ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2015. Випуск 80. С. 52–60
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2015. Issue 80. P. 52–60

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯ

Наталія КІНАШ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: n_kinash@lnu.edu.ua

Визначено достатні умови існування та єдиності класичного розв'язку оберненої задачі визначення залежного від часу старшого коефіцієнта у двовимірному рівнянні теплопровідності з нелокальною умовою перевизначення.

Ключові слова: обернена задача, нелокальна умова перевизначення, двовимірне рівняння теплопровідності.

1. Вступ. Проблематика коефіцієнтних обернених задач набула значного поширення ще з 70-х років минулого століття. Нелокальні обернені задачі для одновимірного рівняння теплопровідності дослідив Іванчов М.І. [1]. У праці Березницької І.Б. [2] визначено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для одновимірного повного параболічного рівняння з крайовими умовами Неймана та нелокальною умовою перевизначення. Дещо пізніше Гринців Н.М. [3] розглянула обернену задачу знаходження коефіцієнта біля молодшої похідної для повного параболічного рівняння з виродженням також із нелокальною умовою перевизначення. Обернені задачі з нелокальними та інтегральними умовами досліджені також у [4], [5].

Одновимірні задачі менш точно описують дійсність, ніж їхні двовимірні аналоги. Двовимірні задачі визначення старшого коефіцєнта розглянуто, наприклад, у працях Іванчова М.І. та Сагайдака Р.В. [6], [7]. Чисельні методи для обчислення розв'язків двовимірних обернених задач подано у [8], [9]. Загалом праць, де були б розглянуті багатовимірні обернені задачі, є не надто багато. Це спонукало автора виконати дослідження.

Ми розглянули обернену задачу знаходження залежного від часу старшого коефіцієнта двовимірного рівняння теплопровідності з крайовими умовами Неймана та нелокальною умовою як умовою перевизначення. Визначили достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі. Випадок нелокальної умови перевизначення з інтегральним доданком розглянули окремо.

2. Формулювання задачі та основні припущення. В області $Q_T := \{(x,y,t) : 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$ розглядаємо обернену задачу визначення пари невідомих функцій $(a(t), u(x,y,t))$ для рівняння теплопровідності

$$u_t = a(t)\Delta u + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in [0,h] \times [0,l], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u_x(0,y,t) = \mu_{11}(y,t), \quad u_x(h,y,t) = \mu_{12}(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{3}$$

$$u_y(x,0,t) = \mu_{21}(x,t), \quad u_y(x,l,t) = \mu_{22}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T] \tag{4}$$

та нелокальною умовою перевизначення

$$\nu_1(t)u(0,y_0,t) + \nu_2(t)u(h,y_0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

де y_0 — фіксоване значення з проміжку $[0,l]$.

Нехай $G_k(x,t,\xi,\tau)$ — функції Гріна одновимірної задачі для рівняння $u_t = a(t)u_{xx}$ із крайовими умовами першого роду при $k=1$, другого — при $k=2$, умовами $u(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(h,t) = \mu_4(t), t \in [0,T]$ — при $k=3$, $u_x(0,t) = \mu_2(t), \quad u(h,t) = \mu_3(t), t \in [0,T]$ — при $k=4$. Вони визначаються рівністю

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{[\frac{k-1}{2}]n} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) + \right.$$

$$\left. +(-1)^k \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right), \quad k = \overline{1,4}, \quad \theta(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau, t \in [0,T]. \tag{6}$$

Функцію $G_m(y,t,\eta,\tau)$ задаємо аналогічно до $G_k(x,t,\xi,\tau)$.

Тоді функція Гріна задачі (1)-(4) визначається рівністю

$$G_{km}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = G_k(x,t,\xi,\tau)G_m(y,t,\eta,\tau). \tag{7}$$

Припустимо, що виконуються умови :
(A1) $f \in C^{2,0}(\overline{Q_T}), \quad \varphi \in C^2([0,h] \times [0,l]), \quad \mu_{11}, \mu_{12} \in C^{1,1}([0,l] \times [0,T])$, $\mu_{21}, \mu_{22} \in C^{1,1}([0,h] \times [0,T]), \quad \mu_3, \nu_1, \nu_2 \in C^1([0,T])$;
(A2) $\varphi(x,y) \geqslant 0, \quad (x,y) \in [0,h] \times [0,l]; \quad \nu_1'(t) \leqslant 0, \nu_2'(t) \leqslant 0, \quad t \in [0,T]$; $\mu_{11}(y,t) \leqslant 0, \quad \mu_{12}(y,t) \geqslant 0, (y,t) \in [0,l] \times [0,T]; \quad \mu_{21}(x,t) \leqslant 0, \quad \mu_{22}(x,t) \geqslant 0$, $(x,t) \in [0,h] \times [0,T]$; $f(x,y,t) \geqslant 0, \quad (x,y,t) \in Q_T$;
(A3) $\Delta\varphi(x,y) > 0$, $(x,y) \in [0,h] \times [0,l]$; $\nu_i(t) \geqslant 0$, $i = 1,2$, $\nu_1(t) + \nu_2(t) > 0$, $t \in [0,T]$; $\mu_{11t}(y,t) - f_x(0,y,t) \leqslant 0, \quad \mu_{12t}(y,t) - f_x(h,y,t) \geqslant 0, \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T]$; $\mu_{21t}(x,t) - f_y(x,0,t) \leqslant 0, \quad \mu_{22t}(x,t) - f_y(x,l,t) \geqslant 0, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T]$; $\Delta f(x,y,t) \geqslant 0, \quad (x,y,t) \in Q_T$;
(A4) $\varphi_x(0,y) = \mu_{11}(y,0)$, $\varphi_x(h,y) = \mu_{12}(y,0)$, $\varphi_y(x,0) = \mu_{21}(x,0)$, $\varphi_y(x,h) = \mu_{22}(x,0)$;
(A5) $\mu_3'(t) - \nu_1(t)f(0,y_0,t) - \nu_2(t)f(h,y_0,t) > 0, \quad t \in [0,T]$;

(A6) $\nu_1(0)\varphi(0,y_0)+\nu_2(0)\varphi(h,y_0)=\mu_3(0)$.

3. Отримання з задачі (1)–(5) рівняння стосовно $a(t)$**.** Якщо $a(t)$ – відома функція, то $u(x,y,t)$ є розв'язком задачі (1)–(4). Отже, виконується рівність

$$u(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)a(\tau)\mu_{11}(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)a(\tau)\mu_{12}(\eta,\tau)d\eta d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)a(\tau)\mu_{21}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,h,\tau)a(\tau)\mu_{22}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{8}$$

Застосовуємо до (8) оператор Лапласа. Враховуючи умови узгодження **(A4)** та властивості функції Гріна, застосовуючи інтегрування частинами, отримуємо

$$\Delta u(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\Delta\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{11\tau}(\eta,\tau)-$$
$$-f_\xi(0,\eta,\tau))d\eta d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{12\tau}(\eta,\tau)-f_\xi(h,\eta,\tau))d\eta d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)(\mu_{21\tau}(\xi,\tau)-f_\eta(\xi,0,\tau))d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,h,\tau)\times$$
$$\times(\mu_{22\tau}(\xi,\tau)-f_\eta(\xi,l,\tau))d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\Delta f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{9}$$

Диференціюючи умову (5) та застосовуючи (1), отримуємо операторне рівняння стосовно $a(t)$ вигляду

$$a=Pa,\quad a\in C([0,T]),\quad \text{де } (Pa)(t)=\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}, \tag{10}$$
$$Q_1(t)=\mu_3'(t)-\nu_1(t)f(0,y_0,t)-\nu_2(t)f(h,y_0,t)-\nu_1'(t)u(0,y_0,t)-\nu_2'(t)u(h,y_0,t), \tag{11}$$
$$Q_2(t)=\nu_1(t)\Delta u(0,y_0,t)+\nu_2(t)\Delta u(h,y_0,t),\quad t\in[0,T], \tag{12}$$

а $u(0,y_0,t),\Delta u(0,y_0,t),u(h,y_0,t)$ та $\Delta u(h,y_0,t)$ задаються формулами (8) та (9) у $(0,y_0,t)$ та (h,y_0,t), відповідно. Додатність (12) випливає з апріорних оцінок, які визначають у доведенні теореми 1.

Із способу отримання системи рівнянь (8), (10) випливає, що розв'язок (a,u) задачі (1)–(5) задовольняє систему (8), (10). Доведемо, що правильним є і обернене твердження. Еквівалентність рівняння (8) задачі (1)–(4) за умови, що $a(t)$ — відоме, доведена у [10]. Домножуємо (10) на (12) та інтегруємо за часом від 0 до t із врахуванням умови узгодження **(A6)**. Враховуючи еквівалентність задачі (1)–(4) рівнянню (8), бачимо, що отримана рівність еквівалентна умові (5).

4. Існування та єдиність розв'язку задачі (1)–(5).

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* **(A1)–(A6)**, *то задача* (1)–(5) *має принаймні один розв'язок* $(a(t), u(x,y,t)) \in C([0,T]) \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Щоб довести існування розв'язку задачі (1)–(5), за допомогою теореми Шаудера доведемо існування розв'язку рівняння (10).

Через $C_i, \quad i = \overline{1,6}$ позначаємо різні додатні сталі, які залежать від вихідних даних, h та T.

Наведемо властивості функції Гріна з [12], які використовують у доведенні

$$\int_0^h G_2(x,t,\xi,0)d\xi = 1, \tag{13}$$

$$G_2(0,t,0,\tau) \leqslant \frac{1}{h} + \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}. \tag{14}$$

Щоб застосувати теорему Шаудера, потрібно розглянути операторне рівняння (10) на множині $\mathcal{N} := \{a \in C([0,T]) : A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1\}$, де A_0, A_1– такі сталі, що оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ у себе (тобто, $A_0 \leqslant (Pa)(t) \leqslant A_1, t \in [0,T]$ для довільної $a \in \mathcal{N}$). Визначимо, якими мають бути ці сталі.

Проведемо оцінку $(Pa(t))$ знизу. Зауважимо, що з явного зображення функції Гріна (7) $G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) > 0$. Враховуючи умови **(A2), (A5)**, із (11) отримуємо

$$Q_1(t) \geqslant \min_{t\in[0,T]}(\mu_3'(t) - \nu_1(t)f(0,y_0,t) - \nu_2(t)f(h,y_0,t)) = C_1 > 0, \quad t \in [0,T].$$

Позначимо $a_{\min} = \min\limits_{t\in[0,T]} a(t)$ та оцінимо (12). Із (13), (14)

$$Q_2(t) \leqslant C_2 + \frac{C_3}{\sqrt{a_{\min}}}, \quad t \in [0,T].$$

Отже,

$$(Pa)(t) \geqslant \frac{C_1}{C_2 + \frac{C_3}{\sqrt{a_{\min}}}}, \quad t \in [0,T].$$

Визначимо A_0 із рівності

$$\frac{C_1}{C_2 + \frac{C_3}{\sqrt{A_0}}} = A_0,$$

тоді

$$A_0 := \left(\frac{-C_3 + \sqrt{C_3^2 + 4C_2C_1}}{2C_2}\right)^2.$$

Отже, для довільного $a \in \mathcal{N}$

$$(Pa)(t) \geqslant A_0, \quad t \in [0,T].$$

Проведемо оцінку $(Pa)(t)$ зверху. Оцінюємо (12), використовуючи **(A3)** та (13)

$$Q_2(t) \geqslant \nu_1(t) \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{22}(0, y_0, t, \xi, \eta, 0)\Delta\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta + \nu_2(t) \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{22}(h, y_0, t, \xi, \eta, 0)\times$$
$$\times \Delta\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta \geqslant (\nu_1(t)+\nu_2(t)) \min_{[0,h]\times[0,l]} \Delta\varphi(x,y) \geqslant C_4 > 0, \quad t \in [0,T].$$

Позначаємо $a_{\max} = \max\limits_{t\in[0,T]} a(t)$ та з (13), (14) отримуємо оцінку (11) зверху

$$Q_1(t) \leqslant C_5 + C_6\sqrt{a_{\max}}.$$

Тоді

$$(Pa)(t) \leqslant \frac{C_5 + C_6\sqrt{a_{\max}}}{C_4}.$$

Знаходимо A_1 з рівності

$$\frac{C_5 + C_6\sqrt{A_1}}{C_4} = A_1,$$

тоді

$$A_1 := \left(\frac{C_6 + \sqrt{C_6^2 + 4C_4C_5}}{2C_4}\right)^2.$$

Отже, для знайдених значень A_0, A_1 отримаємо таке: якщо $a \in \mathcal{N}$, то і $(Pa) \in \mathcal{N}$.

Розглядаємо операторне рівняння (10) на множині $\mathcal{N} := \{a \in C([0,T]) : A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1\}$. Оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ у себе згідно з оцінками вище. Те, що P цілком неперервний на $\mathcal{N}$, визначаємо аналогічно до [12], с.27. Тоді існування неперервного розв'язку рівняння (10) випливає з теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Оскільки функція $u \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ однозначно визначається з (1)–(4) при заданому $a \in C(0,T)$, то теорему доведено. $\square$

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* **(A2)**, **(A5)**, *то розв'язок* (1)–(5) *єдиний у класі* $C([0,T]) \times C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Припустимо, що існують дві пари функцій $(a_1(t), u_1(x,y,t))$ та $(a_2(t), u_2(x,y,t))$, що є розв'язками задачі (1)-(5). Введемо нові функції:

$$a_3(t) := a_1(t) - a_2(t), \quad t \in [0,T], \quad u_3(x,y,t) := u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T. \tag{15}$$

Тоді пара функцій $(a_3(t), u_3(x,y,t))$ є розв'язком задачі

$$u_{3t} = a_1(t)\Delta u_3 + a_3(t)\Delta u_2, \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{16}$$

$$u_3(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in [0,h] \times [0,l], \tag{17}$$

$$u_{3x}(0,y,t) = 0, \quad u_{3x}(h,y,t) = 0, \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{18}$$

$$u_{3y}(x,0,t) = 0, \quad u_{3y}(x,l,t) = 0, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{19}$$

$$\nu_1(t)u_3(0,y_0,t)+\nu_2(t)u_3(h,y_0,t)=0, \quad t\in[0,T]. \tag{20}$$

Диференціюємо (20) та, застосовуючи (16), отримуємо

$$a_3(t)=\frac{1}{\nu_1(t)\Delta u_2(0,y_0,t)+\nu_2(t)\Delta u_2(h,y_0,t)}(-\nu_1'(t)u_3(0,y_0,t)-\nu_2'(t)u_3(h,y_0,t)- \\ -\nu_1(t)a_1(t)\Delta u_3(0,y_0,t)-\nu_2(t)a_1(t)\Delta u_3(h,y_0,t)). \tag{21}$$

Позначимо через $\hat{G}_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ функцію Гріна задачі (18), (19) для рівняння $\hat{u}_t=a_1(t)\Delta\hat{u}$. Оскільки $a_1(t)$ – відома функція, то розв'язок задачі (16)-(19) єдиний й визначають за формулою

$$u_3(x,y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h\hat{G}_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)a_3(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{22}$$

Застосовуючи до (22) оператор Лапласа, отримуємо

$$\Delta u_3(x,y,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\int\limits_0^h\Delta\hat{G}_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)a_3(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta. \tag{23}$$

Враховуючи (22) та (23), із (21) одержимо рівняння стосовно $a_3(t)$

$$a_3(t)=\frac{1}{\nu_1(t)\Delta u_2(0,y_0,t)+\nu_2(t)\Delta u_2(h,y_0,t)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l\int\limits_0^h\Big(-\nu_1'(t)\hat{G}_{22}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)- \\ -\nu_2'(t)\hat{G}_{22}(h,y_0,t,\xi,\eta,\tau)-\nu_1(t)a_1(t)\Delta\hat{G}_{22}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)-\nu_2(t)a_1(t)\times \\ \times\Delta\hat{G}_{22}(h,y_0,t,\xi,\eta,\tau)\Big)a_3(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta. \tag{24}$$

Доведемо, що $\nu_1(t)\Delta u_2(0,y_0,t)+\nu_2(t)\Delta u_2(h,y_0,t)\neq 0$. Оскільки (a_2,u_2) є розв'язком задачі (1)–(5), то з (10) матимемо

$$\nu_1(t)\Delta u_2(0,y_0,t)+\nu_2(t)\Delta u_2(h,y_0,t)=a_2(t)(\mu_3'(t)-\nu_1(t)f(0,y_0,t)-\nu_2(t)f(h,y_0,t)- \\ -\nu_1'(t)u_2(0,y_0,t)-\nu_2'(t)u_2(h,y_0,t)).$$

Зауважимо, що u_2 визначається формулою (8) як розв'язок задачі (1)-(4). Отже, з умов **(A2), (A5)** випливає

$$\nu_1(t)\Delta u_2(0,y_0,t)+\nu_2(t)\Delta u_2(h,y_0,t)>0, \quad t\in[0,T].$$

Отримали інтегральне рівняння Вольтерра другого роду (24). Згідно з теоремою 4, с.21 із [11] інтеграли, що містять $\Delta\hat{G}_{22}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)$ та $\Delta\hat{G}_{22}(h,y_0,t,\xi,\eta,\tau)$, є неперервними функціями, оскільки $\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)$ задовольняє умову Гельдера за просторовими змінними. Тоді інтегральне рівняння Вольтерра другого роду (24) має єдиний розв'язок $a_3(t)=0, \quad t\in[0,T]$, а отже, з рівності (22) $u_3(x,y,t)=0, \quad (x,y,t)\in Q_T$. Єдиність розв'язку (1)-(5) у класі $C([0,T])\times C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$ доведено. $\square$

5. Випадок нелокальної умови перевизначення з інтегральним доданком. В області Q_T розглядаємо обернену задачу визначення пари невідомих функцій $(a(t), u(x,y,t))$ для рівняння (1), що задовольняє умови (2)-(4) та умову перевизначення вигляду

$$\nu_1(t)u(0,y_0,t) + \nu_2(t)u(h,y_0,t) + \nu_3(t)\int_0^l\int_0^h u(x,y,t)dxdy = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{25}$$

де y_0 – фіксоване значення з $[0,l]$.
До умов **(A1)-(A4)** приєднуємо:
(A1a) $\nu_3 \in C^1([0,T])$; **(A2a)** $\nu_3'(t) \leqslant 0 \quad t \in [0,T]$; **(A3a)** $\nu_3(t) \geqslant 0, \quad t \in [0,T]$;
(A5a) $\mu_3'(t) - \nu_1(t)f(0,y_0,t) - \nu_2(t)f(h,y_0,t) - \nu_3(t)\int_0^l\int_0^h f(x,y,t)dxdy > 0, \quad t \in [0,T]$;
(A6a) $\nu_1(0)\varphi(0,y_0) + \nu_2(0)\varphi(h,y_0) + \nu_3(0)\int_0^l\int_0^h \varphi(x,y)dxdy = \mu_3(0)$.
Враховуючи, що

$$\int_0^l\int_0^h \Delta u(x,y,t)dxdy = \int_0^l(\mu_{12}(y,t) - \mu_{11}(y,t))dy + \int_0^h(\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx,$$
$$t \in [0,T],$$

диференціюємо (25) та, застосовуючи (1), отримуємо

$$a = \tilde{P}a, \quad a \in C([0,T]), \quad \text{де } (\tilde{P}a)(t) = \frac{Q_3(t)}{Q_4(t)}, \tag{26}$$

$$Q_3(t) = \mu_3'(t) - \nu_1(t)f(0,y_0,t) - \nu_1(t)f(0,y_0,t) - \nu_2(t)f(h,y_0,t) - \nu_3(t)\times$$
$$\times\int_0^l\int_0^h f(x,y,t)dxdy - \nu_1'(t)u(0,y_0,t) - \nu_2'(t)u(h,y_0,t) - \nu_3'(t)\int_0^l\int_0^h u(x,y,t)dxdy, \tag{27}$$

$$Q_4(t) = \nu_1(t)\Delta u(0,y_0,t) + \nu_2(t)\Delta u(h,y_0,t) + \nu_3(t)\Bigg(\int_0^l(\mu_{12}(y,t) - \mu_{11}(y,t))dy +$$
$$+\int_0^h(\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx\Bigg), \quad t \in [0,T]. \tag{28}$$

Значення $u(0,y_0,t), \Delta u(0,y_0,t), u(h,y_0,t), \Delta u(h,y_0,t)$ та $u(x,y,t)$ у (27), (28) задають формулами (8) та (9) у відповідних точках. Отож,

$$Q_3 = Q_1(t) - \nu_3(t)\int_0^l\int_0^h f(x,y,t)dxdy - \nu_3'(t)\int_0^l\int_0^h u(x,y,t)dxdy,$$

$$Q_4 = Q_2(t) + \nu_3(t)\left(\int_0^l (\mu_{12}(y,t) - \mu_{11}(y,t))dy + \int_0^h (\mu_{22}(x,t) - \mu_{21}(x,t))dx\right),$$

$t \in [0, T]$.

На підставі визначених рівностей формулюємо та доводимо теореми існування та єдиності розв'язку задачі (1)-(4), (25) аналогічно до теорем 1, 2.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* **(A1)-(A4), (A1a)-(A3a), (A5a), (A6a)**, *то задача* (1)-(4), (25) *має принаймні один розв'язок* $(a(t), u(x,y,t)) \in C([0,T]) \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови* **(A2), (A2a), (A5a)**, *то розв'язок* (1)-(4), (25) *єдиний у класі* $C([0,T]) \times C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$.

Література

1. *Іванчов М.І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами / М.І. Іванчов. — К.: ІСДО, 1995. – 84 с. – (Препринт).
2. *Березницька І.Б.* Обернена задача для параболічного рівняння з нелокальною умовою перевизначення/ І.Б. Березницька // Мат. методи та фіз.-мех. поля. –– 2001. — Т. 44, №1. — С. 54-62.
3. *Hryntsiv N.M.* Nonlocal inverse problems for a weakly degenerate parabolic equation/ N.M. Hryntsiv // Вісн. нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. — 2011. — Т. 696, №696. — С. 32-39.
4. *Lesnic D.* Determination of a time-dependent diffusivity from nonlocal conditions / D. Lesnic , S.A. Yousefi, M. Ivanchov // J. Appl. Math. Comput. — 2013. — Vol. 41. — P. 301-320.
5. *Kanca F.* Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of heat equation from integral overdetermination condition data / F. Kanca, M. Ismailov // Inverse Probl. Sci. Eng. — 2012. — Vol. 20. — P. 463-476.
6. *Сагайдак Р. В.* Про одну обернену задачу для двовимірного рівняння параболічного типу/ Р. В. Сагайдак // Мат. методи та фіз.-мех. поля. –– 2002. — Т. 45, №2. — С. 22-30.
7. *Іванчов М. І.* Обернена задача визначення старшого коефіцієнта у двовимірному параболічному рівнянні/ М.І. Іванчов, Р.В. Сагайдак // Мат. методи та фіз.-мех. поля. –– 2004. —- Т. 47, №1. — С. 7–16.
8. *Coles C.* Identification of parameters in the 2-D IHCP /C. Coles, D.A. Murio // Computers and Mathematics with Applications, — 2000. — No. 40. — P. 939–956.
9. *Coles C.* Simultaneous space diffusivity and source term reconstruction in 2D IHCP / C. Coles, D.A. Murio // Computers and Mathematics with Applications, — 2001. — No. 42. — P. 1549–1564.
10. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа./ О.А. Ладыженская , В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева — М., 1967.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа./А. Фридман — М., 1967.
12. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type./M. Ivanchov // Math. Studies: Monograph Ser. — 2003. — Vol. 10. — 238 p.

Стаття: надійшла до редколегії 02.09.2015
прийнята до друку 11.11.2015

AN INVERSE PROBLEM FOR A TWO-DIMENSIONAL HEAT EQUATION WITH NONLOCAL OVERDETERMINATION CONDITION

Nataliia KINASH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: n_kinash@lnu.edu.ua

Sufficient conditions of existence and uniqueness of solution to the inverse problem of determining time-dependent leading coefficient in a 2-dimensional heat equation with nonlocal overdetermination condition are established.

Key words: inverse problem, nonlocal overdetermination condition, 2D heat equation.