

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ З ВИТОЧКОЮ ДОВІЛЬНОГО ГЛАДКОГО ОБРИСУ

Ігор КУЗЬ, Ольга КУЗЬ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013
e-mail: ihorukuz24@gmail.com*

Проведено зіставлення розрахунків полів напружень у пружній пластині з виточкою по дузі кола, еліпса або параболи, отриманих аналітично-числовим методом на підставі комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі, та числовим варіаційно-різницевим методом. Ці поля відрізняються не більше, ніж на 2%, що, зокрема, свідчить про достовірність числової реалізації.

Ключові слова: півплощина, пластина, виточка, варіаційно-різницевий метод, поле напружень.

1. Вступ. Дослідження напружено-деформованого стану пластинчастих елементів конструкцій, послаблених виточками, [1] є необхідним етапом розрахунку їхньої міцності та надійності. Оскільки такі елементи конструкцій мають скінченні розміри чи криволінійну межу, то можливість застосування аналітичних методів розв'язування відповідних крайових задач [2] значно обмежена, а у більшості випадків і неможлива.

Ми провели зіставлення отриманих розв'язків плоских задач теорії пружності про одновісний розтяг пластинчастого конструкційного елемента з виточкою довільного гладкого обрису аналітично-числовим методом, використовуючи комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі [3], та числовим за допомогою варіаційно-різницевого методу [4].

2. Аналітично-числовий метод розв'язування задачі. Елементу завтовшки h , який моделюємо півплощиною, на поверхні якого зроблено виточку довільного гладкого обрису [3]. Вважаємо, що півплощина розтягується на нескінченності нормальними напруженнями величини P (рис. 1), а межа півплощини з виточкою є вільною від навантаження.

Виберемо декартову систему координат Oxy , спрямувавши вісь Ox уздовж прямолінійної межі, а вісь ординат – догори. Лінію, яку окреслює виточка, позначимо через L , прямолінійну частину межі півплощини – через L' . Нижню півплощину площини xOy позначимо через S^- , верхню – через S^+ .

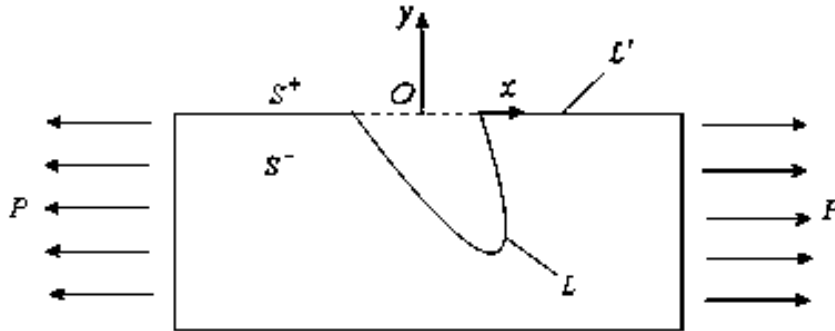


Рис. 1. Пластинчастий елемент з виточкою за одновісного розтягу

Згідно з формулюванням задачі будемо мати такі крайові умови:

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad x \in L'; \quad N = T = 0, \quad t \in L,$$

де N і T – нормальна й дотична компоненти вектора напруження на L , відповідно.

Для розв'язування задачі введемо комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ [2], які подамо у вигляді

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \frac{P}{4}, \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) - \frac{P}{2}.$$

Тут $\Phi_2(z)$ і $\Psi_2(z)$ – комплексні потенціали, які голоморфні у нижній півплощині, та повинні забезпечити виконання нульових крайових умов на осі $y = 0$, а коригувальні комплексні потенціали $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$ відповідають за виконання крайових умов на поверхні виточки.

Аналітично продовживши функцію $\Phi_2(z)$ з області S^- в область S^+ та розв'язавши відповідну задачу лінійного спряження, отримаємо сингулярне інтегральне рівняння [1], яке розв'язуємо числово за допомогою методу механічних квадратур [5].

3. Варіаційно-різницевий метод розв'язування задачі. Розглядається плоска задача теорії пружності в скінченній області V з криволінійною межею Σ (див. рис. 1), яка моделює напружено-деформований стан у пластинчастому елементі з виточкою довільної гладкої форми. З математичного погляду вона полягає у розв'язуванні рівнянь рівноваги в пластинчастому елементі [6]

$$(C_{ijkl}u_{k,l})_{,j} = 0 \tag{1}$$

з використанням мішаних крайових умов на його поверхні Σ

$$C_{ijkl}u_{k,l}n_j |_{\Sigma} = P_i. \tag{2}$$

Тут C_{ijkl} – компоненти тензора модулів пружності; u_i, P_i, n_j – компоненти векторів переміщень, поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні Σ відповідно; $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$. За однаковими індексами, які трапляються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до двох.

Для числового розв'язування задачі (1) – (2) зручно використовувати її варіаційне формулювання [7], яке полягає у мінімізації лагранжіана

$$L = \int_V W dV - \int_{\Sigma} P_i u_i d\Sigma, \quad (3)$$

де $W = \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l}$ – питома енергія пружної деформації.

Запишемо лагранжіан (3) у канонічній області V_0 , якою може бути прямокутник або область, складена з них. Для цього використаємо дискретне взаємно однозначне відображення сітки в криволінійній області V на рівномірну прямокутну сітку $N_1 \times N_2$ області V_0 (рис. 2)

$$x_i = x_i(\beta^1, \beta^2) \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Тоді $J = \det(A_i^j)$, $g_{ij} = A_i^m A_j^m$, де $A_i^j = \partial x_i / \partial \beta^j$ – матриця Якобі цього відображення. За допомогою (4) запишемо питому енергію деформації W у координатах $\vec{\beta}$

$$W = \frac{1}{2} C^{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} = \frac{1}{2} C^{ijkl}(\vec{\beta}) B_j^m B_l^n u_{i|m} u_{k|n} = \frac{1}{2} D^{imkn}(\vec{\beta}) u_{i|m} u_{k|n},$$

де $u_{i|m} \equiv \partial u_i / \partial \beta^m$, $B_j^m = \partial \beta^m / \partial x_j$, $D^{imkn} = C^{ijkl} B_j^m B_l^n$.

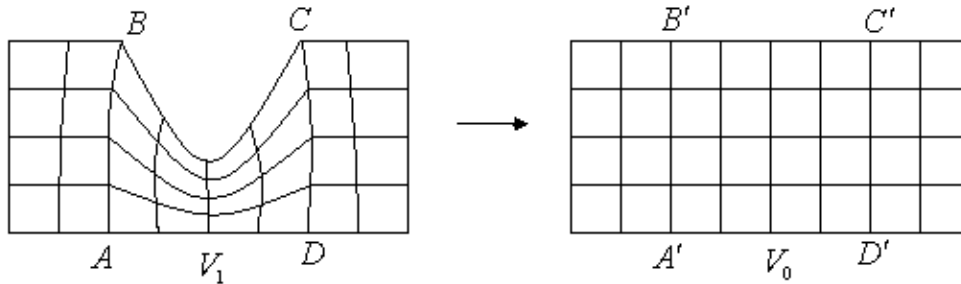


Рис. 2. Відображення сітки в криволінійній області V на рівномірну прямокутну сітку області V_0

Отже, лагранжіан у прямокутнику V_0 набуде вигляду

$$L_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0} J D^{imkn} u_{i|m} u_{k|n} dv - \int_{\Sigma_0} q(\vec{\beta}) P_i u_i d\Sigma, \quad (5)$$

де $q(\vec{\beta}) = \begin{cases} \sqrt{g_{11}}, & \beta^2 = \{0, l_2\}, \\ \sqrt{g_{22}}, & \beta^1 = \{0, l_1\}. \end{cases}$

Замінивши в (5) усі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченними сумами, похідні – різницеви похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана L_0^h за допомогою дискретного аналога відображення (4), яке не мусить бути задане аналітично, зокрема бути конформним. Достатньо мати взаємно однозначну

відповідність між вузлами сітки в криволінійній V_1 та в модельній V_0 областях. Для визначення стаціонарної точки L_0^h матимемо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\partial L^h / \partial v_\beta^h(i_1, i_2) = 0, \quad i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (6)$$

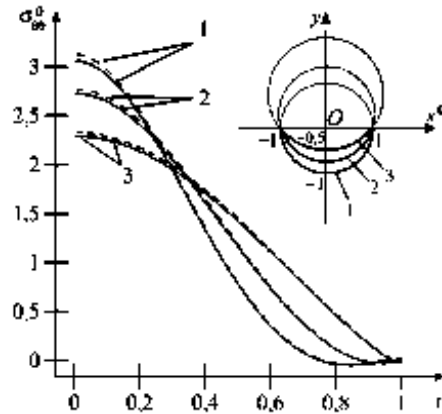


Рис. 3. Напруження $\sigma_{\theta\theta}^0$ на виточці по дузі кола для $l = 1$ за різних значень δ

Такий підхід спричиняє неможливість використання прямих методів розв'язування системи (6) через накопичення похибок заокруглень. Однак це вдалося зробити за допомогою комбінованого дворівневого ітераційного процесу, який реалізує схему градієнтного методу та методу з чебишовським набором ітераційних параметрів [8]. Складністю його практичної реалізації є підбір ітераційних параметрів.

Описаний варіаційно-різницевий метод в областях з криволінійною межею реалізований у вигляді пакета програм на алгоритмічній мові FORTRAN з підпрограмою побудови сітки на DELPHI.

4. Результати. Наприклад, обчислення компонент тензора напружень на виточці та поблизу неї виконано, якщо її межею є дуга кола, еліпса або параболи.

На рис. 3 та 4 зображено графіки безрозмірних напружень $\sigma_{\theta\theta}^0 \equiv \sigma_{\theta\theta}/P$, $\sigma_{xx}^0 \equiv \sigma_{xx}/P$ та $\sigma_{yy}^0 \equiv \sigma_{yy}/P$ для виточок по дузі кола. Тут і надалі $2l$ – ширина виточки (вздовж осі Ox); δ – висота виточки (вздовж осі Oy); $a = \delta/l$ – безрозмірний параметр відносної заглибленості виточки; $\sigma_{\theta\theta}^0$ – безрозмірні кільцеві напруження на виточці; $\sigma_{xx}^0, \sigma_{yy}^0$ – безрозмірні нормальні напруження на відріжку $x^0 \equiv x/l = 0$, $y^0 \equiv y/\delta \in [-5, -1]$ (вздовж осі Oy нижче виточки). Штрихованими лініями зображено напруження, отримані аналітично-числовим методом, а суцільними – варіаційно-різницевим методом.

На рис. 3 криві 1 побудовані при $\delta = 1$, криві 2 – при $\delta = 0,75$, криві 3 – при $\delta = 0,5$. Як видно з цього рисунка, напруження $\sigma_{\theta\theta}^0$ (фактично коефіцієнт концентрації напружень) у вершині виточки ($\eta = 0$) найбільшого значення набуває у випадку виточки по півколу (криві 1). Причому воно лише дещо перевищує властиве для задачі Кірша значення 3.

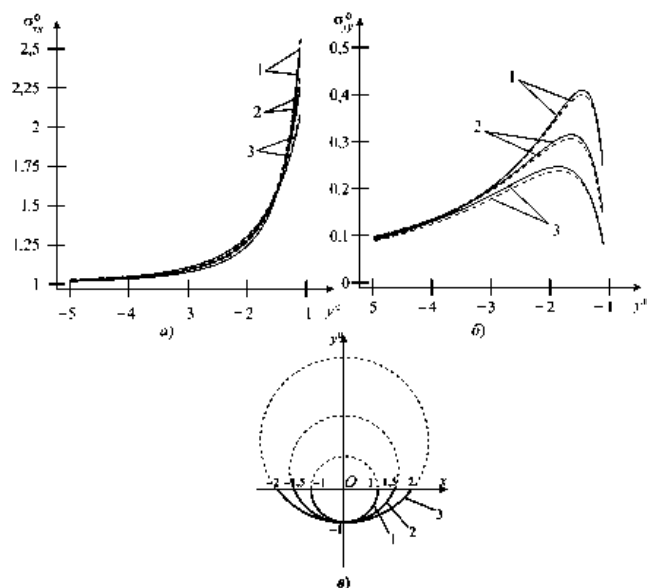


Рис. 4. Напруження σ_{xx}^0 та σ_{yy}^0 на продовженні осі симетрії виточки по дузі кола для $\delta = 1$ за різних значень l

Тут і надалі точність отриманих результатів становить чотири значущі цифри (похибка порядку 0,1%). Контроль збіжності та точності аналітично-числового і числового розв'язку проводимо за допомогою порівняння досліджуваних величин на сітках з одинарною та подвійною кількістю вузлів.

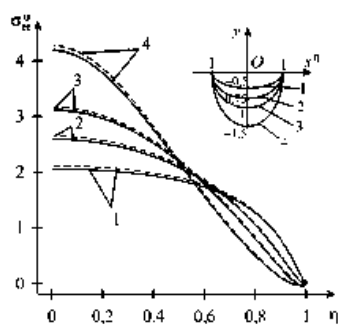


Рис. 5. Напруження $\sigma_{\tau\tau}^0$ на виточці по дузі еліпса для $l = 1$ за різних значень δ

На рис. 4 криві 1 побудовані при $l = 1$, криві 2 – при $l = 1,5$, криві 3 – при $l = 2$. Як видно з рис. 4, нормальне напруження σ_{xx}^0 значно нижче виточки ($y = -5$) практично дорівнює P , а у вершині виточки – очевидно, що $\sigma_{xx}^0 = \sigma_{\theta\theta}^0$.

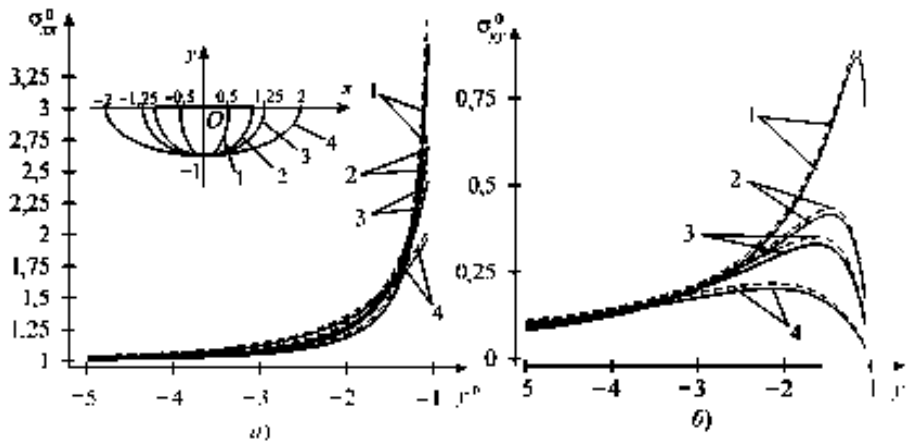


Рис. 6. Напруження σ_{xx}^0 та σ_{yy}^0 на продовженні осі симетрії виточки по дузі еліпса для $\delta = 1$ за різних значень l

На рис. 5 та 6 зображено відповідні графіки напружень $\sigma_{\theta\theta}^0$, σ_{xx}^0 та σ_{yy}^0 для виточок по дузі еліпса.

На рис. 5 криві 1 побудовані при $\delta = 0,5$, криві 2 – при $\delta = 0,75$, криві 3 – при $\delta = 1$, криві 4 – при $\delta = 1,5$.

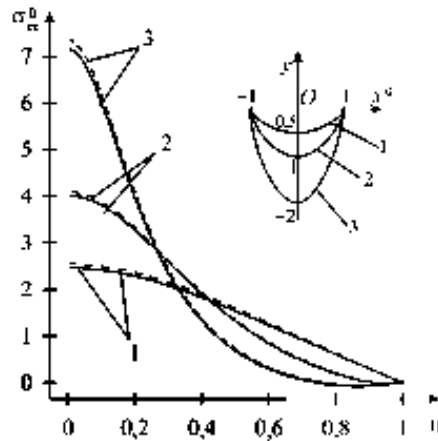


Рис. 7. Напруження $\sigma_{\tau\tau}^0$ на виточці по дузі параболи для $l = 1$ за різних значень δ

На рис. 6 криві 1 побудовані при $l = 0,5$, криві 2 – при $l = 1$, криві 3 – при $l = 1,25$, криві 4 – при $l = 2$.

На рис. 7 та 8 зображено графіки напружень $\sigma_{\tau\tau}^0$, σ_{xx}^0 та σ_{yy}^0 для виточок по дузі параболи.

На рис. 7 криві 1 побудовані при $\delta = 0,5$, криві 2 – при $\delta = 1$, криві 3 – при $\delta = 2$.

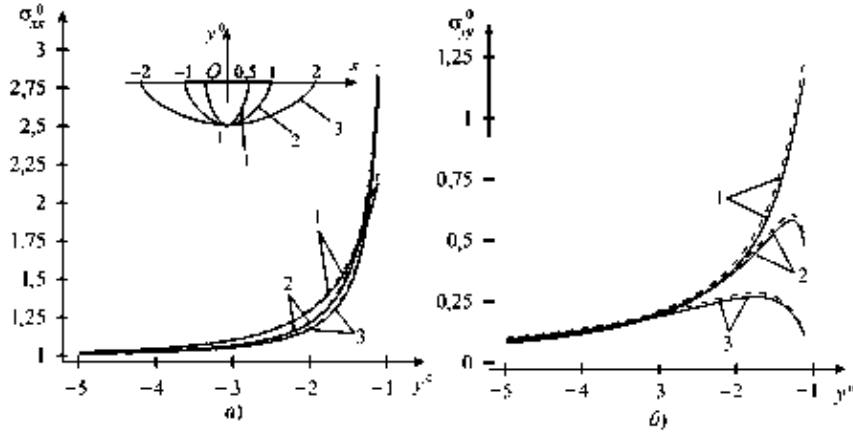


Рис. 8. Напруження σ_{xx}^0 та σ_{yy}^0 на продовженні осі симетрії виточки по дузі параболи для $\delta = 1$ за різних значень l

На рис. 8 криві 1 побудовані при $l = 0,5$, криві 2 – при $l = 1$, криві 3 – при $l = 2$.

На рис. 9 зображено зміну напруження $\sigma_{\tau\tau}^0$ для трьох типів виточок однакової заглибленості (дуга кола, параболи та еліпса, які проходять через три фіксовані точки), що дає змогу виявити вплив форми виточки на напружений стан пластини.

На рис. 9 крива 1 подана для кола, крива 2 – для параболи, крива 3 – для еліпса.

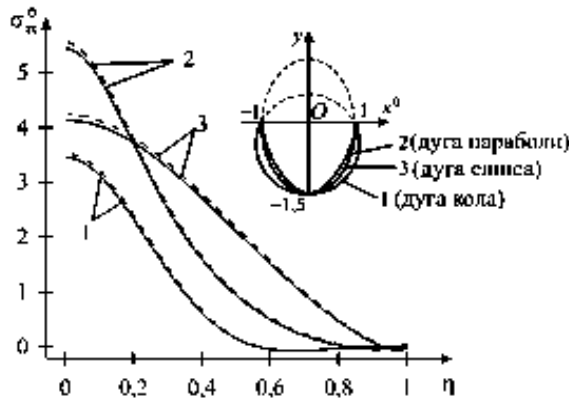


Рис. 9. Напруження $\sigma_{\tau\tau}^0$ на поверхні виточок однакової заглибленості по дузі кола, параболи та еліпса для $l = 1, \delta = 1,5$

5. Висновки. Як видно з рис. 5-8, подані напруження у вершині виточки по дузі еліпса чи параболи значно зростають зі збільшенням відносної глибини виточки (зі збільшенням її глибини або зменшенням ширини). Як видно з рис. 9, гострота виточки, очевидно, також збільшує рівень напружень.

Як видно з рис. 3-9, поля напружень, отримані аналітично-числовим і числовим методами, різняться між собою не більше як на 2%. Цю розбіжність можна пояснити тим, що в аналітичному розв'язку область вважається безмежною, а числовий розрахунок проводився, очевидно, для скінченної області.

Отож, розвинута методика числового визначення напружень та їхніх концентрацій добре справджується для розв'язування плоских задач теорії пружності в пластинках з виточкою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kuz O.* Stress state of semiplane with cut under uniform extension / *O. Kuz* // Abstract of The Sixth Polish-Ukrainian Conference "Current problems of mechanics of nonhomogeneous media" (Warsaw, September, 6-10, 2005). – Warsaw, 2005. – P. 76-77.
2. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / *Н.И. Мухелишвили*. – М.: Наука, 1966.
3. *Savruk M.P.* Stress concentration near a rounded v-notch with arbitrary vertex curvature / *M.P. Savruk, A. Kazberuk* // Acta mechanica et automatica. – 2007. – Vol. 1, №1. – P. 99-102.
4. *Кузь І.* Напружено-деформований стан пружно-пластичних пластин з розрізом або абсолютно-жорстким включенням / *І. Кузь, І. Тімар* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 148-154.
5. *Панасюк В.В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / *В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацьшин*. – К.: Наук. думка, 1976.
6. *Суллим Г.Т.* Теорія пружності. Т. 1: Загальні питання / *В.В. Божидарник, Г.Т. Суллим*. – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2012.
7. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности / *Б.Е. Победря*. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.
8. *Шешенин С.В.* О прикладных итерационных методах / *С.В. Шешенин, И.С. Кузь* // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. – 1990. – Вып. 1. – С. 63-74.

*Стаття: надійшла до редакції 31.01.2014
прийнята до друку 28.02.2014*

STRESS-STRAIN STATE ELASTIC PLATE WITH NOTCH OF AN ARBITRARY SMOOTH CONTOUR

Ihor KUZ, Olga KUZ

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
National University "Lviv Polytechnic",
Bandery Str., 12, Lviv, 79013
e-mail: ihorkuz24@gmail.com*

The paper contains comparing calculations of the stress fields in an elastic plate with notch along the arc of a circle, ellipse, and parabola obtained by the analytic-numerical method based on the complex Kolosov-Mushelishvili potentials and by the numerical variation-difference method. These fields differ by no more than 2%, which, in particular, indicates the reliability of such numerical implementation.

Key words: semi-plane, plate, notch, variation-difference method, stress field.

НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ВЫРЕЗКОЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ГЛАДКОГО КОНТУРА

Игорь КУЗЬ, Ольга КУЗЬ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
Национальный университет "Львовская политехника",
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013
e-mail: ihorkuz24@gmail.com*

Выполнено сравнение расчетов полей напряжений в упругой пластине с вырезкой по дуге окружности, эллипса или параболы, полученных аналитически-числовым методом с использованием комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили, и числовым вариационно-разностным методом. Эти поля отличаются не более чем на 2%, что, в частности, свидетельствует о правдивости численной реализации.

Ключевые слова: полуплоскость, пластина, вырезка, вариационно-разностный метод, поле напряжений.