*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 81. С. 159–162*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 81. P. 159–162*

УДК 519.217

# ПРО ВИБІР МАЛОГО ПАРАМЕТРА НОРМУВАННЯ ГЕНЕРАТОРА ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

**Оксана ЯРОВА**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
*вул. Університетська, 1, Львів, Україна*
*e-mail: oksana-yarova@rambler.ru*

Досліджено марковські випадкові еволюції та їхні апроксимації. Основним об'єктом дослідження є генератори випадкових процесів з незалежними приростами. Ці процеси розглядають в схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві. Генератори випадкових процесів нормуються параметрами, які є нелінійними функціями. Доведено існування таких параметрів нормування.

*Ключові слова:* генератор, марковський процес, процес з незалежними приростами, нормувальний множник, пуассонова апроксимація, апроксимація Леві.

**1. Вступ.** Дослідженням марковських випадкових еволюцій та їхніх апроксимацій присвячено багато наукових праць, серед яких можна виділити [1], [2], [3]. Зокрема в [3] досліджуються процеси з незалежними приростами в схемах пуассонової апроксимації та апроксимації Леві. В таких процесах немає дифузійної складової, а між стрибками відбувається марковський процес. В апроксимаціях Пуассона і Леві генератор процесу нормується лінійним множником[1]. Проте в деяких випадках таке нормування не є доцільним. Тому виникає потреба розглядати нормувальний множник як нелінійну функцію. Мета нашої праці — знайти такі параметри в зображенні генератора випадкового процесу з незалежними приростами.

**2. Апроксимація Пуассона та Леві.** Розглянемо сім'ю марковських процесів з незалежними приростами $\eta_1^\varepsilon(\cdot)$ та траєкторіями в області визначення $D^R[0;\infty)$, які нормуються множником $g_1(\varepsilon) \to 0$,при $(\varepsilon) \to 0$

$$\eta_1^\varepsilon(t) = \eta(\tfrac{t}{(g_1(\varepsilon))}),\ t \geqslant 0,$$

де $\eta(t)$ — процес з незалежними приростами, що визначаються генераторами

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} \int_R (\varphi(u+v) - \varphi(u))\Gamma^\varepsilon(dv).$$

Тут $\varphi(u)$ — дійснозначна, двічі диференційована функція в $R^d$, яка дорівнює 0 на нескінченості та з sup-нормою $\varphi(u)$ належить класу двічі неперервно-диференційовних функцій в евклідовому просторі $C_0^2(R^d)$. Ядро інтенсивності $\Gamma^\varepsilon$ належить класу $C^3(R)$. Це ядро задовольняє умову $\Gamma^\varepsilon(0) = 0$.

Нехай виконуються умови пуассонової апроксимації.

**(P1)** Апроксимація середніх

$$b_\varepsilon = g_1(\varepsilon)(b + \theta_b^\varepsilon)$$

та

$$c_\varepsilon = g_1(\varepsilon)(c + \theta_c^\varepsilon),$$

де $b < \infty, c < \infty, |\theta_b^\varepsilon| \to 0, |\theta_c^\varepsilon| \to 0, g_1(\varepsilon) \to 0$.

**(P2)** Ядро інтенсивностей має таке асимптотичне подання

$$\Gamma_g^\varepsilon = g_1(\varepsilon)(\Gamma_g + \theta_g^\varepsilon).$$

для всіх $g$, що належать класу $C^3(R)$. Ядро інтенсивності $\Gamma^0(dv)$ ) задано на класі функцій, що визначає міру $C^3(R)$ таким співвідношенням

$$\Gamma_g = \int_R g(v)\Gamma^0(dv).$$

**(P3)**У граничному генераторі немає дифузійної складової, тобто виконується така умова

$$c = \int_R v^2\Gamma^0(dv) = 0$$

**(P4)** Справджується співвідношення

$$\lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} v^2\Gamma^0(dv) = 0,$$

що визначає рівномірну квадратичну інтегрованість.

Перейдемо до апроксимації Леві.

Розглянемо сім'ю марковських процесів з незалежними приростами, які нормуються множником $g_2(\varepsilon)$, де $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon)$

$$\eta_2^\varepsilon(t) = \eta(\tfrac{t}{(g_2(\varepsilon))}),\ t \geqslant 0.$$

Тут $\eta(t)$ — процес з незалежними приростами, що визначаються генераторами

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1} \int_R (\varphi(u+v) - \varphi(u))\Gamma^\varepsilon(dv),$$

де $\varphi(u)$ — дійснозначна, двічі диференційована функція в $R^d$, яка дорівнює 0 на нескінченості та з sup-нормою $\varphi(u)$ належить класу двічі неперервно-диференційовних функцій в евклідовому просторі $C_0^2(R^d)$. Ядро інтенсивності $\Gamma^\varepsilon$ належить класу $C^3(R)$. Таке ядро задовольняє умову $\Gamma^\varepsilon(0) = 0$.

Нехай виконуються умови апроксимації Леві.

**(L1)** Апроксимація середніх

$$b_\varepsilon = g_1(\varepsilon)b_1 + g_2(\varepsilon)(b + \theta_b^\varepsilon)$$

та

$$c_\varepsilon = g_2(\varepsilon)(c + \theta_c^\varepsilon),$$

де $b < \infty, c < \infty, |\theta_b^\varepsilon| \to 0, |\theta_c^\varepsilon| \to 0, g_1(\varepsilon) \to 0$.

**(L2)** Ядро інтенсивностей має таке асимптотичне зображення

$$\Gamma_g^\varepsilon = g_2(\varepsilon)(\Gamma_g + \theta_g^\varepsilon),$$

для всіх $g$, що належать класу $C^3(R)$. Ядро інтенсивності $\Gamma^0(dv)$ задано на класі функцій, що визначає міру $C^3(R)$ таким співвідношенням:

$$\Gamma_g = \int_R g(v)\Gamma^0(dv).$$

**(L3)** Справджується співвідношення

$$\lim_{c\to\infty}\int_{|v|>c} v^2\Gamma^0(dv)=0,$$

що визначає рівномірну квадратичну інтегрованість.

**3. Вибір пармаметра нормування.**

Розглянемо генератор марковського процесу пуассонової апроксимації, що нормується множником $g_1(\varepsilon)$

$$\Gamma_g^\varepsilon = g_1(\varepsilon)(\Gamma_g+\theta_g^\varepsilon).$$

Для генератора $\Gamma_g^\varepsilon$ завжди існує такий граничний генератор $\Gamma_g$, що

$$\frac{\Gamma_g^\varepsilon-\Gamma_g}{g_1(\varepsilon)}=\Gamma_{1,g}.$$

Знайдемо зображення генератора $\Gamma_{1,g}$

$$\frac{\Gamma_g^\varepsilon-\Gamma_g}{g_1(\varepsilon)}=\frac{g_1(\varepsilon)(\Gamma_g+\Theta_g^\varepsilon-\Gamma_g}{g_1(\varepsilon)}=\frac{g_1(\varepsilon)\Gamma_g+g_1(\varepsilon)\Theta_g^\varepsilon-\Gamma_g}{g_1(\varepsilon)}=\frac{\Gamma_g(g_1(\varepsilon)-1)}{g_1\varepsilon}+\Theta_g^\varepsilon=\Gamma_{1,g}.$$

Виберемо такий нормувальний множник $g_2(\varepsilon)=o(g_1(\varepsilon))$, для якого виконується така умова:

$$\frac{\Gamma_g^\varepsilon-\Gamma_g-g_1(\varepsilon)\Gamma_{1,g}}{g_2(\varepsilon)}=\Gamma_{2,g}.$$

Знайдемо зображення генератора $\Gamma_{2,g}$

$$\frac{\Gamma_g^\varepsilon-\Gamma_g-g_1(\varepsilon)\Gamma_{1,g}}{g_2(\varepsilon)}=\frac{\Gamma_g^\varepsilon-\Gamma_g-\Gamma_g(g_1(\varepsilon)-1)-g_1(\varepsilon)\Theta_g^\varepsilon}{g_2(\varepsilon)}=\frac{g_2(\varepsilon)\Gamma_g+g_2(\varepsilon)\Theta_g^\varepsilon-\Gamma_g-\Gamma_g(g_1(\varepsilon)-1)-g_1(\varepsilon)\Theta_g^\varepsilon}{g_1(\varepsilon)}=$$

$$=\frac{\Gamma_g(g_2(\varepsilon)-1-g_1(\varepsilon)+1+\Theta_g^\varepsilon(g_2(\varepsilon)-g_1(\varepsilon))}{g_2(\varepsilon)}=\frac{\Gamma_g(g_2(\varepsilon)-g_1(\varepsilon))}{g_2(\varepsilon)}+\Theta_g^\varepsilon\frac{g_2(\varepsilon)-g_1(\varepsilon)}{g_2(\varepsilon)}=\Gamma_{2,g}.$$

Отож,

$$\Gamma_g^\varepsilon-\Gamma=g_1(\varepsilon)\Gamma_{1,g}+g_2(\varepsilon)\Gamma_{2,g}+o(g_2(\varepsilon))=\Gamma_g(g_1(\varepsilon)-1)+g_1(\varepsilon)\Theta_g^\varepsilon+\Gamma_g(g_2(\varepsilon)-g_1(\varepsilon))+$$

$$+\Theta_g^\varepsilon(g_2(\varepsilon)-g_1(\varepsilon))=\Gamma_g(g_2(\varepsilon)-1)+\Theta_g^\varepsilon g_2(\varepsilon)+o(g_2(\varepsilon)).$$

Це співвідношення містить доданок $\Theta_g^\varepsilon$. Знайдемо його з розв'язку задачі сингулярного збурення.

Для генератора марковського процесу, нормованого множником $g_2(\varepsilon)$, задача запишеться так:

$$\Gamma^\varepsilon=\Gamma+\Gamma_{1,g}g_2(\varepsilon)$$
$$\varphi^\varepsilon=\varphi+\varphi_1 g_2(\varepsilon).$$

Розв'язок задачі сингулярного збурення набуде вигляду

$$\Gamma^\varepsilon\varphi^\varepsilon=0$$
$$\Gamma\varphi_1+\Gamma\varphi=\psi$$
$$\Gamma_{1,g}\varphi_1=\Theta^\varepsilon.$$

Виразимо $\Theta^\varepsilon$

$$\Gamma^\varepsilon\varphi^\varepsilon=\Gamma\varphi+g_2(\varepsilon)(\Gamma\varphi_1+\Gamma_{1,g}\varphi)+\varphi_1\Gamma_{1,g}g_2^2(\varepsilon)=\Gamma\varphi+g_2(\varepsilon)\psi+\Theta^\varepsilon g_2^2(\varepsilon)=0.$$

Звідси

$$\Theta^\varepsilon=-\frac{\Gamma\varphi}{g_2^2(\varepsilon)}-\frac{\psi}{g_2(\varepsilon)}.$$

**4. Висновки.** Отже, існують нелінійні параметри нормування для генераторів марковських процесів у схемі пуассонової апроксимації та апроксимації Леві.

### Список використаної літератури

1. *Koroliuk V.* Stochastic systems in merging phase space. / V.S. Koroliuk, N. Limnios // Singapore: World Scientific Publishing Company, 2005. — 348 p.
2. *Chernoff H.* Measure of asymptotical efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations / H. Chernoff // Annals of Mathematical Statistics. —- 1952. —- Vol. 23, Number 4. –– P. 493–655.
3. *Feng J.* Large deviation for stochastic processes. / J. Feng, T.G. Kurtz // Mathematical Surveys and Monographs, 131. Providence, RI. AMS, 2006. — 410 p.

*Стаття: надійшла до редколегії 28.12.2015*
*прийнята до друку 08.06.2016*

## ABOUT SELECTION OF A SMALL NORMALIZATION PARAMETER FOR GENERATOR OF RANDOM PROCESS

**Oksana YAROVA**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universytetska str., 1, Lviv, Ukraine*
*e-mail: oksana-yarova@rambler.ru*

Consider the Markov random evolution and their approximation. The main object of study is the generator of random processes with independent increments. These processes are considered in Poisson approximation and approximation of Levi scheme. Generators of random processes are normalized by parameters, which are nonlinear functions. We prove the existence of these parameters.

*Key words:* generator, Markov process, a process with independent increments normalizing factor, Poisson approximation, Levy approximation.