ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 140–144
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 140–144

УДК 512.552.13

КОМУТАТИВНІ E-АТОМНІ КІЛЬЦЯ

Андрій САГАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: andrijsagan@gmail.com

Введено поняття e-атомного кільця. З'ясовано, що комутативне кільце Діріхле є e-атомним кільцем. Доведено, що комутативне e-атомне кільце є кільцем з елементарною редукцією матриць, а також, що комутативне локальне e-атомне кільце є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Ключові слова: евклідове кільце, кільце Діріхле, кільце Безу, елементарна редукція матриць, елементарно головне кільце.

1. Вступ. Досліджено комутативні кільця, над якими довільна матриця зводиться до канонічного діагонального вигляду (тобто вигляду, де кожен попередній діагональний елемент є повним дільником наступного) елементарними перетвореннями. Задачу знаходження необхідних і достатніх умов, які треба накласти на кільце, щоб довільна матриця над цим кільцем зводилась до канонічного діагонального вигляду домноженням на відповідні елементарні матриці (такі кільця назвали "кільця з елементарною редукцією матриць"), сформулював Б.В. Забавський у 1996 р. [5]. Ця проблема має своїм прототипом відому теорему Гауса (про еквівалентність довільної матриці над полем діагональній матриці з одиницями та нулями на головній діагоналі), результати Сміта (про зведення цілочисельних матриць до діагонального вигляду елементарними перетвореннями рядків і стовпців), дослідження Діксона, Веддербарна, ван дер Вердена, Джекобсона, Тейхмюллера та інших, які поширили результати Сміта на різні класи комутативних і некомутативних кілець (кільця Евкліда, області головних ідеалів і т.д.). Крім того, ця задача має тісний перетин із кільцями елементарних дільників (які у 1949 р. ввів до розгляду І. Капланський [3]), тобто кільцями, над якими довільна матриця зводиться до канонічного діагонального вигляду домноженням на відповідні оборотні матриці. Пізніше було знайдено приклади кілець елементарних дільників, які не є кільцями з елементарною редукцією матриць. Отож, задачу, яку ми розв'язуємо, можна сформулювати так: дослідження комутативних кілець елементарних дільників, над якими довільна оборотна матриця розкладається у добуток елементарних матриць.

2. Головні результати. Всі розглянуті в цій праці кільця є комутативними з відмінною від нуля одиницею.

Через $U(R)$ позначимо групу оборотних елементів кільця R, а через $GL_n(R)$ — групу всіх оборотних матриць порядку n з елементами кільця R.

Під елементарними матрицями з елементами кільця розуміємо квадратні матриці таких типів: 1) діагональні з оборотними елементами на головній діагоналі; 2) матриці, відмінні від одиничної деяким ненульовим елементом поза головною діагоналлю. Групу всіх елементарних матриць другого типу порядку n з елементами з кільця R позначатимемо $GE_n(R)$.

Кільце називають *елементарно головним* [1], якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують такий елемент $d \in R$ і матриця $Q \in GE_2(R)$, що $(a, b)Q = (d, 0)$.

Кільцем Безу [2] називають кільце, в якому довільний скінченно породжений ідеал є головним.

Під *атомом* [8] розуміємо елемент, який є необоротним і не зображується у вигляді добутку двох необоротних елементів.

Область R називатимемо *кільцем Діріхле* [4], якщо для елементів $a, b \in R$, таких, що $aR + bR = R$ існує елемент $t \in R$, що елемент $a + bt = q$, де q — атом кільця R.

Нехай R — кільце і $a, b \in R$. Пара (a, b) називається *e-атомною парою*, якщо існують матриця $Q \in GE_2(R)$ і атом $q \in R$, що $(a, b)Q = (q, m)$, де $m \in R$. Область R називається *e-атомним кільцем*, якщо для будь-яких $a, b \in R$ таких, що $aR+bR = R$ і $0 \neq c \in R$, існує $y \in R$, що $(a + by, c)$ є e-атомною парою.

Кільце R називається *кільцем з елементарною редукцією матриць* [5], якщо довільна матриця A над кільцем R *володіє елементарною редукцією*, тобто існують такі елементарні над R матриці $P_1, \dots, P_k$, $Q_1, \dots, Q_s$ відповідних розмірів, що

$$P_1 \cdot P_2 \cdots P_k \cdot A \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_s = diag(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0),$$

де $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq R\varepsilon_i \cap \varepsilon_i R$ для $i = 1, 2, \dots, r-1$.

Твердження 1. *Нехай R — кільце Діріхле, тоді R є e-атомним кільцем.*

Доведення. Нехай R — кільце Діріхле. Отримаємо $aR + bR = R$, де $a, b \in R$ і $0 \neq c \in R$. Зафіксуємо такий елемент $y \in R$, що $a + by = q$ — атом з R. Тоді маємо $(a + by, c)I_2 = (a + by, c)$, де I_2 — одинична матриця другого порядку над кільцем R. Це засвідчує, що пара $(a + by, c)$ є e-атомною. Тому R є e-атомним кільцем. □

Прикладами e-атомного кільця може слугувати кільце цілих чисел, кільце $R = \{z_0 + a_1x + \ldots + a_nx^x + \ldots | z_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Q}\}$ та ін.

Теорема 1. *Нехай R — кільце. Тоді такі твердження еквівалентні:*

1) *R — e-атомне кільце;*
2) *для будь-яких $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ і $0 \neq c \in R$, існують $y \in R$ і скінченні набори g_i, r_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ елементів з R, що r_n є атомом, причому*

$$a + by = cg_1 + r_1,\ c = r_1g_2 + r_2,\ \ldots\ ,\ r_{n-2} = r_{n-1}g_n + r_n.$$

Доведення. (1) ⇒ (2) Нехай $aR+bR = R$, де $a, b \in R$ і $0 \neq c \in R$. Згідно з означенням e-атомного кільця існує $y \in R$, $Q \in GE_2(R)$ і атомний елемент $q \in R$ такі, що $(a + by, c)Q = (q, m)$, де $m \in R$. Оскільки матриця $Q \in GE_2(R)$, то згідно з [8] її можна подати у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -g_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -g_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix},$$

де $u_1, u_2 \in U(R)$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$(a+by, c) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -g_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -g_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (qu_1^{-1}, mu_2^{-1}).$$

Нехай $(a+by, c) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g_1 & 1 \end{pmatrix} = (r_1, c)$. Тоді $a + by = cg_1 + r_1$. Нехай $(r_1, c) \begin{pmatrix} 1 & -g_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (r_1, r_2)$. За індукцією отримаємо

$$(r_{n-3}, r_{n-2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g_{n-1} & 1 \end{pmatrix} = (qu_1^{-1}, r_{n-2}),$$

$$(qu_1^{-1}, r_{n-2}) \begin{pmatrix} 1 & -g_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (qu_1^{-1}, mu_2^{-1}).$$

Тоді $r_{n-3} = r_{n-2}g_{n-1} + qu_1^{-1}$ і $r_{n-2} = qu_1^{-1}g_{n-1} + mu_2^{-1}$. Нехай $qu_1^{-1} = r_{n-1}$ і $mu_2^{-1} = r_n$. Тому одержимо послідовність співвідношень

$$a + by = cg_1 + r_1,\ c = r_1g_2 + r_2,\ \ldots,\ r_{n-2} = r_{n-1}g_n + r_n,$$

де $r_n \in R$ — атом.

(2) $\Rightarrow$ (1) За умовою для будь-яких $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ і $0 \neq c \in R$, існує $y \in R$ і скінченний ланцюг подільності

$$a + by = cg_1 + r_1,\ c = r_1g_2 + r_2,\ \ldots,\ r_{n-2} = r_{n-1}g_n + r_n,$$

де $r_n \in R$ — атом. Тоді запишемо цей ланцюг у вигляді

$$(a+by, c) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -g_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -g_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -g_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (r_n, r_{n-1}).$$

Нам залишилось довести, що матриця $F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ є елементарною. Отримали

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GE_2(R),$$

що й треба було довести. □

Твердження 2. *Будь-яке е-атомне кільце Безу є елементарно головним.*

Доведення. Нехай R — e-атомне кільце Безу. Розглянемо довільні елементи $a, b \in R$. Оскільки R — кільце Безу, то $aR + bR = dR$ для деякого елемента $d \in R$. Тоді існують такі елементи $a_0, b_0, u, v \in R$, що $a = da_0, b = db_0, au + bv = d$. Звідси отримуємо $d(a_0u + b_0v - 1) = 0$. Нехай $c = a_0u + b_0v - 1$, тоді $a_0R + (b_0v - c)R = R$ і $dc = 0$. За умовою існує $x \in R$ і $Q \in GE_2(R)$, що $(a_0 + (b_0v - c)x, b_0)Q = (q, m)$, де q — атом з R і $m \in R$. Тоді за теоремою 6 [7] існує матриця $P \in GE_2(R)$, що $(q, m)P = (q, 0)$. Отже, отримаємо

$$(a + bvx, b)QP = d(a_0 + (b_0v - c)x, b_0)QP = d(q, 0) = (dq, 0).$$

Тоді
$$(a,b)\begin{pmatrix}1 & 0\\ vx & 1\end{pmatrix}GP=(dq,0).$$
Отже, R — елементарно головне кільце. □

Теорема 2. *Нехай R — e-атомне кільце. Тоді еквівалентні такі твердження:*

1) *R — кільце з елементарною редукцією матриць;*
2) *R — кільце Безу.*

Доведення. За твердженням 2 кільце R є елементарно головним, тому за твердженням 2 [6] для доведення достатньо розглянути матриці вигляду $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & o\end{pmatrix}\in M_2(R)$, де $aR+bR+cR=R$. Тоді існують $x,y,z\in R$, що $ax+by+cz=1$. Отже, $aR+(by+cz)R=R$. За умовою існує деяке $t\in R$, що $a+(by+cz)t=p$, де $p\in R$ і пара (p,b) є e-атомною. Тому
$$\begin{pmatrix}1 & zt\\ 0 & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1 & 0\\ yt & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & b\\ c & 0\end{pmatrix}.$$
Оскільки (p,b) — e-атомна пара, то існують $Q\in GE_2(R)$ і $d\in R$, що $(p,b)Q=(q,d)$, де q є атомом з R.

Отже,
$$\begin{pmatrix}p & b\\ c & 0\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}q & d\\ * & *\end{pmatrix}=C.$$
За теоремою 6 [7] матриця C, а отже, і матриця A володіє елементарною редукцією. Тому R — кільце з елементарною редукцією матриць.

Необхідність очевидна. □

Як наслідок отримаємо таку теорему.

Теорема 3. *Нехай R — кільце Діріхле. Тоді еквівалентними є такі твердження:*

1) *R — кільце з елементарною редукцією матриць;*
2) *R — кільце Безу.*

Комутативна область R називається *локальним e-атомним кільцем*, якщо для будь-яких $a,b\in R$, що $aR+bR=R$ і $0\neq c\in R$ хоча б одна з пар (a,c) або (b,c) є e-атомною парою.

Твердження 3. *Локально e-атомне кільце є e-атомним кільцем.*

Доведення. Нехай $aR+bR=R$ і $0\neq c\in R$. Тоді матимемо два випадки:

1) (a,c) є e-атомною парою. Тоді $(a+b\cdot 0,c)$ є e-атомною парою;
2) (a,c) не є e-атомною парою. Оскільки $aR+(a+b)R=R$ і (a,c) не є e-атомною парою, то $(a+b\cdot 1,c)$ — e-атомна пара. Отже, R є e-атомним кільцем.

□

Як наслідок отримаємо таку теорему.

Теорема 4. *Локально e-атомне кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Література

1. *Bougaut B.* Anneaux Quasi-Euclidiens. / B. Bougaut — These de docteur troisieme cycle, 1976.
2. *Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings / M. Henriksen // Michigan Math. J. — 1955. — Vol. 156. — P. 159–163.
3. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules / I. Kaplansky // Trans. Amer. Mat. Sven. — 1949. — Vol. 66. — P. 464–491.
4. *Zabavsky B.V.* Diagonal reduction of matrices over finite stable range rings / B.V. Zabavsky // Mat. Stud. — 2014. — Vol. 41 — P. 101–108.
5. *Zabavsky B.V.* Rings with elementary reduction matrix / B.V. Zabavsky – Ring Theory Conf., Miskolc, July 15-20, 1996.
6. *Zabavsky B.V.* Rings with elementary reduction of matrices / B.V. Zabavsky, O. M. Romaniv // Ukr. mat. journal — 2000. — Vol. 52, №12. — P. 1641–1649.
7. *Забавський Б. В.* О некоммутативних кольцах елементарних делителей / Б.В. Забавський // Укр. мат. журнал — 1987. — Vol. 39, №4. — P. 440–444.
8. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. — М.: Мир, 1975.

Стаття: надійшла до редколегії 23.09.2015
доопрацьована 27.10.2015
прийнята до друку 11.11.2015

COMMUTATIVE E-ATOMIC RINGS

Andrij SAGAN

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: andrijsagan@gmail.com

A concept of e-atomic ring is introduced. It is shown that any commutative Dirichlet ring is an e-atomic ring. It is proved that any commutative e-atomic ring is a ring with elementary reduction of matrices, and that any commutative local e-atomic ring is a ring with elementary reduction of matrices.

Key words: Euclidean ring, Dirichlet ring, Bezout ring, elementary reduction of matrices, elementary principal ring.