|_\mu=\Big|\Big|\mathcal{I}\Big(\frac{t}{2},\frac{s}{2}\Big)\circ\mathcal{I}\Big(\frac{t}{2},\frac{s}{2}\Big)(\mathcal{N}(\tau)v-\mathcal{N}(\tau)w)\Big|\Big|_\mu.$$

Оскільки $p>q^0-1$, то $p>q^0-1+\delta$ для всіх досить малих $\delta\in(0,1]$. Нехай $h:=\frac{p}{q^0+\delta-1}$. Тоді $\mu>\frac{p}{q^0-1}>h>1$ і з оцінки (26) для $p_1:=h$, $p_2:=\mu$ (що законно), матимемо

$$I_9\leq\frac{\mathscr{M}_2(h,\mu)}{(\frac{t-s}{2})^{\sigma(h,\mu)}}\Big|\Big|\mathcal{I}\Big(\frac{t}{2},\frac{s}{2}\Big)(\mathcal{N}(\tau)v-\mathcal{N}(\tau)w)\Big|\Big|_h, \tag{43}$$

де

$$\sigma(h,\mu)=\frac{n}{2}\Big(\frac{q^0+\delta-1}{p}-\frac{1}{\mu}\Big)=\frac{n}{2}\Big(\frac{q^0+\delta-2+1}{p}-\frac{1}{\mu}\Big)=$$

$$=\frac{n}{2}\frac{q^0+\delta-2}{p}+\frac{n}{2}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\Big)=\beta(q^0+\delta,p)-\sigma(\mu,p)>0. \tag{44}$$

Крім того, з (26) для $p_2=p_1:=h$ (тоді $\sigma(h,h)=1$) матимемо

$$\Big|\Big|\mathcal{I}\Big(\frac{t}{2},\frac{s}{2}\Big)(\mathcal{N}(\tau)v-\mathcal{N}(\tau)w)\Big|\Big|_h\leq\mathscr{M}_2(h,h)||\mathcal{N}(\tau)v-\mathcal{N}(\tau)w||_h. \tag{45}$$

Підставивши (44) і (45) в (43), одержимо таке:

$$I_9\leq\frac{C_{11}(\delta)}{(t-s)^{\beta(q^0+\delta,p)-\sigma(\mu,p)}}||\mathcal{N}(\tau)v-\mathcal{N}(\tau)w||_h,$$

де

$$C_{11}(\delta):=2^{\beta(q^0+\delta,p)-\sigma(\mu,p)}\mathscr{M}_2(h,\mu)\mathscr{M}_2(h,h)=$$

$$=2^{\frac{n}{2}\frac{q^0+\delta-2}{p}-\sigma(\mu,p)}\mathscr{M}_2\Big(\frac{p}{q^0+\delta-1},\mu\Big)\mathscr{M}_1(1).$$

З вигляду $\mathscr{M}_2$ випливає, що $C_{11}(\delta)$ є обмеженою при $\delta\to+0$. Тому, застосувавши до правої частини цієї нерівності оцінку (40) з леми 8, отримаємо

$$I_9\leq\frac{C_{12}\mathscr{N}_1(p,q_0,q^0)}{(t-s)^{\beta(q^0+\delta,p)-\sigma(\mu,p)}}||v-w||_p\,S_{q-2}(||v||_p+||w||_p), \tag{46}$$

де стала C_{12} не залежить від δ. Оскільки стала $\mathscr{N}_1(p,q_0,q^0)$ теж не залежить від δ і $\beta(q^0+\delta,p)\underset{\delta\to+0}{\longrightarrow}\beta(q^0,p)$, то, спрямувавши в (46) $\delta\to+0$, отримаємо (42). Лему доведено. $\square$

Лема 10. *Нехай виконуються умови* ***(G)***, ***(Q)***, q_0 *і* q^0 *– сталі з умови* ***(Q)***, S *– оператор з (39),* $\mathcal{A}$ *– з (17),* β *– функція з (20). Якщо* $r>\max\{\frac{n}{2}(q^0-1),1\}$, $p>\max\{r(q^0-1),1\}$, *число* $\varkappa$ *взято з (18), то існує стала* $\mathscr{A}(r,p)>0$ *така, що для всіх* $\tau\in(0,T]$ *і* $v,w\in L^\varkappa(0,\tau;L^p(\Omega))$ *виконується оцінка*

$$||\mathcal{A}v-\mathcal{A}w||_{p,\varkappa,\tau}\leq\mathscr{A}(r,p)\,\tau^{1-\beta(q^0,r)}\,||v-w||_{p,\varkappa,\tau}\,S_{q-2}(||v||_{p,\varkappa,\tau}+||w||_{p,\varkappa,\tau}). \tag{47}$$

Доведення. Нехай виконуються припущення леми, $I_{10}(t) = ||(\mathcal{A}v)(t) - (\mathcal{A}w)(t)||_p$, $t \in [0, \tau]$. Тоді

$$I_{10}(t) = \Big|\Big| - \int\limits_0^t \mathcal{I}(t,s)(\mathcal{N}(s)v(s) - \mathcal{N}(s)w(s))\, ds\Big|\Big|_p \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t \Big|\Big|\mathcal{I}(t,s)(\mathcal{N}(s)v(s) - \mathcal{N}(s)w(s))\Big|\Big|_p\, ds.$$

Використаємо оцінку (42) для $\mu = p$. Це можна зробити, бо $r > 1$, $p > r(q^0-1) > q^0-1$ та $q^0 \geq q_0 > 2$, $q^0 - 1 > 1$, $1 > \frac{1}{q^0-1}$, тобто $p > \frac{p}{q^0-1} > 1$. Врахувавши, що $\sigma(p,p) = 0$, одержимо

$$I_{10}(t) \leq \int\limits_0^t \frac{\mathscr{M}_3(p, q_0, q^0, p)}{(t-s)^{\beta(q^0+\delta, p)}} I_{11}(s)\, ds = \mathscr{M}_3(p, q_0, q^0, p) \int\limits_0^\tau \frac{\chi(t,s)}{(t-s)^{\beta(q^0,p)}} I_{11}(s)\, ds,$$

де χ взято з (33),

$$I_{11}(s) = ||v(s) - w(s)||_p\, S_{q-2}(||v(s)||_p + ||w(s)||_p), \quad s \in (0,t). \tag{48}$$

Нехай $I_{12} := ||\mathcal{A}v - \mathcal{A}w||^{\varkappa}_{p,\varkappa,\tau}$. Враховуючи наші позначення та отримані оцінки, одержимо таке:

$$I_{12} = \int\limits_0^\tau |I_{10}(t)|^{\varkappa}\, dt \leq |\mathscr{M}_3(p, q_0, q^0, p)|^{\varkappa} \int\limits_0^\tau \Big| \int\limits_0^\tau \frac{\chi(t,s)}{(t-s)^{\beta(q^0,p)}} I_{11}(s)\, ds\Big|^{\varkappa}\, dt.$$

Використовуючи оцінку з твердження 3, матимемо, що

$$I_{12} \leq |\mathscr{M}_3(p, q_0, q^0, p)|^{\varkappa} \Big[\int\limits_0^\tau \Big| \int\limits_0^\tau \frac{\chi^{\varkappa}(t,s)}{(t-s)^{\beta(q^0,p)\varkappa}} |I_{11}(s)|^{\varkappa}\, dt\Big|^{\frac{1}{\varkappa}}\, ds\Big]^{\varkappa} =$$

$$= |\mathscr{M}_3(p, q_0, q^0, p)|^{\varkappa} \Big[\int\limits_0^\tau I_{11}(s) \Big| \int\limits_s^\tau \frac{dt}{(t-s)^{\beta(q^0,p)\varkappa}}\Big|^{\frac{1}{\varkappa}}\, ds\Big]^{\varkappa}. \tag{49}$$

Зробимо деякі перетворення. Оскільки $p > r(q^0-1)$, то з пункту 5 леми 1 випливає, що $\beta(q^0,p)\varkappa < 1$. Тому з пункту 6 леми 1

$$\int\limits_s^\tau \frac{dt}{(t-s)^{\beta(q^0,p)\varkappa}} = \frac{(t-s)^{1-\beta(q^0,p)\varkappa}}{1-\beta(q^0,p)\varkappa}\Big|_{t=s}^{t=\tau} = \frac{(\tau-s)^{1-\beta(q^0,p)\varkappa}}{1-\beta(q^0,p)\varkappa} \leq \frac{\tau^{1-\beta(q^0,p)\varkappa}}{1-\beta(q^0,p)\varkappa} =$$

$$= \frac{\tau^{1-\beta(q^0,r)\varkappa+(q^0-2)}}{1-\beta(q^0,r)\varkappa+(q^0-2)} = \frac{\tau^{q^0-1-\beta(q^0,r)\varkappa}}{q^0-1-\beta(q^0,r)\varkappa}. \tag{50}$$

Використавши (48) і (50), з оцінки (49) отримаємо таке:

$$I_{12} \leq \frac{|\mathscr{M}_3(p, q_0, q^0, p)|^{\varkappa}}{q^0-1-\beta(q^0,r)\varkappa}\, \tau^{q^0-1-\beta(q^0,r)\varkappa} \Big[\int\limits_0^\tau I_{11}(s)\, ds\Big]^{\varkappa} =$$

$$= C_{13}\tau^{q^0-1-\beta(q^0,r)\varkappa}\Big[\int\limits_0^\tau ||v(s)-w(s)||_p\, S_{q-2}(||v(s)||_p+||w(s)||_p)\,ds\Big]^{\varkappa}.$$

Тому з нерівності Гельдера з показниками $\varkappa>1$, $\frac{\varkappa}{\varkappa-1}>1$ одержимо

$$I_{12}\le C_{13}\tau^{q^0-1-\beta(q^0,r)\varkappa}\times$$

$$\times\int\limits_0^\tau ||v(s)-w(s)||_p^{\varkappa}\,ds\Big[\int\limits_0^\tau\Big|S_{q-2}(||v(s)||_p+||w(s)||_p)\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds\Big]^{\varkappa-1}. \tag{51}$$

Нехай $\zeta(s):=||v(s)||_p+||w(s)||_p$, $s\in(0,\tau)$,

$$A:=\{s\in(0,\tau)\ \mid\ \zeta(s)>1\},\quad B:=\{s\in(0,\tau)\ \mid\ \zeta(s)\le 1\}.$$

Оскільки $p>r(q^0-1)>r\ge\frac{n}{2}(q^0-1)$, то (див. пункт 3 леми 1) $\varkappa>q^0-1$. Тому $\varkappa-1>q^0-2$, $\frac{\varkappa-1}{q^0-2}>1$ і, використавши нерівність Гельдера з показниками $\frac{\varkappa-1}{q^0-2}>1$, $\frac{\varkappa-1}{\varkappa-q^0+1}>1$, отримаємо

$$\int\limits_A\Big|S_{q-2}(\zeta(s))\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds=\int\limits_A|\zeta(s)|^{\frac{(q^0-2)\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds\le\Big(\int\limits_A|\zeta(s)|^{\varkappa}\,ds\Big)^{\frac{q^0-2}{\varkappa-1}}\Big(\int\limits_A ds\Big)^{\frac{\varkappa-q^0+1}{\varkappa-1}}\le$$

$$\le||\zeta;L^{\varkappa}(0,\tau)||^{\frac{(q^0-2)\varkappa}{\varkappa-1}}\tau^{\frac{\varkappa-q^0+1}{\varkappa-1}}. \tag{52}$$

Аналогічну (52) оцінку отримаємо і для інтеграла по B

$$\int\limits_B\Big|S_{q-2}(\zeta(s))\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds=\int\limits_B|\zeta(s)|^{\frac{(q_0-2)\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds\le||\zeta;L^{\varkappa}(0,\tau)||^{\frac{(q_0-2)\varkappa}{\varkappa-1}}\tau^{\frac{\varkappa-q_0+1}{\varkappa-1}}. \tag{53}$$

З оцінок (52), (53) і нерівності трикутника в $L^{\varkappa}(0,\tau)$ випливає, що

$$\int\limits_0^\tau\Big|S_{q-2}(\zeta(s))\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds=\int\limits_A\Big|S_{q-2}(\zeta(s))\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds+\int\limits_B\Big|S_{q-2}(\zeta(s))\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\,ds\le$$

$$\le||\zeta;L^{\varkappa}(0,\tau)||^{\frac{(q^0-2)\varkappa}{\varkappa-1}}\tau^{\frac{\varkappa-q^0+1}{\varkappa-1}}+||\zeta;L^{\varkappa}(0,\tau)||^{\frac{(q_0-2)\varkappa}{\varkappa-1}}\tau^{\frac{\varkappa-q_0+1}{\varkappa-1}}\le$$

$$\le\Big|S_{q-2}(||\zeta;L^{\varkappa}(0,\tau)||)\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\Big(\tau^{\frac{\varkappa-q^0+1}{\varkappa-1}}+\tau^{\frac{\varkappa-q_0+1}{\varkappa-1}}\Big)\le$$

$$\le\Big|S_{q-2}(||v||_{p,\varkappa,\tau}+||w||_{p,\varkappa,\tau})\Big|^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\Big(\tau^{\frac{\varkappa-q^0+1}{\varkappa-1}}+\tau^{\frac{\varkappa-q_0+1}{\varkappa-1}}\Big).$$

Тоді з (51) і оцінки типу (25) матимемо, що

$$I_{12}\le C_{14}\tau^{q^0-1-\beta(q^0,r)\varkappa}\times$$

$$\times||v-w||_{p,\varkappa,\tau}^{\varkappa}\Big|S_{q-2}(||v||_{p,\varkappa,\tau}+||w||_{p,\varkappa,\tau})\Big|^{\varkappa}(\tau^{\varkappa-q^0+1}+\tau^{\varkappa-q_0+1})=$$

$$=C_{14}(1+T^{q^0-q_0})\tau^{\varkappa-\beta(q^0+\delta,r)\varkappa}||v-w||_{p,\varkappa,\tau}^{\varkappa}\Big|S_{q-2}(||v||_{p,\varkappa,\tau}+||w||_{p,\varkappa,\tau})\Big|^{\varkappa}.$$

Звідси і випливає оцінка (47) зі сталою, яка залежить від T і відокремлена від нуля при $T\to+0$ (це ми використовуватимемо далі). Лему доведено. □

4. Доведення теореми 1. Нехай $p > \frac{n}{2}(q^0-1)^2$. Тоді $\frac{p}{q^0-1} > \frac{n}{2}(q^0-1)$. Приймемо довільне $r \in [\frac{n}{2}(q^0-1), \frac{p}{q^0-1})$. Нехай $\varkappa, \phi$ взято з (18), а функції σ, β – з (19), (20). Використаємо лему 1. З пункту 7 матимемо, що $\varkappa \in [\frac{2p(q^0-1)}{2p-n(q^0-1)}, \frac{2p}{n(q^0-2)})$. Приймемо максимальне $\varkappa^* = \frac{2p}{n(q^0-2)} < \frac{p}{\phi}$. Оскільки $q_0 > 2 + \frac{2}{n}$, то з пункту 2 випливає оцінка $\phi > 1$. Отже, $\varkappa^* < p$. Крім того,

$$p > \frac{n}{2}(q^0-1)^2 > \frac{n}{2}(q^0-1) > \frac{n}{2}(q^0-2),$$

тобто $\varkappa^* > 1$ та $p > \frac{n}{2}(q^0-2) > \phi > 1$. З пункту 3 та умови

$$r \in \Big[\frac{n}{2}(q^0-1), \frac{p}{q^0-1}\Big) \subset \Big[\frac{n}{2}(q^0-1), p\Big)$$

випливає, що $\varkappa > q^0 - 1$. Отже, числа p і $\varkappa$, які задовольняють умови теореми 1, існують. Крім того, пункт 4 і умова $r \geq \frac{n}{2}(q^0-1) > \phi$ означають, що

$$\beta(q^0, r) < 1. \tag{54}$$

Оскільки $r < \frac{p}{q^0-1}$, то $p > r(q^0-1)$ і з пункту 5 отримаємо, що $\beta(q^0,p)\varkappa < 1$.

Доведемо, що оператор $\mathcal{A}$ з (17) задовольняє умови твердження 1. Нехай $\varepsilon > 0$, $\tau \in (0, T]$ – довільні числа,

$$\overline{B_{\varepsilon,\tau}} = \{v : (0,\tau) \to L^p(\Omega) \quad | \quad ||v||_{p,\varkappa,\tau} \leq \varepsilon\}.$$

Приймемо довільне $v \in \overline{B_{\varepsilon,\tau}}$ та використаємо оцінку (47) з цим v та з $w = 0$. Це законно, бо ми щойно довели, зокрема, що r та p задовольняють умови леми 10. Згідно з (17) одержимо рівність $(\mathcal{A}0)(t) = z_0(t)$ для всіх $t \in [0, T]$, де z_0 взято з (16), а тому (47) набуде вигляду

$$||\mathcal{A}v - z_0||_{p,\varkappa,\tau} \leq \mathscr{A}(r,p)\,\tau^{1-\beta(q^0,r)}||v||_{p,\varkappa,\tau}S_{q-2}(||v||_{p,\varkappa,\tau}) \leq \mathscr{A}(r,p)\,\tau^{1-\beta(q^0,r)}\varepsilon S_{q-2}(\varepsilon).$$

Крім того, $||\mathcal{A}v - z_0||_{p,\varkappa,\tau} \geq ||\mathcal{A}v||_{p,\varkappa,\tau} - ||z_0||_{p,\varkappa,\tau}$. Тому

$$||\mathcal{A}v||_{p,\varkappa,\tau} \leq ||z_0||_{p,\varkappa,\tau} + C_{15}\tau^{1-\beta(q^0,r)}\varepsilon S_{q-2}(\varepsilon), \tag{55}$$

де додатна стала C_{15} не залежить від $u_0, f, v, \tau, \varepsilon$.

З оцінок (30), (32) для $p_1 = p_2 = p$, $\lambda = \mu = \varkappa$ (що законно) одержимо таке:

$$||z_0||_{p,\varkappa,\tau} \leq ||\mathcal{J}_0 u_0||_{p,\varkappa,\tau} + ||\mathcal{J}f||_{p,\varkappa,\tau} \leq \mathscr{L}_0(p,p)\tau^{\frac{1}{\varkappa}-\sigma(p,p)}||u_0||_p +$$

$$+ \mathscr{L}(p,p;\varkappa,\varkappa)\tau^{\frac{1}{\varkappa}-\sigma(p,p)+\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}||f||_{p,\varkappa,\tau} = C_{16}\tau^{\frac{1}{\varkappa}}||u_0||_p + C_{17}\tau||f||_{p,\varkappa,\tau}, \tag{56}$$

де додатні сталі C_{16} та C_{17} не залежать від $u_0, f, v, \tau, \varepsilon$.

Отож, з (55) і (56) отримаємо оцінку

$$||\mathcal{A}v||_{p,\varkappa,\tau} \leq C_{16}\tau^{\frac{1}{\varkappa}}||u_0||_p + C_{17}\tau||f||_{p,\varkappa,\tau} + C_{15}\tau^{1-\beta(q^0,r)}\varepsilon S_{q-2}(\varepsilon).$$

Припустимо, що

$$||u_0||_p \leq \varepsilon^2, \quad ||f||_{p,\varkappa,T} \leq \varepsilon^2. \tag{57}$$

Тоді умова $\mathcal{A}(\overline{B_{\varepsilon,\tau}}) \subset \overline{B_{\varepsilon,\tau}}$ виконується, якщо

$$C_{16}\tau^{\frac{1}{\varkappa}}\varepsilon^2 + C_{17}\tau\varepsilon^2 + C_{15}\tau^{1-\beta(q^0,r)}\varepsilon S_{q-2}(\varepsilon) \leq \varepsilon,$$

тобто, коли

$$C_{16}\tau^{\frac{1}{\varkappa}}\varepsilon + C_{17}\tau\varepsilon + C_{15}\tau^{1-\beta(q^0,r)}S_{q-2}(\varepsilon) \le 1. \tag{58}$$

Тепер приймемо довільні $v, w \in \overline{B_{\varepsilon,\tau}}$ та використаємо оцінку (47) і лему 7

$$||\mathcal{A}v - \mathcal{A}w||_{p,\varkappa,\tau} \le \mathscr{A}(r,p)\,\tau^{1-\beta(q^0,r)}S_{q-2}(||v||_{p,\varkappa,\tau} + ||w||_{p,\varkappa,\tau})||v-w||_{p,\varkappa,\tau} \le$$

$$\le D||v-w||_{p,\varkappa,\tau},$$

де $D = 2^{q^0-2}\mathscr{A}(r,p)\,\tau^{1-\beta(q^0,r)}S_{q-2}(\varepsilon)$. Зрозуміло, що оператор $\mathcal{A}$ є стиском на $\overline{B_{\varepsilon,\tau}}$, якщо $D < 1$, тобто, коли

$$2^{q^0-2}\mathscr{A}(r,p)\,\tau^{1-\beta(q^0,r)}S_{q-2}(\varepsilon) < 1. \tag{59}$$

Підсумуємо отримані нами факти. Якщо виконуються оцінки (58), (59), то оператор $\mathcal{A}$ задовольняє умови твердження 1, тому має нерухому точку – розв'язок рівняння (11). Оцінки (58), (59) (враховуючи (57), (54) та пункт 1 леми 7) виконуються за однієї з таких умов:

1) для довільних $u_0 \in L^p(\Omega)$, $f \in L^{\varkappa}(0,T;L^p(\Omega))$ вибираємо $\varepsilon > 0$ таким великим, щоб виконувалися нерівності (57), а потім вибираємо $\tau \in (0,T]$ таким малим, щоб виконувалися оцінки (58), (59); тоді маємо локальний розв'язок для всіх u_0 і f;
2) для заданого τ (точніше для $\tau = T$) вибираємо $\varepsilon > 0$ таким малим, щоб виконувалися оцінки (58), (59), а потім вибираємо $u_0 \in L^p(\Omega)$, $f \in L^{\varkappa}(0,T;L^p(\Omega))$ таким, щоб виконувалися нерівності (57); тоді маємо глобальний розв'язок (11), взагалі кажучи, лише для тих u_0 і f, які мають малу норму.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 5. Результати теореми 1 можна поширити на другу і третю мішані задачі для рівняння (1) та його узагальнень.

5. Висновки. Знайдено умови існування слабкого розв'язку першої мішаної задачі для півлінійного параболічного рівняння (1) зі змінним показником нелінійності. Цей показник задовольняє лише умову **(Q)** зі сталими $2 + \frac{n}{2} < q_0 \le q^0 < +\infty$.

Список використаної літератури

1. *Бугрій О.* Про існування слабкого розв'язку мішаної задачі для модельного півлінійного параболічного рівняння зі змінним степенем нелінійності / *О. Бугрій* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2011. – Вип. 75. – С. 79-90.
2. *Buhrii O.* On solvability of model nonhomogeneous problems for semilinear parabolic equations with variable exponents of nonlinearity / *О. Бугрій* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77. – С. 29-40.
3. *Antontsev S.* Nonlinear PDEs in Sobolev spaces with variable exponents / *S. Antontsev, S. Shmarev* // Preprint CMAF Pre-2013-015 (2013).
4. *Бокало М.* Мішана задача для еліптично-параболічних анізотропних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності / *М. Бокало* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2013. – Вип. 78. – С. 14-26.
5. *Бугрій О.М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності / *О.М. Бугрій* // Матем. студії. – 2005. – Т. 24, №2. – С. 167-172.

6. *Mashiyev R.A.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *R.A. Mashiyev, O.M. Buhrii* // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – Vol. 377. – P. 450-463.
7. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас.* – М.: Мир. – 1978. – 336 с.
8. Математическая энциклопедия. В 5 т. / Гл. ред. И. М. Виноградов. – Т. 1. – М.: Советская энциклопедия, 1984. — 1140 с.
9. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. / *М.І. Матійчук.* – Чернівці: Прут, 2003.
10. *Giga Yo.* Solutions for semilinear parabolic tquations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system / *Yo. Giga* // J. Diff. Equat. – 1986. – Vol. 61. – P. 186-212.
11. *Треногин В.А.* Функциональный анализ / *В.А. Треногин.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 488 с.
12. *Weissler F.B.* Semilinear evolution equations in Banach spaces / *F.B. Weissler* // J. Func. Anal. – 1979. – Vol. 32. – P. 277-296.
13. *Byström J.* Sharp constants for some inequalities connected to the p-Laplace operator / *J. Byström* // Journal of inequalities in Pure and Applied Mathematics. – 2005. – Vol. 6, Issue 2. – Article 56. – P. 1-8. – М., 1948. – 456 с.
14. *Orlicz W.* Uber Konjugierte Exponentenfolgen / *W. Orlicz* // Studia Mathematica (Lwow). – 1931. – Vol. 3. – P. 200-211.
15. *Kováčik O.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ / *O. Kováčik, J. Rakosnik* // Czechoslovak Math. J. – 1991. – 41 (116). – P. 592-618.
16. *Fan X.* Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$-Laplacian equations in $\mathbb{R}^n$ / *X. Fan, X. Han* // Nonlinear Analysis. – 2004. – Vol. 59. – P. 173-188.
17. *Харди Г.Г.* Неравенства / *Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтльвуд, Г. Полиа* – М., 1948. – 456 с.

*Стаття: надійшла до редакції 16.01.2014
прийнята до друку 28.02.2014*

ON SOLVABILITY OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR MODEL SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH EXPONENT OF NONLINEARITY $q(x,t) > 2 + \frac{2}{n}$

Oleh BUHRII

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua*

The initial-boundary value Dirichlet problem for the equation

$$u_t - \Delta u + g(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u = f(x,t)$$

is considered in a cylinder domain of $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. The existence of a mild solution to the problem is proved provided the condition $q(x,t) \geq q_0 > 2 + \frac{2}{n}$ holds.

Key words: nonlinear parabolic equation,initial-boundary value problem, variable exponent of nonlinearity, generalized Lebesque spaces, mild solution, Green's function.

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОКАЗАТЕЛЕМ НЕЛИНЕЙНОСТИ $q(x,t) > 2 + \frac{2}{n}$

Олег БУГРИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Исследована смешанная задача Дирихле для уравнения

$$u_t - \Delta u + g(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u = f(x,t)$$

в цилиндрической области из $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. При условии $q(x,t) \geq q_0 > 2 + \frac{2}{n}$ доказано существование слабого решения этой задачи.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение, смешанная задача, переменная степень нелинейности, обобщённые пространства Лебега, слабое решение, функция Грина.