ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 10–26
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 10–26

УДК 517.547

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ІНДИКАТОРІВ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ В ПРОКОЛЕНІЙ КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ. I

Олег ВИШИНСЬКИЙ, Андрій ХРИСТІЯНИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: vyshynskyi@ukr.net, khrystiyanyn@ukr.net

Доведено неперервність індикаторів зростання голоморфних функцій цілком регулярного зростання в проколеній комплексній площині стосовно функції зростання λ, а також властивість одностайної неперервності для класу функцій скінченного λ-типу в проколеній площині.

Ключові слова: функція цілком регулярного зростання, індикатор зростання, функція скінченного λ-типу, верхня відносна міра, одностайна неперервність, формула Пуассона-Єнсена, коефіцієнти Фур'є, голоморфна функція.

1. Вступ. Одним з останніх підходів до вивчення властивостей функцій мероморфних у багатозв'язних областях є підхід, який запропоновано в [1], [2], [3]. Застосовуючи апарат, розроблений у згаданих працях, у [4] було введено поняття голоморфної функції цілком регулярного зростання в проколеній комплексній площині $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, поняття індикаторів зростання таких функцій і доведено деякі їхні властивості. Зокрема, ω-тригонометрична опуклість суми індикаторів зростання та існування кутової щільності множини нулів голоморфних функцій цілком регулярного зростання в $\mathbb{C}^*$ на певних послідовностях. Пізніше в [5] було розглянуто питання про одностайне цілком регулярне зростання модуля та аргументу голоморфної в $\mathbb{C}^*$ функції. Автори, використовуючи метод рядів Фур'є, результати праці [6] та інші допоміжні результати, які вони одержали, які також мають самостійне значення, отримали у формі критеріїв опис множин голоморфних в $\mathbb{C}^*$ функцій, модулі й аргументи яких зростають одностайно й цілком регулярно.

Мета нашої праці — продовжити згаданий цикл робіт з вивчення властивостей функцій цілком регулярного зростання у проколеній площині. Головними об'єктами дослідження передусім є індикатори зростання таких функцій. У цій частині доводиться неперервність індикаторів, а також, задіюючи аналог формули Пуассона-Єнсена для кільця, отриманий І. П. Кшановським у [7], доводиться одностайна неперервність для класу функцій скінченного λ-типу в $\mathbb{C}^*$. Ця властивість є ключовою для доведення теорем про асимптотичну поведінку голоморфної функції цілком регулярного зростання в $\mathbb{C}^*$ при $r \to +\infty$ та $r \to 0$ поза деякими E_0-множинами, які становлять зміст другої частини цієї праці.

2. Означення та допоміжні поняття. Нехай f — функція, голоморфна в проколеній площині $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f \not\equiv 0$. Під функцією зростання ми розумітимемо додатну, неспадну, неперервну, необмежену функцію $\lambda(r)$, $r \geqslant 1$. Через $T_0(r,f)$ позначатимемо характеристику типу Неванлінни для функцій мероморфних у кільці $\{z : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\}$, де $1 < R_0 \leqslant +\infty$, яка була введена в [1], а саме

$$T_0(r,f) = m_0(r,f) + N_0(r,f), \qquad 1 < r < R_0,$$

де

$$m_0(r,f) = m(r,f) + m\left(\frac{1}{r}, f\right) - 2m(1,f),$$

$$m(t,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(te^{i\theta})|\, d\theta, \qquad \frac{1}{R_0} < t < R_0,$$

а $N_0(r,f) = \int_1^r \frac{n_0(t,f)}{t} dt$, де $n_0(t,f)$ – лічильна функція полюсів функції f в кільці $1/t \leqslant |z| \leqslant t$, $t \geqslant 1$.

Означення 1 ([3]). *Нехай λ функція зростання а f голоморфна функція в $\mathbb{C}^*$. Будемо говорити, що f функція скінченного λ-типу, і записувати $f \in \Lambda_H$, якщо $T_0(r,f) \leqslant B\lambda(Cr)$ при деяких сталих B, C для всіх r, $r \geqslant 1$.*

Всюди надалі будемо припускати, що $\lambda(r)$ є функцією так званого помірного зростання, тобто $(\exists M > 0)$ $(\forall r > 1) : \lambda(2r) \leqslant M\lambda(r)$. Крім того, обмежимось лише такими функціями зростання $\lambda(r)$, для яких $\log r = o(\lambda(r))$, $r \to +\infty$.

Ми використовуватимемо такі позначення для коефіцієнтів Фур'є:

$$c_k(t,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log |f(te^{i\theta})|\, d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t > 0.$$

Означення 2 ([6]). *Голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція f називається функцією цілком регулярного зростання стосовно функції зростання λ, якщо f є скінченного λ-типу і $\forall k \in \mathbb{Z}$ існують границі $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)} =: c_k^{(1)}$ та $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)} =: c_k^{(2)}$.*

Клас таких функцій позначатимемо Λ_H°.

Означення 3 ([6]). *Якщо $f \in \Lambda_H^\circ$, то функції $h_1(\theta,f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(1)} e^{ik\theta}$, $h_2(\theta,f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(2)} e^{ik\theta}$, де $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$, визначені в Означенні 2, називаються індикаторами зростання функції f або, коротше, індикаторами.*

Означення 4. *Верхньою відносною мірою множини $E \subset (0,+\infty)$ будемо називати величину*

$$\overline{m}_0^*(E) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{mes(E \cap (1,r))}{r} + \varlimsup_{r\to\infty} \frac{mes(E' \cap (1,r))}{r}, \text{ де } E' = \{\frac{1}{r} : r \in E \cap (0,1)\}. \quad (1)$$

Множину E з нульовою верхньою відносною мірою називатимемо E_0-множиною.

Також будемо припускати, що функція f не має нулів на колі $|z| = 1$. Якщо для Теорем 1, 2 це припущення не зменшує загальності і результат залишається правильним також й у випадку, коли функція f має нулі на одиничному колі, то для Теорем 3, 4 це припущення є суттєвим, оскільки доведення двох останніх теорем використовує аналог формули Пуассона-Єнсена для кільця, отриманий І. П. Кшановським [7], саме за умови відсутності нулів (а також полюсів у випадку мероморфної функції) на колі $|z| = 1$.

Нарешті наведемо дещо модифіковані позначення з [1], які ми неоднаразово будемо використовувати в доведенні основних результатів. Для голоморфної в $\mathbb{C}^*$, відмінної від тотожного нуля функції f через $n_0^{(1)}(t, f)$, $n_0^{(2)}(t, f)$ позначимо кількість нулів a_j функції $f(z)$ відповідно в $\{z : 1 < |z| \leqslant t\}$, та $\{z : \frac{1}{t} \leqslant |z| < 1\}$, $t > 1$, з врахуванням їхньої кратності. Крім того, нехай $N_0^{(i)}(r, f) := \int\limits_1^r \frac{n_0^{(i)}(t,f)}{t}dt$, $i = 1, 2$, $r > 1$.

3. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай $f \in \Lambda_H^\circ$. Тоді індикатор $h_1(\theta, f)$ є неперервною функцією.*

Теорема 2. *Нехай $f \in \Lambda_H^\circ$. Тоді індикатор $h_2(\theta, f)$ є неперервною функцією.*

Теорема 3. *Нехай $f \in \Lambda_H$, $f(z) \neq 0$ при $|z| = 1$. Тоді*

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\forall\eta > 0)\,(\exists\delta_0 > 0)\,(\exists E_\eta,\ \overline{m}_0^*(E_\eta) \leqslant \eta)\,(\forall r \in [2, +\infty) \setminus E_\eta)\,(\forall\varphi, \theta) :$$
$$|\varphi - \theta| < \delta_0 \quad \Longrightarrow \quad |\log f(re^{i\theta}) - \log f(re^{i\varphi})| < \varepsilon\lambda(r).$$

Теорема 4. *Нехай $f \in \Lambda_H$, $f(z) \neq 0$ при $|z| = 1$. Тоді*

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\forall\mu > 0)(\exists\delta_0 > 0)\,(\exists E_\mu,\ \overline{m}_0^*(E_\mu) \leqslant \mu)\,(\forall r \in [2, +\infty) \setminus E_\mu)\,(\forall\varphi, \theta) :$$
$$|\varphi - \theta| < \delta_0 \quad \Longrightarrow \quad \left|\log f\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right) - \log f\left(\frac{1}{r}e^{i\varphi}\right)\right| < \varepsilon\lambda(r).$$

4. Доведення основних результатів.

4.1. Доведення Теореми 1.

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що функція f не має нулів на колі $|z| = 1$. Запишемо вирази для коефіцієнтів Фур'є [3, Лема 21.1, с. 59]

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^k + \overline{\alpha}_{-k} r^{-k}) + \frac{1}{2k} \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \left(\left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad r > 1. \tag{2}$$

Звідси

$$r^k \left|(\alpha_k + \overline{\alpha}_{-k} r^{-2k}) + \frac{1}{k} \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \left(\frac{1}{a_j}\right)^k\right| \leqslant 2|c_k(r, f)| + \left|\frac{1}{k} \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k\right|. \tag{3}$$

Поділимо (3) на r^k. Оцінимо праву частину отриманої нерівності

$$\frac{2|c_k(r, f)|}{r^k} + \frac{1}{k}\left|\sum_{1<|a_j|\leqslant r} \left(\frac{\overline{a}_j}{r^2}\right)^k\right| \leqslant \frac{4T_0(r, f)}{r^k} + \frac{1}{k}\frac{n_0^{(1)}(r, f)}{r^{2k}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r > 1. \tag{4}$$

Нагадаємо, що ми розглядаємо лише функції помірного зростання $\lambda(r)$. В цьому випадку порядок ρ_0 функції f, який визначається ([3]) так:

$$\rho_0 = \rho[f] = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log T_0(r,f)}{\log r}$$

буде скінченним. Спрямуємо $r \to +\infty$. В правій частині нерівності (4) обидва доданки прямують до 0 при $k > \rho_0$. Тоді з (3) отримуємо

$$\alpha_k = -\frac{1}{k} \sum_{1<|a_j|} \left(\frac{1}{a_j}\right)^k, \quad k > \rho_0.$$

Повертаючись до (2), матимемо

$$c_k(r,f) = -\frac{1}{2k} \sum_{|a_j|>r} \left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \frac{1}{2k} \sum_{1<|a_j|\leqslant r} \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k + \frac{1}{2}\overline{\alpha}_{-k} r^{-k}, \quad k > \rho_0. \tag{5}$$

Оцінюючи абсолютні величини коефіцієнтів Фур'є (5), замінюючи суми інтегралами Стільтьєса та інтегруючи частинами, отримуємо при $k > \rho_0$

$$|c_k(r,f)| \leqslant \frac{1}{2k}\int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k dn_0^{(1)}(t,f) + \frac{1}{2k}\int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k dn_0^{(1)}(t,f) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k} =$$

$$= \frac{1}{2k}\left(\frac{r^k}{t^k} n_0^{(1)}(t,f)\Big|_r^\infty + k\int_r^\infty \frac{r^k}{t^k}\frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt\right) + \frac{1}{2k}\left(\frac{t^k}{r^k} n_0^{(1)}(t,f)\Big|_1^r - k\int_1^r \frac{t^k}{r^k}\frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt\right) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k} =$$

$$= -\frac{1}{2k} n_0^{(1)}(r,f) + \frac{1}{2}\int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt + \frac{1}{2k} n_0^{(1)}(r,f) - \frac{1}{2}\int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt - \frac{1}{2}\int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k}, \quad r > 1.$$

Знову інтегруючи частинами, при $k \geqslant q+1$, $q = [\rho_0]$ одержуємо

$$|c_k(r,f)| \leqslant \frac{1}{2}\int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k dN_0^{(1)}(t,f) - \frac{1}{2}\int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k dN_0^{(1)}(t,f) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{r^k}{t^k} N_0^{(1)}(t,f)\Big|_r^\infty + k\int_r^\infty \frac{r^k}{t^k}\frac{N_0^{(1)}(t,f)}{t}dt\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^k}{r^k} N_0^{(1)}(t,f)\Big|_1^r - k\int_1^r \frac{t^k}{r^k}\frac{N_0^{(1)}(t,f)}{t}dt\right) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k} =$$

$$= \frac{k}{2}\int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{N_0^{(1)}(t,f)}{t}dt + \frac{k}{2}\int_1^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{N_0^{(1)}(t,f)}{t}dt - N_0^{(1)}(r,f) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2r^k}, \quad r > 1. \tag{6}$$

Виконуючи аналогічні перетворення, при $1 \leqslant k \leqslant q$ спочатку отримаємо

$$|c_k(r,f)| \le \frac{1}{2}|\alpha_k r^k + \overline{\alpha}_{-k} r^{-k}| + \frac{1}{2}\int_1^r \frac{r^k}{t^k}\frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt + \frac{1}{2}\int_1^r \frac{t^k}{r^k}\frac{n_0^{(1)}(t,f)}{t}dt, \quad r > 1.$$

Після повторного інтегрування частинами матимемо при $1 \leqslant k \leqslant q$, $r > 1$

$$|c_k(r,f)| \leq \frac{1}{2}|\alpha_k r^k + \overline{\alpha}_{-k} r^{-k}| + \frac{k}{2}\int_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right)\frac{N_0^{(1)}(t,f)}{t}dt + N_0^{(1)}(r,f). \quad (7)$$

Очевидно, що порядок ρ функції $N_0^{(1)}(r,f)$ не перевищує ρ_0. Тоді за лемою Пойя [10, с. 155-156] для довільного додатного $\varepsilon < q+1-\rho$ існує послідовність $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$ така, що

$$\begin{aligned} N_0^{(1)}(t,f) &\leqslant \left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho-\varepsilon} N_0^{(1)}(t_n,f), \quad 0 < t \leqslant t_n, \\ N_0^{(1)}(t,f) &\leqslant \left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho+\varepsilon} N_0^{(1)}(t_n,f), \quad t_n \leq t < +\infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Використовуючи (8), із (6) отримуємо

$$|c_k(t_n,f)| \leqslant \left(\frac{k}{2}\int_{t_n}^{\infty}\left(\frac{t_n}{t}\right)^k\left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho+\varepsilon}\frac{dt}{t} + \frac{k}{2}\int_1^{t_n}\left(\frac{t}{t_n}\right)^k\left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho-\varepsilon}\frac{dt}{t} - 1\right)N_0^{(1)}(t_n,f) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2t_n^k} =$$

$$= N_0^{(1)}(t_n,f)\left(\frac{k}{2}t_n^{k-\rho-\varepsilon}\cdot\int_{t_n}^{\infty} t^{\rho+\varepsilon-k-1}dt + \frac{k}{2}t_n^{-k-\rho+\varepsilon}\cdot\int_1^{t_n} t^{k+\rho-\varepsilon-1}dt - 1\right) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2t_n^k} =$$

$$= N_0^{(1)}(t_n,f)\left(\frac{k(k-\varepsilon)}{(k-\varepsilon)^2-\rho^2} - 1\right) + \frac{|\alpha_{-k}|}{2t_n^k}, \quad k \geqslant q+1.$$

Якщо $1 \leqslant k \leqslant q$, то з (7) та (8) випливає

$$|c_k(t_n,f)| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha_k t_n^k + \overline{\alpha}_{-k} t_n^{-k}| + N_0^{(1)}(t_n,f)\left(\frac{k}{2}\int_1^{t_n}\left(\frac{t_n^k}{t^k} - \frac{t^k}{t_n^k}\right)\left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho-\varepsilon}\frac{dt}{t} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}|\alpha_k t_n^k + \overline{\alpha}_{-k} t_n^{-k}| + N_0^{(1)}(t_n,f)\left(\frac{k}{2}t_n^{k-\rho+\varepsilon}\cdot\int_1^{t_n} t^{\rho-\varepsilon-k-1}dt -\right.$$

$$\left. -\frac{k}{2}t_n^{-k-\rho+\varepsilon}\cdot\int_1^{t_n} t^{k+\rho-\varepsilon-1}dt + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}|\alpha_k t_n^k + \overline{\alpha}_{-k} t_n^{-k}| + N_0^{(1)}(t_n,f)\left(\frac{k^2}{(\rho-\varepsilon)^2-k^2} + 1\right).$$

Враховуючи те, що $N_0^{(1)}(r,f) \leqslant T_0(r,f) \leqslant A\lambda(r)$ при $r > 1$, спрямовуючи $n \to +\infty$, одержуємо

$$|c_k^{(1)}| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|c_k(t_n,f)|}{\lambda(t_n)} \leqslant \begin{cases} A\left(\dfrac{k(k-\varepsilon)}{(k-\varepsilon)^2-\rho^2} - 1\right), & k > \rho, \\ A\left(\dfrac{k^2}{(\rho-\varepsilon)^2-k^2} + 1\right), & 1 \leqslant k \leqslant \rho. \end{cases} \quad (9)$$

Враховуючи довільність ε, отримуємо, що

$$|c_k^{(1)}| \leqslant \frac{\rho^2}{|k^2-\rho^2|}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для від'ємних цілих використовуємо властивість коефіцієнтів Фур'є $c_{-k}(r,f) = \overline{c_k(r,f)}$, що разом з отриманим раніше дає підстави записати

$$|c_k^{(1)}| \leqslant \frac{\rho^2}{|k^2-\rho^2|}, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Це дає право стверджувати, що ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(1)} e^{ik\theta}$ збігається рівномірно на $[0,2\pi]$, а отже, $h_1(\theta,f)$ є неперервною функцією стосовно θ на $[0,2\pi]$.

□

4.2. Доведення Теореми 2.

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що функція f немає нулів на одиничному колі. Коефіцієнти Фур'є для нашого випадку мають такий вигляд ([3, с.59]):

$$c_k\left(\frac{1}{r},f\right) = \frac{1}{2}(\alpha_k r^{-k} + \overline{\alpha}_{-k} r^k) + \frac{1}{2k} \sum_{\frac{1}{r}\leqslant |a_j|<1} \left((\overline{a}_j r)^k - \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k \right), \ k\in\mathbb{N},\ r>1. \quad (10)$$

З (10) випливає

$$r^k \left| (\alpha_k r^{-2k} + \overline{\alpha}_{-k}) + \frac{1}{k} \sum_{\frac{1}{r}\leqslant |a_j|<1} \overline{a}_j^k \right| \leqslant 2\left| c_k\left(\frac{1}{r},f\right)\right| + \left| \frac{1}{k} \sum_{\frac{1}{r}\leqslant |a_j|<1} \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k \right|. \quad (11)$$

Поділимо (11) на r^k. Для правої частини отриманої нерівності справджується така оцінка:

$$2\frac{|c_k(\frac{1}{r},f)|}{r^k} + \frac{1}{k}\left| \sum_{\frac{1}{r}\leqslant |a_j|<1} \left(\frac{1}{a_j r^2}\right)^k \right| \leqslant \frac{4T_0(r,f)}{r^k} + \frac{1}{k}\frac{n_0^{(2)}(r,f)}{r^{2k}}. \quad (12)$$

Нехай $q=[\rho_0]$, де ρ_0 – порядок функції f. Спрямуємо $r\to+\infty$. В правій частині (12) обидва доданки прямують до 0 при $k>q$. Тоді з (11) отримуємо

$$\overline{\alpha}_{-k} = -\frac{1}{k}\sum_{0\leqslant |a_j|<1} \overline{a}_j^k, \quad k>q.$$

Повертаючись до (10), матимемо

$$c_k\left(\frac{1}{r},f\right) = -\frac{1}{2k}\sum_{0<|a_j|<\frac{1}{r}} (\overline{a}_j r)^k - \frac{1}{2k}\sum_{\frac{1}{r}\leqslant |a_j|<1} \left(\frac{1}{a_j r}\right)^k + \frac{1}{2}\alpha_k r^{-k}, \quad k>\rho. \quad (13)$$

Далі доведення стає аналогічним до доведення Теореми 1 з відповідними змінами у позначеннях. Тому ми не будемо наводити проміжних міркувань, які аналогічні до міркувань у відповідних місцях доведення Теореми 1.

Інтегруючи частинами в (13), отримуємо при $k > q$

$$\left|c_k\left(\frac{1}{r}, f\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_r^{\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_0^{(2)}(t,f)}{t}dt - \frac{1}{2}\int_1^{r}\left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_0^{(2)}(t,f)}{t}dt + \frac{|\alpha_k|}{2r^k}, \quad r > 1.$$

Знову інтегруючи частинами при $k \geqslant q+1$, одержимо

$$\left|c_k\left(\frac{1}{r}, f\right)\right| \leqslant \frac{k}{2}\int_r^{\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{N_0^{(2)}(t,f)}{t}dt + \frac{k}{2}\int_1^{r}\left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{N_0^{(2)}(t,f)}{t}dt - N_0^{(2)}(r,f) + \frac{|\alpha_k|}{2r^k}, \; r > 1. \tag{14}$$

Якщо ж $1 \leqslant k \leqslant q$, то після першого інтегрування частинами матимемо

$$\left|c_k\left(\frac{1}{r}, f\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha_k r^{-k} + \overline{\alpha}_{-k}r^k| + \frac{1}{2}\int_1^{r}\frac{r^k}{t^k}\frac{n_0^{(2)}(t,f)}{t}dt + \frac{1}{2}\int_1^{r}\frac{t^k}{r^k}\frac{n_0^{(2)}(t,f)}{t}dt, \quad r > 1,$$

а після другого для $1 \leq k \leq q$, $r > 1$

$$\left|c_k\left(\frac{1}{r}, f\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha_k r^{-k} + \overline{\alpha}_{-k}r^k| + \frac{k}{2}\int_1^{r}\left(\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right)\frac{N_0^{(2)}(r,f)}{t}dt + N_0^{(2)}(r,f). \tag{15}$$

Оскільки порядок ρ функції $N_0^{(2)}(r,f)$ не перевищує ρ_0, то, застосовуючи лему Пойя [10, с. 155-156], отримуємо, що для довільного додатного $\varepsilon < q+1-\rho$ знайдеться послідовність $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$ така, що

$$\begin{aligned} N_0^{(2)}(t,f) &\leqslant \left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho-\varepsilon} N_0^{(2)}(t_n,f), \quad 0 < t \leqslant t_n \\ N_0^{(2)}(t,f) &\leqslant \left(\frac{t}{t_n}\right)^{\rho+\varepsilon} N_0^{(2)}(t_n,f), \quad t_n \leq t < +\infty. \end{aligned} \tag{16}$$

Використовуючи (16), із (14) отримуємо при $k \geqslant q+1$

$$\left|c_k\left(\frac{1}{t_n}, f\right)\right| \leqslant N_0^{(2)}(t_n,f)\left(\frac{k(k-\varepsilon)}{(k-\varepsilon)^2-\rho^2} - 1\right) + \frac{|\alpha_k|}{2r^k}, \quad r > 1.$$

Якщо $1 \leqslant k \leqslant q$, то з (15), застосовуючи (16), отримуємо

$$\left|c_k\left(\frac{1}{t_n}, f\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}|\alpha_k t_n^{-k} + \overline{\alpha}_{-k}t_n^k| + N_0^{(2)}(t_n,f)\left(\frac{k^2}{(\rho-\varepsilon)^2-k^2} + 1\right), \quad r > 1.$$

Оскільки $N_0^{(2)}(r,f) \leqslant T_0(r,f) \leqslant A\lambda(r)$ при $r > 1$, то, спрямовуючи $n \to +\infty$, отримаємо

$$|c_k^{(2)}| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|c_k(\frac{1}{t_n}, f)|}{\lambda(t_n)} \leqslant \begin{cases} A\left(\dfrac{k(k-\varepsilon)}{(k-\varepsilon)^2-\rho^2} - 1\right), & k > \rho, \\ A\left(\dfrac{k^2}{(\rho-\varepsilon)^2-k^2} + 1\right), & 1 \leqslant k \leqslant \rho. \end{cases} \tag{17}$$

На підставі довільності ε робимо висновок, що $|c_k^{(2)}| \leqslant \frac{\rho^2}{|k^2-\rho^2|}$ при $k \in \mathbb{N}$. Використовуючи властивість $c_{-k}(r,f) = \overline{c_k(r,f)}$, матимемо $|c_k^{(2)}| \leqslant \frac{\rho^2}{|k^2-\rho^2|}$ при всіх $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Тому ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(2)} e^{ik\theta}$ збігається рівномірно на $[0, 2\pi]$, а отже, $h_2(\theta, f)$ є неперервною при $\theta \in [0, 2\pi]$.

□

4.3. Доведення Теореми 3.

Оскільки $f \in \Lambda_H$ то $(\exists A > 0)$ $(\forall r > 0)$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$: $|c_k(2r, f)| \leqslant A\lambda(r)$, $n_0(2r, f) \leqslant A\lambda(r)$. Нехай $\{a_j\}$ – нулі функції f, $z = re^{i\varphi}$, $R > r$. Використовуючи аналог формули Пуассона-Єнсена [7] для проколеної площини $\mathbb{C}^*$, можемо записати

$$\log|f(re^{i\varphi})| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|P(R, r, \theta-\varphi)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(\frac{1}{R}e^{i\theta})|P(Rr, 1, \theta-\varphi)d\theta -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|P(R^2, r, \theta-\varphi)d\theta - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|P(rR^2, 1, \theta-\varphi)d\theta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial \log|f(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1}\log\left|\frac{R^2 - e^{-i\theta}z}{\frac{1}{R^2} - e^{-i\theta}z}\right|d\theta -$$

$$-\sum_{1<|a_j|\leqslant R}\log\left|\frac{R^2 - \overline{a_j}z}{R(a_j - z)}\right| - \sum_{\frac{1}{R}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{\frac{1}{R^2} - \overline{a_j}z}{\frac{1}{R}(a_j - z)}\right| + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\cdot\log R, \qquad (18)$$

де $P(X, x, \tau) = \dfrac{X^2 - x^2}{X^2 - 2Xx\cos\tau + x^2}$ – ядро Пуассона.

Оскільки

$$P(R, r, \theta-\varphi) = \operatorname{Re}\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{r}{R}\right)^{|k|}e^{ik(\theta-\varphi)}, \quad r < R, \qquad (19)$$

то при $R = 2r$

$$\begin{aligned} P(Rr, 1, \theta-\varphi) = P(r, \frac{1}{2r}, \theta-\varphi) &= \operatorname{Re}\frac{re^{i\varphi} + \frac{1}{2r}e^{i\theta}}{re^{i\varphi} - \frac{1}{2r}e^{i\theta}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{2r^2}\right)^{|k|}e^{ik(\theta-\varphi)}, \\ P(R^2, r, \theta-\varphi) = P(4r, 1, \theta-\varphi) &= \operatorname{Re}\frac{4re^{i\varphi} + e^{i\theta}}{4re^{i\varphi} - e^{i\theta}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{4r}\right)^{|k|}e^{ik(\theta-\varphi)}, \qquad (20) \\ P(rR^2, 1, \theta-\varphi) &= \operatorname{Re}\frac{4r^3e^{i\varphi} + e^{i\theta}}{4r^3e^{i\varphi} - e^{i\theta}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{4r^3}\right)^{|k|}e^{ik(\theta-\varphi)}. \end{aligned}$$

Застосовуючи розвинення ядер Пуассона (20), отримуємо, що рівність (18) при $R = 2r$ набуде вигляду

$$\log|f(re^{i\varphi})| = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(2r, f)}{2^{|k|}}e^{ik\varphi} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(\frac{1}{2r}, f)}{(2r^2)^{|k|}}e^{ik\varphi} - \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{c_k(1, f)}{(4r)^{|k|}} + \frac{c_k(1, f)}{(4r^3)^{|k|}}\right)e^{ik\varphi} -$$

$$-\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|\frac{2r - \frac{\overline{a_j}z}{2r}}{a_j - z}\right| - \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{\frac{1}{2r} - 2r\overline{a_j}z}{a_j - z}\right| + O(\log r) \qquad (21)$$

де $1 < r \neq |a_j|$, $\frac{1}{r} \neq |a_j|$. Розглянемо суму 4-го та 5-го доданків в (21):

$$\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} \log\left|2r - \frac{\overline{a_j}z}{2r}\right| - \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} \log|z-a_j| +$$

$$+ \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log\left|\frac{1}{2r} - 2r\overline{a_j}z\right| - \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log|z-a_j| =$$

$$= \log r \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} 1 + \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} \log\left|2\left(1 - \frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{4r}\right)\right| -$$

$$- \log r \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} 1 - \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} \log\left|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right| +$$

$$+ \log\frac{1}{2r} \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} 1 + \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log|1 - 4r^3\overline{a_j}e^{i\varphi}| -$$

$$- \log r \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} 1 - \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log\left|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right| =$$

$$= \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} \log\left|2\left(1 - \frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{4r}\right)\right| - \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} \log\left|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right| +$$

$$+ \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log|1 - 4r^3\overline{a_j}e^{i\varphi}| - \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log\left|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right| - n_0^{(2)}(2r,f)\log 2r^2.$$

Позначимо

$$G(r,\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k(2r,f)}{2^{|k|}}e^{ik\varphi} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k(\frac{1}{2r},f)}{(2r^2)^{|k|}}e^{ik\varphi} - \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{c_k(1,f)}{(4r)^{|k|}} + \frac{c_k(1,f)}{(4r^3)^{|k|}}\right)e^{ik\varphi}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} S(r,\varphi) = \quad & - \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r} \log\left|2\left(1 - \frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{4r}\right)\right| + \sum_{1<|a_j|\leqslant \frac{r}{2}} \log|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}| - \\ & - \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log|1 - 4r^3\overline{a_j}e^{i\varphi}| + \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1} \log\left|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right|. \qquad (23) \end{aligned}$$

а також

$$F(r,\varphi) = \sum_{\frac{r}{2}\leqslant|a_j|\leqslant 2r} \log\left|1 - \frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right|, \quad F(r,\varphi) = \sum_{\frac{r}{2}\leqslant|a_j|\leqslant 2r} \log\frac{|z-a_j|}{|z|} =: F(z). \quad (24)$$

Тоді (21) набуде вигляду

$$\log|f(re^{i\varphi})| = G(r,\varphi) + S(r,\varphi) + F(r,\varphi) + n_0^{(2)}(2r,f)\log 2r^2 + O(\log r), \quad r > 1. \quad (25)$$

Розглянемо окремо кожен з перших трьох доданків у (25). Доведемо спочатку, що $S(r,\varphi)/\lambda(r)$ буде одностайно неперервною функцією при $r \geq 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Для цього розглянемо окремо кожен доданок-суму, що входить в $S(r,\varphi)$.

Розглянувши першу суму з $S(r,f)$, враховуючи, що при $1<|a_j|\leqslant 2r$ та $r\geqslant 2$ правильні нерівності

$$1=2\left(1-\frac{2r}{4r}\right)\leqslant 2\left(1-\frac{|a_j|}{4r}\right)\leqslant\left|2\left(1-\frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{4r}\right)\right|\leqslant 2\left(1+\frac{|a_j|}{4r}\right)\leqslant 2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3,$$

а також той факт, що функція $\log|w|$ є рівномірно неперервною в кільці $1\leq|w|\leq 3$, робимо висновок, що функція $\log\left|2\left(1-\frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{4r}\right)\right|$ рівномірно неперервна функція при $r\geqslant 2$, $\varphi\in[0,2\pi]$.

Тому отримали, що $(\forall\varepsilon_1>0)$ $(\exists\delta_1>0)$ $(\forall r\geq 2)$ $(\forall\varphi,\theta)$ таких, що $|\varphi-\theta|<\delta_1$ виконується

$$\left|\sum_{1<|a_j|\leq 2r}\log\left|2\left(1-\frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{4r}\right)\right|-\sum_{1<|a_j|\leq 2r}\log\left|2\left(1-\frac{\overline{a_j}e^{i\theta}}{4r}\right)\right|\right|<\varepsilon_1 n_0^{(1)}(2r,f)<\varepsilon_1 A\lambda(r). \tag{26}$$

Для другої суми аналогічний висновок отримуємо, якщо зауважити, що при $1<|a_j|\leqslant\frac{r}{2}$ та $r\geqslant 2$ правильні нерівності

$$\frac{1}{2}=1-\frac{|a_j|}{r}\leqslant\left|1-\frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right|\leqslant 1+\frac{|a_j|}{r}\leqslant 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Одностайна неперервність четвертої суми з $S(r,\varphi)$ випливає з нерівностей

$$\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}\leqslant 1-\frac{1}{2r}\leqslant 1-\frac{|a_j|}{r}\leqslant\left|1-\frac{a_j}{r}e^{-i\varphi}\right|\leqslant 1+\frac{|a_j|}{r}\leqslant 1+\frac{1}{2r}\leqslant\frac{5}{4},$$

які правильні при $\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1$ та $r\geqslant 2$ після міркувань подібних до (26).

Зрештою, розглянемо третю суму $\sum\limits_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log|1-4r^3\overline{a_j}e^{i\varphi}|$. Кожен доданок у цій сумі набуває вигляду $\log|1-\zeta|$, де $\zeta=\rho e^{i\psi}$, $\rho=4r^3|a_j|$, $\rho\in[2r^2,4r^3)$. Якщо $r\geqslant 2$, то $\rho\geqslant 8$ і тим більше $\rho\geqslant 2$. Тому $\forall\zeta_k=\rho e^{i\psi_k}$, $k=1,2$ при $r\geqslant 2$ матимемо

$$\begin{aligned}\log|\zeta_1-1|-\log|\zeta_2-1|&=\log\left|\frac{\zeta_1-1}{\zeta_2-1}\right|=\log\left|1+\frac{\zeta_1-\zeta_2}{\zeta_2-1}\right|=\\&=\log\left|1+\frac{\rho(e^{\psi_1}-e^{\psi_2})}{\zeta_2-1}\right|\leqslant\log\left(1+\frac{\rho|\psi_1-\psi_2|}{|\zeta_2-1|}\right)\leqslant\\&\leqslant\log\left(1+\frac{\rho}{\rho-1}|\psi_1-\psi_2|\right)\leqslant\log(1+2|\psi_1-\psi_2|)\leqslant 2|\psi_1-\psi_2|.\end{aligned}\tag{27}$$

Повертаючись до $S(r,\varphi)$, робимо висновок, що $(\forall\varepsilon_1<\frac{\varepsilon}{8A})$ $(\exists\delta_1'>0)$ $(\forall r\geqslant 2)$ $(\forall\varphi,\theta)$:

$$|\varphi-\theta|<\delta_1'\Rightarrow|S(r,\varphi)-S(r,\theta)|<2\varepsilon_1(n_0^{(1)}(2r,f)+n_0^{(2)}(2r,f))<2\varepsilon_1 A\lambda(r)<\frac{\varepsilon}{4}\lambda(r). \tag{28}$$

Перейдемо тепер до розгляду $G(r,\varphi)$.

Оскільки для всіх $r>1$ і $k\in\mathbb{Z}$ за критерієм скінченності λ-типу [3] виконується $|c_k(2r,f)|\leqslant A\lambda(r)$, $|c_k(\frac{1}{2r},f)|\leqslant A\lambda(r)$, то всі ряди в (22) збігаються рівномірно при

$r>1$, $\varphi \in [0,2\pi]$. Крім того, $(\forall \varepsilon_1 > 0)$ $(\exists \delta_1'' > 0)$ $(\forall \varphi, \theta,\ |\varphi-\theta| < \delta_1'')$

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k(2r,f)}{2^{|k|}} e^{ik\varphi} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k(2r,f)}{2^{|k|}} e^{ik\theta}\right| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k(2r,f)}{2^{|k|}} (e^{ik\varphi} - e^{ik\theta})\right| <$$

$$< A\lambda(r)\cdot\varepsilon_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|k|}} = 3A\lambda(r)\cdot\varepsilon_1, \quad r>1.$$

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k(\frac{1}{2r},f)}{(2r^2)^{|k|}} e^{ik\varphi} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k(\frac{1}{2r},f)}{(2r^2)^{|k|}} e^{ik\theta}\right| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k(\frac{1}{2r},f)}{(2r^2)^{|k|}} (e^{ik\varphi} - e^{ik\theta})\right| <$$

$$< A\lambda(r)\cdot\varepsilon_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2r^2)^{|k|}} = 3A\lambda(r)\cdot\varepsilon_1, \quad r>1,$$

а також

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{c_k(1,f)}{(4r)^{|k|}} + \frac{c_k(1,f)}{(4r^3)^{|k|}}\right) e^{ik\varphi} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{c_k(1,f)}{(4r)^{|k|}} + \frac{c_k(1,f)}{(4r^3)^{|k|}}\right) e^{ik\varphi}\right| <$$

$$< \varepsilon_1 |c_k(1,f)| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2}{4^{|k|}} < 4\varepsilon_1 A\lambda(r), \quad r>1.$$

Отже, $G(r,\varphi)$ є рівномірно неперервною стосовно $\varphi \in [0,2\pi]$ на кожному колі $|z|=r$, $r>1$. Насправді, ми отримали навіть більше. А саме, що $(\forall \varepsilon_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{40A})$ $(\exists \delta_1'' > 0)$ $(\forall r \geqslant 2)$ $(\forall \varphi, \theta)$ таких, що $|\varphi-\theta| < \delta_1''$ виконується

$$|G(r,\varphi) - G(r,\theta)| < \varepsilon_1 \cdot 10A\lambda(r) < \frac{\varepsilon}{4}\lambda(r). \tag{29}$$

Нам залишилося розглянути $F(r,\varphi)$. Якщо для деяких додатних чисел δ і R виконується $|\varphi-\theta| < \delta^3$ і $\frac{R}{2} \leqslant r \leqslant R$, то, позначивши $z = re^{i\varphi}$, $\zeta = re^{i\theta}$ та вживаючи позначення $F(z)$ з другої частини (24), матимемо

$$F(\zeta) - F(z) = \sum_{\frac{r}{2} \leqslant |a_j| \leqslant 2r} \log\left|\frac{\zeta - a_j}{z - a_j}\right| = \sum_{\frac{r}{2} \leqslant |a_j| \leqslant 2r} \log\left|1 + \frac{|\zeta - a_j| - |z - a_j|}{|z - a_j|}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\frac{r}{2} \leqslant |a_j| \leqslant 2r} \log\left(1 + \frac{|\zeta - z|}{|z - a_j|}\right) \leqslant \sum_{\frac{r}{2} \leqslant |a_j| \leqslant 2r} \log\left(1 + \frac{r|e^{i\theta} - e^{i\varphi}|}{|z - a_j|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\frac{r}{2} \leqslant |a_j| \leqslant 2r} \log\left(1 + \frac{\delta^3 r}{|z - a_j|}\right) \leqslant \sum_{\frac{R}{4} \leqslant |a_j| \leqslant 2R} \log\left(1 + \frac{2\delta^3 R}{|z - a_j|}\right). \tag{30}$$

Приймемо $H = \delta R$, $p = n_0^{(1)}(2R,f) - n_0^{(1)}(\frac{R}{4},f)$. Застосувавши Лему Бутру-Картана [8, с.137] (див. також [9, ст. 31]), отримаємо, що для довільного $z = re^{i\varphi}$ такого, що $\frac{R}{2} \leqslant |z| \leqslant R$ поза деякою системою кругів з загальною сумою радіусів $2H = 2\delta R$ виконується

$$|z - a_j| > \frac{jH}{p} = \frac{\delta R j}{p}, \quad j = 1,2,...,p,$$

де a_j занумеровані у порядку зростання їхніх відстаней від z. Тоді з (30) отримуємо, що для довільного $\zeta = re^{i\theta}$ такого, що $|\varphi - \theta| < \delta^3$

$$F(\zeta) - F(z) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \log\left(1 + \frac{2p\delta^2}{j}\right). \tag{31}$$

Розглянемо довільні $\varepsilon > 0$, $0 < \eta < 1$. Нехай $\delta < \min\left\{\frac{\eta}{40}, \frac{\varepsilon}{12A}\right\}$, де A – стала з умови скінченності λ-типу. Застосовуючи нерівності $\log(1+x) < \sqrt{x}$ при $x > 0$ та $\sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{m}} \leqslant 2\sqrt{n}$, з (31) отримуємо

$$F(\zeta) - F(z) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \frac{\delta\sqrt{2p}}{\sqrt{j}} \leqslant \delta\sqrt{2p}\cdot 2\sqrt{p} < 3\delta\cdot p \leqslant 3\delta\cdot n_0^{(1)}(2R, f) \leqslant 3\delta A\lambda(r) < \frac{\varepsilon}{4}\lambda(r). \tag{32}$$

Приймемо $R_n = 2^n, n \geqslant 3$ і для кожного R_n побудуємо множину виняткових кругів з сумою радіусів $2\delta R_n$ таку, що для всіх z, які не належать до цих кругів і для довільних $\zeta = re^{i\theta}$ таких, що $|\varphi - \theta| < \delta^3$, $\frac{R_n}{2} \leqslant |z| = |\zeta| \leqslant R_n$ виконується (32). Оскільки ці круги містять всі a_j такі, що $\frac{R_n}{4} < |a_j| \leqslant 2R_n$, то центри цих кругів належать до кільця $(\frac{1}{4} - 2\delta)R_n < |z| \leqslant (2 + 2\delta)R_n$.

Зауваження 1. За зроблених припущень виконується $(\frac{1}{4} - 2\delta)R_n \geq 1$. Справді, припустивши протилежне, негайно отримуємо, що $\delta > 1/16$, що суперечить вибору δ.

Тоді в кільці $\{z : 2 \leqslant |z| \leqslant r\}$ містяться центри виняткових кругів, сума радіусів яких не перевищує $2\delta(R_1 + \cdots + R_n)$. Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k \leqslant 2^{k+1}$, то ця сума не перевищує $4\delta R_n$, де n — найбільше серед тих, для яких $(\frac{1}{4} - 2\delta)R_n \leqslant r$. Тоді, враховуючи, що $\delta < \eta/40 \leq 1/40$, тобто $1 - 8\delta > 4/5$, отримуємо

$$4\delta R_n \leqslant \frac{16r\delta}{1 - 8\delta} \leqslant 20\delta r \leqslant \frac{\eta}{2}r. \tag{33}$$

Позначимо множину тих r, для яких $z = re^{i\varphi}$ належить побудованій множині виняткових кругів через E_η. Враховуючи, що $|\theta - \varphi| < \delta^3$ для $r \notin E_\eta$ отримуємо, що правильні нерівності (32). Тоді з (33) випливає, що $\overline{m}_0^*(E_\eta) \leqslant \eta$.

Змінюючи θ і φ місцями, отримаємо, що для $r \notin E_\eta$ при $|\theta - \varphi| < \delta^3$ виконується $F(re^{i\varphi}) - F(re^{i\theta}) < \frac{\varepsilon}{4}\lambda(r)$. З огляду на (32) отримуємо, що

$$|F(\zeta) - F(z)| < \frac{\varepsilon}{4}\lambda(r). \tag{34}$$

Прийнявши $\delta_0 = \min\{\delta_1', \delta_1'', \delta^3\}$ та враховуючи (28), (29), (34), а також те, що $\log r = o(\lambda(r))$, $r \to +\infty$, з (25), отримуємо, що при $r \geqslant 2$, $r \notin E_\eta$ та $|\theta - \varphi| < \delta_0$ правильна нерівність

$$|\log f(re^{i\theta}) - \log f(re^{i\varphi})| < \varepsilon\lambda(r).$$

□

4.4. Доведення Теореми 4.

За послідовністю логічних міркувань доведення цієї теореми збігається з доведенням Теореми 3, але конкретні співвідношення на кожному кроці мають вигляд відмінний від відповідних у доведенні Теореми 3.

На підставі скінченності λ-типу ([3]) функції f існує така додатна стала A, що для всіх додатних r та всіх цілих k виконується $|c_k(2r,f)| \leqslant A\lambda(r)$ та $n_0(2r,f) \leqslant A\lambda(r)$. Позначивши через $\{a_j\}$ нулі функції f і застосовуючи аналог формули Пуассона-Єнсена [7] для проколеної площини $\mathbb{C}^*$, отримуємо при $R > r$

$$\log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|P(R,\frac{1}{r},\theta-\varphi)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(\frac{1}{R}e^{i\theta})|P(\frac{R}{r},1,\theta-\varphi)d\theta-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|P\left(R^2,\frac{1}{r},\theta-\varphi\right)d\theta - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|P\left(\frac{R^2}{r},1,\theta-\varphi\right)d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\log|f(\rho e^{i\theta})|}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1}\log\left|\frac{R^2-e^{-i\theta}z}{\frac{1}{R^2}-e^{-i\theta}z}\right|d\theta-$$

$$-\sum_{1<|a_j|\leqslant R}\log\left|\frac{R^2-\overline{a_j}z}{R(a_j-z)}\right| - \sum_{\frac{1}{R}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{\frac{1}{R^2}-\overline{a_j}z}{\frac{1}{R}(a_j-z)}\right| + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\cdot\log R,$$

де $P(R,r,\theta-\varphi)$ — ядро Пуассона, для якого справджуються розвинення (19), (20). Прийнявши, $R = 2r$, отримуємо

$$\log|f(z)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(2r,f)}{(2r^2)^{|k|}}e^{ik\varphi} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(\frac{1}{2r},f)}{2^{|k|}}e^{ik\varphi} - \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{c_k(1,f)}{(4r^3)^{|k|}} + \frac{c_k(1,f)}{(4r)^{|k|}}\right)e^{ik\varphi}-$$

$$-\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|\frac{2r-\frac{\overline{a_j}z}{2r}}{a_j-z}\right| - \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{\frac{1}{2r}-2r\overline{a_j}z}{a_j-z}\right| + O(\log r) \tag{35}$$

при $1 < r \neq |a_j|$, $r \neq \frac{1}{|a_j|}$. Розглянемо суму 4-го та 5-го доданків з (35):

$$\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|2r-\frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{2r^2}\right| - \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|\frac{1}{r}e^{i\varphi}-a_j\right| +$$

$$+\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{1}{2r}-2\overline{a_j}e^{i\varphi}\right| - \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{1}{r}e^{i\varphi}-a_j\right| =$$

$$=\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|2r\left(1-\frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{2r^3}\right)\right| - \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|\frac{1}{r}e^{i\varphi}\left(1-ra_je^{-i\varphi}\right)\right| +$$

$$+\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{1}{2r}(1-4\overline{a_j}re^{i\varphi})\right| - \sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{1}{r}e^{i\varphi}(1-ra_je^{-i\varphi})\right| =$$

$$= n_0^{(1)}(2r,f)\log 2r^2 + \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|1-\frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{2r^3}\right| - \sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|1-ra_je^{-i\varphi}\right| +$$

$$+\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{1}{2}(1-4\overline{a_j}re^{i\varphi})\right|-\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|1-ra_je^{-i\varphi}\right|.$$

Позначимо

$$G(r,\varphi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(2r,f)}{(2r^2)^{|k|}}e^{ik\varphi}+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{c_k(\frac{1}{2r},f)}{2^{|k|}}e^{ik\varphi}-\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{c_k(1,f)}{(4r^3)^{|k|}}+\frac{c_k(1,f)}{(4r)^{|k|}}\right)e^{ik\varphi}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} S(r,\varphi)= &-\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log\left|1-\frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{2r^3}\right|+\sum_{1<|a_j|\leqslant 2r}\log|1-ra_je^{-i\varphi}|-\\ &-\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|<1}\log\left|\frac{1}{2}(1-4r\overline{a_j}e^{i\varphi})\right|+\sum_{\frac{2}{r}\leqslant|a_j|<1}\log|1-ra_je^{-i\varphi}|, \end{aligned} \quad (37)$$

а також

$$F(r,\varphi)=\sum_{\frac{1}{2r}\leqslant|a_j|\leqslant\frac{2}{r}}\log|1-ra_je^{-i\varphi}|.$$

З огляду на введені позначення (35) набуде вигляду

$$\log\left|f\left(\frac{1}{r}e^{i\varphi}\right)\right|=G(r,\varphi)+S(r,\varphi)+F(r,\varphi)-n_0^{(1)}(2r,f)\log 2r^2+O(\log r), \quad r>1. \quad (38)$$

Для отримання бажаного результату проаналізуємо детальніше кожен з перших трьох доданків в (38). Доведемо спершу, що $S(r,f)/\lambda(r)$ буде одностайно неперервною функцією при $r\geq 2$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$. Для цього розглянемо окремо кожен доданок-суму, що входить в $S(r,f)$.

Для кожного доданка першої суми отримуємо рівномірну неперервність при $r\geq 2$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$, зважаючи на нерівності

$$\frac{3}{2}\leqslant 2\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\leqslant\left|1-\frac{\overline{a_j}e^{i\varphi}}{2r^3}\right|\leqslant 1+\frac{|a_j|}{2r^3}\leq\frac{5}{4}, \quad \text{при } 1<|a_j|\leqslant 2r,\ r\geq 2.$$

Міркуючи подібно до (26), робимо висновок про одностайну неперервність першої суми з $S(r,\varphi)$ поділеної на $\lambda(r)$ при $r\geq 2$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$.

Для трьох інших сум з $S(r,f)$ одностайну неперервність визначають способом, який був застосований для доведення одностайної неперервності третього доданка-суми з $S(r,f)$ в Теоремі 3. А саме, всі доданки в другій і четвертій сумах набувають вигляду $\log|1-\zeta|$, а в третій $\log\frac{1}{2}|1-\zeta|$, де всюди $|\zeta|\geq 2$. Тому, використовуючи (27), отримуємо бажане.

Отже, $(\forall\varepsilon_2>0,\varepsilon_2<\frac{\varepsilon}{8A})$ $(\exists\delta_2'>0)$ $(\forall r\geqslant 2)$ $(\forall\varphi,\theta)$:

$$|\varphi-\theta|<\delta_2' \implies |S(r,\varphi)-S(r,\theta)|<2\varepsilon_2(n_0^{(1)}(2r,f)+n_0^{(2)}(2r,f))<2\varepsilon_2 A\lambda(r)<\frac{\varepsilon}{4}\lambda(r). \quad (39)$$

Перейдемо до розгляду $G(r,\varphi)$. Зважаючи на критерій скінченності λ-типу [3], знову як і в доведенні Теореми 3, отримуємо спочатку рівномірну збіжність рядів з $G(r,\varphi)$ в (36) при $r>1$, а потім й одностайну неперервність $G(r,\varphi)/\lambda(r)$ при $r\geqslant 2$,

$\varphi \in [0, 2\pi]$. Тому $(\forall \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{40})$ $(\exists \delta_2'' > 0)$ $(\forall r \geqslant 2)$ $(\forall \varphi, \theta)$ таких, що $|\varphi - \theta| < \delta_2''$ виконується

$$|G(r, \varphi) - G(r, \theta)| < \varepsilon_2 10 A\lambda(r) < \frac{\varepsilon}{4}\lambda(r). \tag{40}$$

Нарешті розглянемо $F(r, \varphi)$. Якщо для деяких додатних чисел δ і R виконується $|\varphi - \theta| < \delta^3$ і $R/2 \leqslant r \leqslant R$, то, позначивши $\zeta = \frac{1}{r}e^{i\theta}$, $z = \frac{1}{r}e^{i\varphi}$ аналогічно до (30), отримаємо

$$F(\zeta) - F(z) = \sum_{\frac{1}{2r} \leqslant |a_j| \leqslant \frac{2}{r}} \log\left|\frac{\zeta - a_j}{z - a_j}\right| \leqslant \sum_{\frac{1}{2R} \leqslant |a_j| \leqslant \frac{4}{R}} \log\left(1 + \frac{2\delta^3 \frac{1}{R}}{|z - a_j|}\right). \tag{41}$$

Приймемо $H = \delta/R$, $p = n_0^{(2)}(2R, f) - n_0^{(2)}(R/4, f)$. Застосовуючи лему Бутру-Картана ([8, ст. 137], [9, ст. 31]), отримуємо, що для довільного $z = \frac{1}{r}e^{i\varphi}$, $\frac{1}{R} \leqslant |z| \leqslant \frac{2}{R}$ поза деякою системою кругів з загальною сумою радіусів $2H = 2\delta/R$ виконується

$$|z - a_j| > \frac{jH}{p} = \frac{\delta \frac{1}{R} j}{p}, \quad j = 1, 2, ...p,$$

де a_j занумеровані у порядку зростання їхніх відстаней від z. Тоді з (41) отримуємо, що для довільного $\zeta = \frac{1}{r}e^{i\theta}$ такого, що $|\varphi - \theta| < \delta^3$

$$F(\zeta) - F(z) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \log\left(1 + \frac{2p\delta^2}{j}\right). \tag{42}$$

Для довільних $\varepsilon > 0$, $0 < \mu \leqslant 1$ виберемо додатне $\delta < \min\left\{\frac{\mu}{32}, \frac{\varepsilon}{12A}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right\}$, де A — стала з умови скінченності λ-типу. Враховуючи нерівність $\log(1 + x) < \sqrt{x}$ при $x > 0$, а також $\sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{m}} \leqslant 2\sqrt{n}$, з (42) отримуємо

$$F(\zeta) - F(z) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \frac{\sqrt{2p}\delta}{\sqrt{j}} \leqslant 3\delta \cdot n_0^{(2)}(2R, f) \leqslant 3\delta A\lambda(r) < \frac{\varepsilon}{4}\lambda(r). \tag{43}$$

Для кожного $R_n = 2^n, n \geqslant 3$ і побудуємо множину виняткових кругів з сумою радіусів $2\delta/R_n$ таку, що для всіх z, які не належать до цих кругів і для довільних $\zeta = \frac{1}{r}e^{i\theta}$ за умов $|\varphi - \theta| < \delta^3$, $\frac{1}{R_n} \leqslant |z| = |\zeta| \leqslant \frac{2}{R_n}$ виконується (43). Оскільки ці круги містять усі a_j такі, що $\frac{1}{2R_n} < |a_j| \leqslant \frac{4}{R_n}$, то центри цих кругів лежать у кільці $(\frac{1}{2} - 2\delta)\frac{1}{R_n} < |z| \leqslant (4 + 2\delta)\frac{1}{R_n}$.

Зауваження 2. За зроблених припущень очевидно виконується $(4 + 2\delta)\frac{1}{R_n} \leq 1$.

Позначимо через E_μ множину тих r, для яких $z = \frac{1}{r}e^{i\varphi}$ належить побудованій множині виняткових кругів. Тоді

$$E_\mu = \bigcup_{\frac{1}{r} < |a_j| < 1} \left[|a_j| - \frac{2\delta}{R_n}, |a_j| + \frac{2\delta}{R_n}\right].$$

Тому

$$E_\mu' = \bigcup_{1 < \frac{1}{|a_j|} < r} \left[\frac{1}{|a_j| + \frac{2\delta}{R_n}}, \frac{1}{|a_j| - \frac{2\delta}{R_n}}\right].$$

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k \leqslant 2^{k+1}$, то $\sum\limits_{n=1}^{n_0} 2\delta R_n$ не перевищує $4\delta R_{n_0}$, де n_0 — найбільше серед тих n, для яких виконується нерівність $\frac{1}{r} < (\frac{1}{2} - 2\delta)\frac{1}{R_n}$, яка еквівалентна нерівності $r > \frac{2R_n}{1-4\delta}$. Крім того, якщо $\frac{1}{2R_n} < |a_j| \leqslant \frac{4}{R_n}$, то, пригадуючи, що $0 < \delta < \frac{1}{4\sqrt{2}}$, отримуємо оцінку $R_n^2|a_j|^2 - 4\delta^2 > \frac{1}{4} - 4\delta^2 > \frac{1}{8}$. Звідси

$$\begin{aligned} mes\big(E'_\mu \cap (1, r)\big) &\leqslant \sum_{n=1}^{n_0} \left(\frac{1}{|a_j| - \frac{2\delta}{R_n}} - \frac{1}{|a_j| + \frac{2\delta}{R_n}} \right) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\frac{4\delta}{R_n}}{|a_j|^2 - \frac{4\delta^2}{R_n^2}} = \\ &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{4\delta R_n}{R_n^2|a_j|^2 - 4\delta^2} \leqslant \sum_{n=1}^{n_0} 32\delta R_n \leqslant 32\delta R_{n_0+1} = 64\delta R_{n_0} \leqslant \\ &\leqslant 64\delta \frac{(1-4\delta)r}{2} = 32\delta(1-4\delta)r < 32r\delta < r\mu. \end{aligned} \tag{44}$$

Враховуючи означення 4, з (44) випливає, що $\overline{m}_0^*(E_\mu) \leqslant \mu$. За умови $|\theta - \varphi| < \delta^3$ для $r \notin E_\mu$ справджується (43). Змінюючи θ і φ місцями, отримуємо, що для $r \notin E_\mu$ при $|\theta - \varphi| < \delta^3$ виконується $F(re^{i\varphi}) - F(re^{i\theta}) < \frac{\varepsilon}{4}\lambda(r)$. Це разом з (43) дає

$$|F(\zeta) - F(z)| < \frac{\varepsilon}{4}\lambda(r). \tag{45}$$

Приймемо $\delta_0 = \min\{\delta'_2, \delta''_2, \delta^3\}$. З огляду на (39), (40), (45), враховуючи, що $\log r = o(\lambda(r))$, $r \to +\infty$ з (38) отримуємо, що при $r \geq 2$, $r \notin E_\mu$ та $|\theta - \varphi| < \delta_0$ справджується

$$\left| \log f\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right) - \log f\left(\frac{1}{r}e^{i\varphi}\right) \right| < \varepsilon\lambda(r).$$

□

Література

1. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. I / A. Ya. Khrystiyanyn, A. A. Kondratyuk // Mat. Stud. — 2005. — Vol. 23, №1. — P. 19–30.
2. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. II /A.Ya. Khrystiyanyn, A.A. Kondratyuk // Mat. Stud. — 2005. — Vol. 24, №2. — P. 57–68.
3. *Kondratyuk A., Laine I.* Meromorphic functions in multiply connected domains. // Joensuu–L'viv, 2006. – 116 p. (A. Kondratyuk, I. Laine, *Meromorphic functions in multiply connected domains*, Fourier series methods in complex analysis // Mekrijärvi, 2005, Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. **10** (2006), 9–111.)
4. *Голдак М.* Голоморфні функції цілком регулярного зростання в проколеній площині / М. Голдак, А. Христіянин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2011. — Вип. 75. — с. 91–96.
5. *Вишинський О.* Про одностайне цілком регулярне зростання модуля та аргумента голоморфної в проколеній комплексній площині функції / О. Вишинський, А. Христіянин // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2014. — Вип. 79. — с. 33–47.
6. *Голдак М.* Обернені формули для коефіцієнтів Фур'є мероморфних у кільцях функцій / М. Голдак, А. Христіянин // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2009. — Вип. 71. — с. 71–77.
7. *Kshanovskyy I.* An analog of Poisson-Jensen formula for annuli / I. Kshanovskyy // Mat. Stud. — 2005. — Vol. 24, — P. 147–158.
8. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции / А. А. Кондратюк — Львів, 1988.

9. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин — М.:ГИТТЛ, 1956.
10. *Хейман У.* Мероморфные функции / У. Хейман — М.: Мир, 1966.

Стаття: надійшла до редколегії 12.05.2015.
доопрацьована 04.11.2015.
прийнята до друку 11.11.2015.

ON THE PROPERTIES OF THE INDICATORS OF COMPLETELY REGULARLY GROWING HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN THE PUNCTURED PLANE. I

Andriy KHRYSTIYANYN, Oleg VYSHYNS'KYI

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: khrystiyanyn@ukr.net, vyshynskyi@ukr.net

We prove that the growth indicators of a holomorphic function of completely regular growth with respect to a growth function λ in the punctured complex plane are continuous. We also establish the property of uniform equicontinuity for the functions of finite λ-type in the punctured plane.

Key words: function of completely regular growth, growth indicator, function of finite λ-type, upper relative measure, uniform equicontinuity, Poisson-Jensen formula, Fourier coefficients, holomorphic function.