ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 5–9
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 5–9

УДК 512.552.13

РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД ОБЛАСТЮ БЕЗУ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1 З УМОВОЮ ДУБРОВІНА ТА УМОВОЮ Z

Василина БОХОНКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: b_ strannik@ukr.net

Доведено, що область Безу стабільного рангу 1 з умовою Дубровіна і умовою Z є кільцем елементарних дільників.

Ключові слова: область Безу, стабільний ранг 1, кільце елементарних дільників, умови Дубровіна та Z.

Кільця елементарних дільників ввів у 1949 р. Капланський [1]. Комутативні кільця елементарних дільників активно вивчають у [2], але цього не можна сказати про некомутативні кільця елементарних дільників. Серед небагатьох праць з теорії некомутативних кілець елементарних дільників відзначимо результат [2], де доведено, що майже атомна область Безу стабільного рангу 1 з умовою Дубровіна є кільцем елементарних дільників.

У цій праці обмеження на майже атомні області Безу знято. Доведено, що область Безу стабільного рангу 1 з умовою Дубровіна з обмеженням певного вигляду на двобічні ідеали (умова Z — з умови $RaR = R$ випливає, що a — скінченний елемент) є кільцем елементарних дільників.

Зауважимо, що умова Дубровіна згідно з [2] є необхідною і достатньою умовою, щоб напівлокальне, напівпервинне кільце Безу було кільцем елементарних дільників. Позаяк напівлокальне кільце є кільцем стабільного рангу 1 [2], то зрозуміло, що умова Дубровіна є, в крайньому випадку, необхідною для розгляду питання канонічної діагональної редукції матриць над кільцями Безу стабільного рангу 1 .

Під кільцем розуміємо асоціативне кільце з одиницею і $1 \neq 0$. Правим (лівим) кільцем Безу називається кільце, в якому довільний скінченнопороджений правий (лівий) ідеал є головним. Кільце, яке є одночасно правим і лівим кільцем Безу, називається кільцем Безу. Скажемо, що кільце R є кільцем стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$ знайдеться такий елемент $t \in R$, що $(a + bt)R = R$ [2].

Елемент кільця називається атомом, якщо він незворотний, ненульовий і не може бути зображеним у вигляді добутку двох незворотних елементів.

Ненульовий елемент a області R назвемо лівим скінченним, якщо довільний тривіальний лівий дільник a є зворотним, або скінченний добуток атомів і правий скінченний елемент — це елемент, довільний правий множник якого зворотний або є добутком скінченної кількості атомів. Елемент a області R назвемо скінченним, якщо він є лівим і правим скінченним. Довжиною $l(a)$ скінченного елемента a області R назвемо кількість атомних дільників.

Зауважимо, що в області Безу елемент є скінченним тоді і лише тоді, коли він має скінченну довжину [2].

Фактично, область Безу є областю головних ідеалів тоді і лише тоді, коли довільний ненульовий, незворотний елемент є скінченним [2].

Матриці A та B називаються еквівалентними, якщо існують оборотні матриці P і Q над кільцем відповідних розмірів, що

$$A = PBQ.$$

Будемо говорити, що матриця A над кільцем R має канонічну діагональну редукцію, якщо вона еквівалентна до діагональної матриці

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_r & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

де $R\varepsilon_{i+1}R \subset \varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i, i \in 1, 2 \ldots, r-1$.

Якщо над кільцем R довільна матриця має канонічну діагональну редукцію, то кільце R називається кільцем елементарних дільників [1].

У [2] Забавський довів, що проста область Безу R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли R є 2–простою, тобто, якщо для довільного ненульового елемента $a \in R$ існують такі елементи $u_1, u_2, v_1, v_2 \in R$, що $u_1av_1 + u_2av_2 = 1$. Зазначимо, що у простій області R для довільного ненульового елемента $a \in R$ отримуємо $RaR = R$.

Мета нашої праці — вивчити різні умови на ідеал RaR. Серед перших видів обмежень на область відзначимо умову L.

Означення 1. *Скажемо, що над областю R виконується умова L, якщо з умови $RaR = R$ випливає, що $aR = R$.*

Твердження 1. *Нехай R є областю з умовою L, в якій довільний максимальний правий ідеал є головним, тоді довільний максимальний правий ідеал — двобічний.*

Доведення. Нехай $M = mR$ — довільний максимальний правий ідеал R, і нехай існує елемент x такий, що $xm \notin M$. Розглянемо правий ідеал $M + xmR = R$, оскільки $M \subseteq M+xmR$, на підставі означення M одержимо $M+xmR = R$, тобто $ms+xmy = 1$ для деяких елементів $s, y \in R$, тобто $RmR = R$. На підставі умови L отримаємо, що m — оборотний елемент R, що неможливо, оскільки mR — максимальний правий ідеал R. Таке протиріччя засвідчує, що $Rm \subseteq mR$, тобто mR є двобічним ідеалом. Теорема доведена. ☐

Означення 2. *Скажемо, що над кільцем R виконується умова Дубровіна, якщо для довільного ненульового елемента $a \in R$ існує елемент $\alpha \in R$ такий, що $RaR = \alpha R = R\alpha$.*

Очевидним прикладом кільця з умовою Дубровіна є просте кільце. Наступна теорема визначає зв'язок кілець з умовою L і кілець з умовою Дубровіна.

Теорема 1. *Нехай R кільце елементарних дільників з умовою L. Тоді R є кільцем з умовою Дубровіна.*

Доведення. Нехай $aR + bR = R$ і розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки R є кільцем елементарних дільників, тоді для матриці A існують оборотні матриці другого порядку P і Q, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $RcR \subseteq zR \cap Rz$.

Оскільки $aR+bR = R$, тоді $RaR+RbR = R$. Зауважимо, що $RaR+RbR = RzR$, оскільки $RcR \subseteq zR \cap Rz$, то $RaR + RbR = RzR$. З умови L випливає, що z — оборотний елемент R.

Нехай $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$, тоді $(p_{11} + p_{12}b)q_{11} = z$ оборотний елемент R. Тобто $Ra + Rb = R$.

Якщо $Ra + Rb = R$, то, провівши для матриці $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ аналогічні міркування, ми доведемо, що $aR + bR = R$.

Тепер доведемо, що над R виконується умова Дубровіна. Нехай a — довільний ненульовий елемент R. Оскільки R є кільцем елементарних дільників, тоді для матриці $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ існують оборотні матриці другого порядку $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$, що

$$AP = Q \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $RbR \subseteq zR \cap Rz$. Зауважимо, що $RaR = RzR$. А з рівності 2 отримаємо $ap_{12} = q_{12}b$, $ap_{22} = q_{22}b$.

Оскільки P — оборотна матриця, то $Rp_{12} + Rp_{22} = R$. На підставі доведеного вище одержимо $p_{12}R+p_{22}R = R$, тобто $p_{12}u+p_{22}v = 1$ для деяких елементів $u, v \in R$. Позаяк $ap_{12} = q_{12}b$, $ap_{22} = q_{22}b$, то $a = ap_{12}u + ap_{22}v = q_{12}bu + q_{22}bv \in RbR$. Звідси $RaR \subseteq RbR$. Так як $RbR \subseteq RzR$ і $RaR = RzR$, то $RaR = RbR \subseteq zR \cap Rz \subseteq RzR$. Звідси $RaR = zR = Rz$. Теорему доведено. □

Частковим випадком скінченного елемента слугує оборотний елемент. За аналогією з умовою L розглянемо таку умову. З умови $RaR = R$ випливає, що a — скінченний елемент. Цю умову назвемо умовою Z.

Твердження 2. *Нехай R область Безу з умовою Дубровіна та умовою Z. Тоді довільний ненульовий елемент $a \in R$ можна зобразити у вигляді,*

$$a = \alpha f = \varphi\alpha,$$

де α — дуо-елемент, а f, φ — скінченні елементи R.

Доведення. Оскільки $RaR = \alpha R = R\alpha$, то $a = \alpha f = \varphi\alpha$, де $RfR = R\varphi R = R$. Згідно з обмеженнями, які накладено на R, отримаємо f, φ — скінченні елементи. Твердження доведено. □

Твердження 3. [2] *Нехай R область Безу з умовою Дубровіна. Тоді R є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли довільна матриця*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $RaR + RbR + RcR = R$ має канонічну діагональну редукцію.

Твердження 4. [2] *Нехай R — ліве (праве) кільце Безу стабільного рангу 1. Тоді для довільних елементів $a, b \in R$ існують такі $x \in R$ $(y \in R)$ і $d \in R$ $(\delta \in R)$, що $a + xb = d$ $(a + by = \delta)$ і $Ra + Rb = Rd$ $(aR + bR = \delta R)$.*

Теорема 2. *Нехай R — область Безу стабільного рангу 1, в якому виконуються умова Z і умова Дубровіна. Тоді R є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. Згідно з твердженням 4 для доведення теореми необхідно і достатньо довести, що довільна матриця вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $RaR + RbR + RcR = R$ має канонічну діагональну редукцію.

Оскільки R є областю Безу стабільного рангу 1, то згідно з твердженням 5 для елементів $a, b \in R$ існують елементи $x, d \in R$, що $xa + b = d$, де $Ra + Rb = Rd$. Тоді

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + d & c \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

де $a = a_0 d$ для деякого елемента $a_0 \in R$.

Нехай $cR + dR = zR$ і $cy + d = z$, зазначимо, що ці елементи існують згідно з твердженням 5. Звідси

$$\begin{pmatrix} d & c \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d + xy & c \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & c \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Тут $d = zt$, $c = zc_0$. Оскільки матриця A еквівалентна матриці $\begin{pmatrix} z & c \\ a & 0 \end{pmatrix}$, де $a = a_0 zt$, $c = zc_0$ і того, що $R = RaR + RbR + RcR = RzR + RcR$, одержимо, що $RzR = R$. Згідно з умовою Z отримаємо, що z — скінчений елемент області R.

Розглянемо матрицю $B = \begin{pmatrix} z & c \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Замінюючи елемент z послідовно на Н.С.Л.Д. (найбільший спільний лівий дільник) елемент z і c, ми отримаємо, що новий елемент z матриці на місці (1.1) буде скінченним, і його довжина буде менша за $l(z)$.

Аналогічні перетворення виконаємо на першому стовпцеві матриці, де перший рядок нової матриці може знову стати ненульовим, але це можливо лише, коли довжина скінченного елемента z на місці (1.1) зменшується, тобто матрицю B зведемо до вигляду

$$C = \begin{pmatrix} z' & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix},$$

де z' — скінченний елемент.

Використовуючи операцію додавання до першого стовпця (рядка) правого (лівого) кратному другого стовпця (рядка) і знову виконавши послідовну заміну елемента z' на Н.С.Л.Д. (Н.С.П.Д.) цього елемента й утвореного так елемента, ми будемо зменшувати довжину елемента z'. Цей процес продовжуватимемо доти, доки не отримаємо еквівалентну до R матрицю C вигляду

$$C = \begin{pmatrix} z'' & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

Тут $RsR \subseteq z''R \cap Rz''$. Теорема доведена. □

Зауважимо, що в доведенні цієї теореми ми використали той факт, що довільний дільник скінченного елемента області Безу є скінченним [2].

Література

1. *Kaplansky I.* Elementary devisors and modules / *I. Kaplansky* // Trans. Amer. Mat. Sven. — 1949. — Vol. 66. — P. 464–491.
2. *Zabavsky B. V.* Diagonal reduction of matrices over rings / *Zabavsky B.V.* // Mat. Studies Monograph Series Vol. 16, 2012. — 251 p.

Стаття: надійшла до редколегії 03.10.2015
прийнята до друку 11.11.2015

REDUCTION OF MATRICES OVER BEZOUT DOMAIN OF STABLE RANGE ONE WITH THE DUBROVIN CONDITION AND THE CONDITION Z

Vasylyna Bokhonko

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: b_strannik@ukr.net

In this paper we shown that any Bezout domain of stable range one with Dubrovin condition and condition Z is an elementary divisor ring.

Key words: Bezout domain, stable range one, elementary divisor ring, Dubrovin condition, condition Z.