

УДК 513.88

РЕЗОЛЬВЕНТА Й УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ВЛАСНИХ РОЗШИРЕНЬ ЛІНІЙНОГО ВІДНОШЕННЯ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРИ

Ольга ПІГУРА, Олег СТОРОЖ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: info@nuft.edu.ua, storog@ukr.net*

У термінах абстрактних крайових операторів досліджено один клас розширень L_A фіксованого замкненого лінійного відношення L_0 у гільбертовому просторі. Встановлено розмірність многовиду нулів, корозмірність області значень і критерій нормальної розв'язності відношення $L_A - \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Знайдено резольвентну множину та побудовану резольвенту розглядуваного розширення.

Ключові слова: гільбертів простір, лінійне відношення, оператор, резольвента.

1. Вступ. Теорія лінійних відношень (“багатозначних операторів” у гільбертовому просторі) — важливий розділ функціонального аналізу. Її започатковав Р. Аренс [1] і знайшла свій подальший розвиток у працях Е.А. Кодінгтона [2] (самоспряжені розширення нещільно визначених ермітових операторів), А. Дайксми і Г. Сноо [3] (опис самоспряжених розширень симетричного відношення в термінах дефектних просторів), Ф.С. Рофе-Бекетова [4], А.Н. Кочубея [5], В.І. Горбачук і М.Л. Горбачука [6] (застосування теорії лінійних відношень до опису самоспряжених та дисипативних розширень різних класів симетричних операторів) та інших математиків. Протягом останніх двадцяти років зацікавленість до теорії відношень значно посилилася. Це пов'язано, зокрема, з тим, що вона знайшла різноманітні застосування в теорії розширень нещільно визначених операторів, передусім диференціальних (див., наприклад [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14], де розвивається концепція простору граничних значень і відповідної функції Вейля для лінійного відношення, та цитовану там літературу).

2. Позначення та формулювання задачі. Попередні відомості. Під H розуміємо фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)$.

Будь-який (замкнений) лінійний многовид в $H^2 = H \oplus H$ називається (замкненим) лінійним відношенням в H . Прикладом лінійного відношення є графік GrT лінійного оператора T , тому в теорії лінійних відношень оператор ототожнюють з його графіком. Ми використовуємо такі позначення: $D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ — відповідно, область визначення, область значень і многовид нулів відношення (оператора) T :

$$D(T) = \{y \in H | (\exists y' \in H) : (y, y') \in T\}; \quad R(T) = \{y' \in H | (\exists y \in H) : (y, y') \in T\};$$

$$\ker T = \{y \in T : (y, 0) \in T\}; \quad \alpha T = \{(y, \alpha y') : (y, y') \in T\};$$

якщо $\lambda \in \mathbb{C}$, то $T - \lambda = \{(y, y' - \lambda y) : (y, y') \in T\}$ (отож,

$$\ker(T - \lambda) = \{y \in H : (y, 0) \in T - \lambda\} \quad (= \{y \in H : (y, \lambda y) \in T\});$$

$$\widehat{\ker}(T - \lambda) = \{(y, \lambda y) : y \in \ker(T - \lambda)\}; \quad T^{-1} = \{(y', y) \in H^2 : (y, y') \in T\};$$

$$T(0) = \{y' \in H : (0, y') \in T\};$$

для будь-якого лінійного відношення $T \subset H^2$ спряжене (лінійне) відношення T^* визначається так:

$$T^* = H^2 \ominus \widehat{J}T = \widehat{J}(H^2 \ominus T),$$

де

$$\widehat{J} = \begin{pmatrix} 0 & -i1_H \\ i1_H & 0 \end{pmatrix}; \quad (1)$$

$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda) = \{0\}, R(T - \lambda) = H\}$ (резольвентна множина відношення T).

Далі, якщо X, Y – гільбертові простори, то $(\cdot|\cdot)_X$ – символ скалярного добутку на X ; $\mathcal{B}(X, Y)$ – сукупність лінійних неперервних операторів $S : X \rightarrow Y$ таких, що $D(S) = X$; $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$:

- 1_X – тотожне перетворення простору X ;
- $S \downarrow E$ – звуження відображення S на множину E ;
- $\dot{+}, \oplus$ – відповідно символи прямої та ортогональної суми;
- \ominus – символ ортогонального доповнення;
- SE – образ множини E при відображенні S ;
- \overline{E} – замикання множини E .

Роль початкового об'єкта відіграє пара (L, L_0) замкнених лінійних відношень в H таких, що $L_0 \subset L$. Прийmemo $M \stackrel{def}{=} L_0^*$, $M_0 \stackrel{def}{=} L^*$. Відомо [16], що існують гільбертові простори G_1, G_2 та лінійні оператори $\Gamma_i \in \mathcal{B}(L, G_i)$ ($i = 1, 2$) такі, що

$$R(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = G_1 \oplus G_2, \quad \ker(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = L_0 \quad \text{і} \quad \widetilde{\Gamma}_1 \in \mathcal{B}(M, G_2), \quad \widetilde{\Gamma}_2 \in \mathcal{B}(M, G_1)$$

(які визначаються однозначно, виходячи з $G_1, G_2, \Gamma_1, \Gamma_2$) такі, що

$$R(\widetilde{\Gamma}_1 \oplus \widetilde{\Gamma}_2) = G_2 \oplus G_1, \quad \ker(\widetilde{\Gamma}_1 \oplus \widetilde{\Gamma}_2) = M_0,$$

$$\forall \widehat{y} = (y, y') \in L, \quad \forall \widehat{z} = (z, z') \in M \quad (y'|z) - (y|z') = (\Gamma_1 \widehat{y} | \widetilde{\Gamma}_2 \widehat{z})_{G_1} - (\Gamma_2 y | \widetilde{\Gamma}_1 \widehat{z})_{G_2}.$$

При цьому

$$\Gamma_1 \widetilde{\Gamma}_1^* = 0, \quad \Gamma_1 \widetilde{\Gamma}_2^* = i1_{G_1}, \quad \Gamma_2 \widetilde{\Gamma}_1^* = -i1_{G_2}, \quad \Gamma_2 \widetilde{\Gamma}_2^* = 0, \quad (2)$$

де \widehat{J} визначено згідно з (1). Будь-яке замкнене лінійне відношення $L_1(M_1)$ таке, що $L_0 \subset L_1 \subset L$ (відповідно, $M_0 \subset M_1 \subset M$) ми називаємо власним розширенням відношення $L_0(M_0)$.

Нехай F – деякий гільбертів простір такий, що $\dim F = \dim(G_1 \oplus G_2)$. Неважко довести, що для будь-якого власного розширення L_1 відношення L_0 існує $A \in \mathcal{B}(G_1 \oplus G_2, F)$ таке, що $L_1 = \ker A$. Далі писатимемо L_A замість L_1 . Отож

$$L_A = \ker(A_1\Gamma_1 + A_2\Gamma_2) = \{\widehat{y} \in L : A_1\Gamma_1\widehat{y} + A_2\Gamma_2\widehat{y} = 0\}, \quad \text{де } A_i = A \downarrow G_i \ (i = 1, 2).$$

Зрозуміло, що $A_i \in \mathcal{B}(G_i, F)$.

Далі припускаємо, що резольвентна множина $\rho(L_2)$ відношення $L_2 \stackrel{def}{=} \ker \Gamma_2$ непорожня. Нехай $\lambda \in \rho(L_2)$, а отже, $\bar{\lambda} \in \rho(M_2)$, де $M_2 \stackrel{def}{=} \ker \widetilde{\Gamma}_2 (= L_2^*)$. Тоді

$$L_\lambda \stackrel{def}{=} (L_2 - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H), \quad M_{\bar{\lambda}} \stackrel{def}{=} (M_2 - \bar{\lambda}^{-1}) (= L_\lambda^*) \in \mathcal{B}(H).$$

В термінах абстрактних граничних операторів, тобто у вигляді, який у випадку диференціальних операторів приводить безпосередньо до крайових умов, встановлено розмірність многовиду нулів, корозмірність області значень і критерій нормальної розв'язності відношення $L_A - \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Зокрема, з'ясовано, коли це відношення є розв'язним, тобто, коли $\ker(L_A - \lambda) = \{0\}$, $R(A - \lambda) = H$. У цьому випадку побудовано резольвенту відношення L_A . Окрему увагу приділено випадку, коли A є нормально розв'язним оператором.

3. Допоміжні оператор-функції. Нехай $\lambda \in \rho(L_2)$. Прийmemo

$$\forall y \in H \ \widehat{L}_\lambda y = (L_\lambda y, y + \lambda L_\lambda y), \quad \text{і} \quad \forall z \in H \ \widehat{M}_{\bar{\lambda}} z = (M_{\bar{\lambda}} z, z + \bar{\lambda} M_{\bar{\lambda}} z).$$

Лема 1.

$$R(\widehat{L}_\lambda) = L_2, \quad R(\widehat{M}_{\bar{\lambda}}) = M_2. \quad (3)$$

Доведення. Зрозуміло, що $\widehat{L}_\lambda \in \mathcal{B}(H, H^2)$. Далі $Gr L_\lambda = \{(y, L_\lambda y) : y \in H\}$, тому $L_2 - \lambda = \{(L_\lambda y, y) : y \in H\}$, а отже, $L_2 = \{(L_\lambda y, y + L_\lambda y) : y \in H\} = R(\widehat{L}_\lambda)$. Першу з рівностей (3) доведено. Другу доводимо аналогічно. \square

Наслідок 1. $\forall y \in H \ \Gamma_2 \widehat{L}_\lambda y = 0, \quad \forall z \in H \ \widetilde{\Gamma}_2 \widehat{M}_{\bar{\lambda}} z = 0.$

Прийmemo $Z_\lambda \stackrel{def}{=} (\widetilde{\Gamma}_1 \widehat{M}_{\bar{\lambda}})^*$, $\widetilde{Z}_{\bar{\lambda}} \stackrel{def}{=} (\Gamma_1 \widehat{L}_\lambda)^*$.

Лема 2.

$$Z_\lambda \in \mathcal{B}(G_2, H), \quad Z_\lambda = (L_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2) + \pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^*, \quad (4)$$

$$\widetilde{Z}_{\bar{\lambda}} \in \mathcal{B}(G_1, H), \quad \widetilde{Z}_{\bar{\lambda}} = (M_{\bar{\lambda}}(\pi_1 + \lambda\pi_2) + \pi_2)\Gamma_1^*, \quad (5)$$

де $\pi_1 : H^2 \rightarrow H \oplus \{0\}$, $\pi_2 : H^2 \rightarrow \{0\} \oplus H$ – ортопроектори.

Доведення. Оскільки $\widehat{M}_{\bar{\lambda}} \in \mathcal{B}(H, H^2)$ і $R(\widehat{M}_{\bar{\lambda}}) = M_2 \subset M$, то $\widehat{M}_{\bar{\lambda}} \in \mathcal{B}(H, M)$; оскільки $\widetilde{\Gamma}_1 \in \mathcal{B}(H, G_2)$, то $\widetilde{\Gamma}_1 \widehat{M}_{\bar{\lambda}} \in \mathcal{B}(H, G_2)$. Тому $Z_\lambda \in \mathcal{B}(G_2, H)$.

Далі, $\forall a \in G_2, \forall z \in H$

$$\begin{aligned} (z|Z_\lambda a) &= (\widetilde{\Gamma}_1 \widehat{M}_{\bar{\lambda}} z|a)_{G_2} = (\widehat{M}_{\bar{\lambda}} z|\widetilde{\Gamma}_1^* a) = ((M_{\bar{\lambda}} z, z + \bar{\lambda} M_{\bar{\lambda}} z)|(\pi_1 \widetilde{\Gamma}_1^* a, \pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a))_{H^2} = \\ &= (M_{\bar{\lambda}} z|\pi_1 \widetilde{\Gamma}_1^* a) + (z|\pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a) + (\bar{\lambda} M_{\bar{\lambda}} z|\pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a) = (z|L_\lambda \pi_1 \widetilde{\Gamma}_1^* a) + (z|\pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a) + (z|\lambda L_\lambda \pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* a) = \end{aligned}$$

$$= (z|(L_\lambda \pi_1 + \pi_2 + \lambda L_\lambda \pi_2)) \tilde{\Gamma}_1^* a.$$

Отже, (4) доведено, (5) доводимо аналогічно. \square

Позначення: $\forall a \in G_2 \quad \widehat{Z}_\lambda a \stackrel{def}{=} (Z_\lambda a, \lambda Z_\lambda a).$

Лема 3. $R(\widehat{Z}_\lambda) \subset L$ і $\Gamma_2 \widehat{Z}_\lambda = 1_G.$

Доведення.

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_\lambda &= (Z_\lambda, \lambda Z_\lambda) = (L_\lambda(\pi_1 + \lambda \pi_2) \tilde{\Gamma}_1^* + \pi_2 \tilde{\Gamma}_1^*, \lambda(L_\lambda(\pi_1 + \lambda \pi_2) \tilde{\Gamma}_1^* + \pi_2 \tilde{\Gamma}_1^*)) = \\ &= (L_\lambda(\pi_1 + \lambda \pi_2) \tilde{\Gamma}_1^*, \lambda L_\lambda(\pi_1 + \lambda \pi_2) \tilde{\Gamma}_1^* + (\pi_1 + \lambda \pi_2) \tilde{\Gamma}_1^*) + (\pi_2 \tilde{\Gamma}_1^*, -\pi_1 \tilde{\Gamma}_1^*) = \\ &\quad \widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda \pi_2) \tilde{\Gamma}_1^* + i \widehat{J} \tilde{\Gamma}_1^*, \end{aligned}$$

де \widehat{J} визначено згідно з (1). Але

$$\forall a \in G_2 \quad \widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda \pi_2) \tilde{\Gamma}_1^* a \subset L_2 \subset L$$

(див. лему 1), $\tilde{\Gamma}_1^* a \in M \ominus M_0$, тому (див. [17]) $i \widehat{J} \tilde{\Gamma}_1^* a \in L \ominus L_0 \subset L$. Звідси випливає, що $\widehat{Z}_\lambda a \in L$. Далі, враховуючи (2) і Наслідок 1, бачимо, що

$$\forall a \in G_2 \quad \Gamma_2 \widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda \pi_2) \tilde{\Gamma}_1^* a = 0, \Gamma_2(i \widehat{J} \tilde{\Gamma}_1^* a) = a,$$

тому $\Gamma_2 \widehat{Z}_\lambda a = a.$ \square

Лема 4.

$$\widehat{Z}_\lambda \Gamma_2 \downarrow \widehat{\ker}(L - \lambda) = 1_{\widehat{\ker}(L - \lambda)}, \quad (6)$$

$$R(Z_\lambda) = \ker(L - \lambda) \quad (7)$$

Доведення. Нехай $y \in \ker(L - \lambda)$, $x \in H$. Застосовуючи рівність

$$(y'|z) - (y|z') = (\Gamma_1 \widehat{y} | \widetilde{\Gamma}_2 z)_{G_1} - (\Gamma_2 y | \widetilde{\Gamma}_1 z)_{G_2}$$

при $\widehat{y} = (y, \lambda y) \in \widehat{\ker}(L - \lambda)$, $z = M_{\bar{\lambda}} x$, отримуємо (враховуючи наслідок 1)

$$\begin{aligned} Z_\lambda \Gamma_2 \widehat{y} | x) &= (\Gamma_2 \widehat{y} | \widetilde{\Gamma}_1 \widehat{M}_{\bar{\lambda}} x) = -[(\Gamma_1 \widehat{y} | \widetilde{\Gamma}_2 \widehat{M}_{\bar{\lambda}} x)_{G_1} - (\Gamma_2 \widehat{y} | \widetilde{\Gamma}_1 \widehat{M}_{\bar{\lambda}} x)_{G_2}] = \\ &= -[(\lambda y | M_{\bar{\lambda}} x) - (y | x) + \bar{\lambda} M_{\bar{\lambda}} x] = (y | x). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що для будь-якого $y \in \ker(L - \lambda)$ $Z_\lambda \Gamma_2(y, \lambda y) = y$, а тому

- 1) $\widehat{Z}_\lambda \Gamma_2(y, \lambda y) = (y, \lambda y)$, тобто справджується (6);
- 2) $\ker(L - \lambda) \subset R(Z_\lambda)$.

Крім того, з леми 2 випливає, що для всякого $a \in G_2$ $(Z_\lambda a, \lambda Z_\lambda a) \in L$, тобто $Z_\lambda a \in \ker(L - \lambda)$. Іншими словами, $R(Z_\lambda) \subset \ker(L - \lambda)$. Рівність (7), а з нею і лему 4, доведено. \square

Прийmemo $M(\lambda) \stackrel{def}{=} \Gamma_1 \widehat{Z}_\lambda.$

Зауваження 1.

$$M(\lambda) = \Gamma_1 \widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda \pi_2) \tilde{\Gamma}_1^*. \quad (8)$$

Справді, $\widehat{Z}_\lambda = \widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widehat{\Gamma}_1^* + i\widehat{J}\widehat{\Gamma}_1^*$ (див доведення леми 3), тому

$$M(\lambda) = \Gamma_1\widehat{Z}_\lambda = \Gamma_1\widehat{L}_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widehat{\Gamma}_1^* + i\Gamma_1\widehat{J}\widehat{\Gamma}_1^*.$$

Оскільки, з огляду на (2), $\Gamma_1\widehat{J}\widehat{\Gamma}_1^* = 0$, то (8) доведено.

Лема 5.

$$D(L_2) + \ker(L - \lambda) = D(L). \quad (9)$$

Доведення. Включення $D(L_2) + \ker(L - \lambda) \subset D(L)$ є очевидним. Навпаки, нехай $y \in D(L)$. Тоді існує $y' \in H$ таке, що $(y, y' - \lambda y) \in L - \lambda$. Але $H = R(L_2 - \lambda)$, тому існує $u \in D(L_2)$ таке, що $(u, y' - \lambda y) \in L_2 - \lambda \subset L - \lambda$. Тому $(y - u, 0) \in L - \lambda$, тобто $y - u \in \ker(L - \lambda)$. Отже, $y = u + (y - u) \in D(L_2) + \ker(L - \lambda)$. \square

Зауваження 2. Сума (9), загалом, не є прямою. Точніше

$$D(L_2) \cap \ker(L - \lambda) = \{0\} \iff L_2(0) = L(0).$$

Доведення. (\Rightarrow) Нехай $v \in L(0) = (L - \lambda)(0)$. Тоді $(0; v) \in L - \lambda$. Далі, оскільки $R(L_2 - \lambda) = H$, то існує $u \in D(L_2 - \lambda) = D(L_2)$ таке, що $(u, v) \in L_2 - \lambda \subset L - \lambda$. Звідси випливає, що $(u, 0) = (u, v) - (0, v) \in L - \lambda$, тобто $u \in \ker(L - \lambda)$. Отже, $u \in \ker(L - \lambda) \cap D(L_2)$, тобто $u = 0$. А це означає, що $(0, v) \in L - \lambda$. Отже, $v \in (L_2 - \lambda)(0) = L_2(0)$.

(\Leftarrow) Нехай $u \in D(L_2) \cap \ker(L - \lambda)$. Це означає:

- 1) $(\exists v \in H) : (u, v) \in L_2 \subset L$;
- 2) $(u, \lambda u) \in T$.

Маємо: $(0, v - \lambda u) \in L \Rightarrow v - \lambda u \in L(0) = L_2(0) \Rightarrow (0, v - \lambda u) \in S \Rightarrow (u, \lambda u) = (u, v) - (0, v - \lambda u) \in S \Rightarrow u \in \ker(S - \lambda) \Rightarrow u = 0$. \square

Лема 6. $L_2 + \widehat{\ker}(L - \lambda) = L$.

Доведення. а) $L_2 \cap \widehat{\ker}(L - \lambda) = \{0\}$. Нехай $(y, y') \in L_2 \cap \widehat{\ker}(L - \lambda)$, зокрема існує $a \in G_2$ таке, що $(y, y') = (Z_\lambda a, \lambda Z_\lambda a)$ (див. (7)), а отже, $(y, y' - \lambda y) = (y, 0) \in L_2 - \lambda$, або, що еквівалентно, $y \in \ker(L_2 - \lambda)$. Але $\ker(L_2 - \lambda) = 0$, тому $(y, y') = (0, 0)$.

б) $L_2 + \widehat{\ker}(L - \lambda) = L$. Включення $L_2 + \widehat{\ker}(L - \lambda) \subset L$ очевидне. Протилежне включення випливає з того, що $(\forall \widehat{y} \in L) \widehat{y} = (\widehat{y} - \widehat{Z}_\lambda \Gamma_2 y) + \widehat{Z}_\lambda \Gamma_2 y$ і лем 3, 4. \square

Лема 7. а) $L_0 \cap \widehat{\ker}(L - \lambda) = \{0\}$;

б) $L_0 + \widehat{\ker}(L - \lambda) \subset \ker(\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2)$

Доведення. а) Правильність цього твердження випливає з леми 6.

б) Якщо $\widehat{y} = (y, y') \in L_0$, то $\Gamma_1 \widehat{y} = \Gamma_2 \widehat{y} = 0$, а отже, $\Gamma_1 \widehat{y} = M(\lambda)\Gamma_2 \widehat{y}$. Якщо $\widehat{y} \in \widehat{\ker}(L - \lambda)$, то, з огляду на леми 3, 4, існує $a \in G_2$ таке, що $y = \widehat{Z}_\lambda a$, а отже $\Gamma_1 \widehat{y} - M(\lambda)\Gamma_2 \widehat{y} = \Gamma_1 \widehat{Z}_\lambda a - M(\lambda)\Gamma_2 \widehat{Z}_\lambda a = M(\lambda)a = M(\lambda)a = 0$. \square

Наслідок 2. $L_0 + \widehat{\ker}(L - \lambda) = \ker(\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2)$.

Доведення. Нехай $\hat{y} \in \widehat{\ker}(\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2)$. З огляду на леми 4, 6, $\hat{y} \in L = L_2 \dot{+} \widehat{\ker}(L - \lambda)$ і існують $\hat{u} \in L_2, a \in G_2$ такі, що $\hat{y} = \hat{u} + \hat{Z}_\lambda a$, а отже, $(\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2)(\hat{u} + \hat{Z}_\lambda a) = 0$. Отож,

$$0 = \Gamma_1 \hat{u} + \Gamma_1 Z_\lambda a - M(\lambda)\Gamma_2 \hat{u} - M(\lambda)\Gamma_2 Z_\lambda a = \Gamma_1 \hat{u}.$$

Оскільки $\Gamma_2 \hat{u} = 0$, то $\hat{u} \in L_0$. \square

Зауваження 3. Міняючи ролями пари (L, L_0) та (M, M_0) , аналогічно доводимо, що:

$$\text{якщо } \widetilde{Z}_\lambda \stackrel{def}{=} (\widetilde{Z}_\lambda, \bar{\lambda}\widetilde{Z}_\lambda), \text{ то } R(\widetilde{Z}_\lambda) = \widehat{\ker}(M - \bar{\lambda}), \quad \widetilde{\Gamma}_2 \widetilde{Z}_\lambda = 1_{G_1},$$

$$\widetilde{Z}_\lambda \widetilde{\Gamma}_2 \downarrow \widehat{\ker}(M - \bar{\lambda}) = 1_{\widehat{\ker}(M - \bar{\lambda})};$$

$$\text{якщо } \widetilde{M}(\bar{\lambda}) \stackrel{def}{=} \widetilde{\Gamma}_1 \widetilde{Z}_\lambda, \text{ то } \widetilde{M}(\bar{\lambda}) \in \mathcal{B}(G_1, G_2), \quad \widetilde{M}(\bar{\lambda}) = \widetilde{\Gamma}_1 \widetilde{M}_\lambda (\pi_1 + \bar{\lambda}\pi_2)\Gamma_1^*,$$

$$M_0 \dot{+} \widehat{\ker}(M - \bar{\lambda}) = \ker(\widetilde{\Gamma}_1 - \widetilde{M}(\bar{\lambda})\widetilde{\Gamma}_2).$$

Крім того, $\forall \lambda \in \rho(L_2) \quad M(\lambda)^* = \widetilde{M}(\bar{\lambda})$.

Справді, для будь-яких $a \in G_1, b \in G_2$

$$\begin{aligned} (\widetilde{M}(\bar{\lambda})a|b)_{G_2} &= (\widetilde{\Gamma}_1 \widetilde{Z}_\lambda a|b)_{G_2} = (\widetilde{Z}_\lambda a|\widetilde{\Gamma}_1^* b)_{H^2} = ((\widetilde{Z}_\lambda a, \bar{\lambda}\widetilde{Z}_\lambda a)|(\pi_1 \widetilde{\Gamma}_1^* b, \pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* b))_{H^2} = \\ &= (\widetilde{Z}_\lambda a|\pi_1 \widetilde{\Gamma}_1^* b) + (\bar{\lambda}\widetilde{Z}_\lambda a|\pi_2 \widetilde{\Gamma}_1^* b) = (\widetilde{Z}_\lambda a|(\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* b) = \\ &= (a|\Gamma_1 \widehat{L}_\lambda (\pi_1 + \lambda\pi_2)\widetilde{\Gamma}_1^* b)_{G_1} = (a|M(\lambda)b)_{G_1}. \end{aligned}$$

4. Основний результат.

Лема 8. *Припустимо, що $\lambda \in \rho(L_2)$. У цьому випадку:*

а) *елемент $f \in H$ належить до $R(L_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли*

$$A_1 \widetilde{Z}_\lambda^* f \in R(A_1 M(\lambda) + A_2); \quad (10)$$

$$\text{б) } \ker(L_A - \lambda) = Z_\lambda \ker(A_1 M(\lambda) + A_2). \quad (11)$$

Доведення. Нехай $f \in H$. Оскільки $R(L_2 - \lambda) = H$, то $f \in R(L_2 - \lambda)$, а отже, $(L_\lambda f, f) \in L_2 - \lambda \subset L - \lambda$. Припустимо, що для деякого $y \in H \quad (y, f) \subset L - \lambda$. Тоді $(y - L_\lambda f, 0) \in L - \lambda$, а отже, існує $a \in G_2$ таке, що

$$y = L_\lambda f + Z_\lambda a. \quad (12)$$

Маємо

$$\begin{aligned} f \in R(L_A - \lambda) &\Leftrightarrow (y, f) \in L_A - \lambda \Leftrightarrow (y, f + \lambda y) \in L_A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (L_\lambda f + Z_\lambda a, f + \lambda L_\lambda f + \lambda Z_\lambda a) \in L_A \Leftrightarrow \widehat{L}_\lambda f + \widehat{Z}_\lambda a \in \ker(A_1 \Gamma_1 + A_2 \Gamma_2) \Leftrightarrow \\ A_1 \Gamma_1 (\widehat{L}_\lambda f + \widehat{Z}_\lambda a) + A_2 \Gamma_2 (\widehat{L}_\lambda f + \widehat{Z}_\lambda a) &\equiv A_1 \Gamma_1 \widehat{L}_\lambda f + A_1 \Gamma_1 \widehat{Z}_\lambda a + A_2 \Gamma_2 \widehat{L}_\lambda f + A_2 \Gamma_2 \widehat{Z}_\lambda a = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A_1 \widetilde{Z}_\lambda^* f + A_1 M(\lambda)a + A_2 a = 0. \end{aligned}$$

Останню рівність можна переписати так:

$$(A_1 M(\lambda) + A_2)a = -A_1 \widetilde{Z}_\lambda^* f. \quad (13)$$

Отже, $f \in R(L_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли існує $a \in G_2$ таке, що справджується (13), тобто, коли виконується (10). Повторюючи ці міркування при $f = 0$, бачимо, що справджується (11). \square

Прийmemo $A_\lambda \stackrel{def}{=} A_1 M(\lambda) + A_2$.

Зауваження 4. Нехай $\lambda \in \rho(L_2)$. Тоді

а) $\ker \tilde{Z}_\lambda = 0$;

б) $\ker(\tilde{Z}_\lambda^* \downarrow \ker(M - \bar{\lambda})) = \{0\}$;

в) $R(\Gamma_1 \hat{L}_\lambda) \equiv R(\tilde{Z}_\lambda^*) = G_1$; (14)

г) $\Gamma_1 \hat{L}_\lambda \downarrow R(L_0 - \lambda) \equiv \tilde{Z}_\lambda^* \downarrow R(L_0 - \lambda) = 0$. (15)

Доведення. а) $\tilde{Z}_\lambda a = 0 \Rightarrow \hat{Z}_\lambda^* a = 0 \Rightarrow a = \hat{\Gamma}_2 \hat{Z}_\lambda^* a = 0$.

б) Нехай $u \in \ker(M - \bar{\lambda})$, $\tilde{Z}_\lambda u = 0$. Оскільки $\ker(M - \lambda) = R(\tilde{Z}_\lambda)$, то існує $a \in G_1$ таке, що $\tilde{Z}_\lambda a = u$. Маємо $0 = \tilde{Z}_\lambda^* u = \tilde{Z}_\lambda^* \tilde{Z}_\lambda a$, тому $Z_\lambda a = u = 0$.

в) Оскільки $R(\hat{L}_\lambda) = L_2 = \ker \Gamma_2$, то достатньо довести, що $R(\Gamma_1 \downarrow \ker \Gamma_2) = G_1$. А це sghfdls так, тому що $R(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = R(\Gamma_1) \oplus R(\Gamma_2)$, а отже, $R(\Gamma_1 \downarrow \ker \Gamma_2) = R(\Gamma_1) = G_1$.

г) Нехай $v \in R(L_0 - \lambda)$. Існує $u \in H$ таке, що $(u, v) \in L_0 - \lambda \subset L_2 - \lambda$. Маємо $\hat{L}_\lambda v = (L_\lambda v, v + \lambda L_\lambda v) = (u, v + \lambda u)$. Але $(u, v) \in L_0 - \lambda$, тому $(u, v + \lambda u) \in L_0$, отже, $\Gamma_1 \hat{L}_\lambda v = 0$. \square

Наслідок 3. Існує гомеоморфізм $\Pi_\lambda \in \mathcal{B}(G_1, \ker(M - \bar{\lambda}))$ такий, що

$$R(L_A - \lambda) = R(L_0 - \lambda) \oplus \Pi_\lambda(A_1^{-1}R(A_\lambda)). \quad (16)$$

Доведення. Легко бачити, що $R(L_0 - \lambda)$ — замкнений многовид, а отже

$$H = R(L_0 - \lambda) \oplus \ker(M - \bar{\lambda}).$$

Звідси, а також з (14) і (15) випливає, що $R(\tilde{Z}_\lambda^* \downarrow \ker(M - \bar{\lambda})) = R(\tilde{Z}_\lambda^*) = G_1$.

Тому $(\tilde{Z}_\lambda^* \downarrow \ker(M - \bar{\lambda})) \in \mathcal{B}(\ker(M - \bar{\lambda}), G_1)$ — гомеоморфізм, а отже

$$\Pi_\lambda \stackrel{def}{=} (\tilde{Z}_\lambda^* \downarrow \ker(M - \bar{\lambda}))^{-1} \in \mathcal{B}(G_1, \ker(M - \bar{\lambda}))$$

— гомеоморфізм $G_1 \rightarrow \ker(M - \bar{\lambda})$.

Далі $f \in R(L_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли існують $f_0 \in R(L_0 - \lambda)$ і

$$f_1 \in R(L_A - \lambda) \cap \ker(M - \bar{\lambda})$$

такі, що $f = f_0 + f_1$. З іншого боку, враховуючи (10) і (15), бачимо, що

$$\begin{aligned} f \in R(L_A - \lambda) &\Leftrightarrow \tilde{Z}_\lambda^* f \in A_1^{-1}R(A_\lambda) \Leftrightarrow \tilde{Z}_\lambda^* f_0 + \tilde{Z}_\lambda^* f_1 \in A_1^{-1}R(A_\lambda) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\tilde{Z}_\lambda^* \downarrow \ker(M - \bar{\lambda}))f_1 \in A_1^{-1}R(A_\lambda) \Leftrightarrow f_1 \in \Pi_\lambda(A_1^{-1}R(A_\lambda)). \end{aligned}$$

Рівність (16) доведено. \square

Теорема 1. Нехай $\lambda \in \rho(L_2)$. Тоді:

а) $\dim \ker(L_A - \lambda) = \dim \ker A_\lambda$; (17)

б) $\dim[H/R(L_A - \lambda)] = \dim[R(A_1)/(R(A_1) \cap R(A_\lambda))]$; (18)

в) $R(L_A - \lambda)$ замкнений в H тоді і тільки тоді, коли $A_1^{-1}R(A_\lambda)$ замкнений в G_1 ;

г) $\lambda \in \rho(L_A)$ тоді і тільки тоді, коли $\ker A_\lambda = \{0\}$, $R(A_1) \subset R(A_\lambda)$, тобто, коли $A_\lambda^{-1}A_1 \in \mathcal{B}(G_1, G_2)$.

У цьому випадку

$$(L_A - \lambda)^{-1} = L_\lambda - Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \tilde{Z}_\lambda^*. \quad (19)$$

Доведення. а) Рівність (17) випливає з (11) і неперервної оборотності оператора Z_λ .

б) Нехай $\ker(M - \bar{\lambda}) = \Pi_\lambda(A_1^{-1}R(A_\lambda)) \dot{+} \mathcal{L}_1$, тобто

$$\Pi_\lambda G_1 = \Pi_\lambda(A_1^{-1}R(A_\lambda)) \dot{+} \Pi_\lambda(\Pi_\lambda^{-1}\mathcal{L}_1),$$

або, що є рівносильним,

$$G_1 = A_1^{-1}R(A_\lambda) \dot{+} \Pi_\lambda^{-1}\mathcal{L}_1. \quad (20)$$

З іншого боку, враховуючи (16), отримуємо

$$H = R(L_0 - \lambda) \dot{+} \ker(M - \bar{\lambda}) = R(L_0 - \lambda) \dot{+} \Pi_\lambda(A_1^{-1}R(A_\lambda)) \dot{+} \mathcal{L}_1 = R(L_A - \lambda) \dot{+} \mathcal{L}_1,$$

а отже (див. (20))

$$\dim[H/R(L_A - \lambda)] = \dim \mathcal{L}_1 = \dim \Pi_\lambda^{-1}\mathcal{L}_1 = \dim[G_1/A_1^{-1}R(A_\lambda)].$$

Але $A_1^{-1}R(A_\lambda) = A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda))$, тому рівність (18) рівносильна такій:

$$\dim[G_1/A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda))] = \dim[R(A_1)/(R(A_1) \cap R(A_\lambda))].$$

Доведемо іі. Нехай

$$G_1 = A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda)) \dot{+} \mathcal{L},$$

а отже,

$$R(A_1) = (R(A_1) \cap R(A_\lambda)) \dot{+} A_1\mathcal{L}.$$

Крім того, якщо $l \in \mathcal{L}$ і $A_1 l = 0$, то $l \in A_1^{-1}(\{0\}) \subset A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda))$. Отож, $l \in A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda)) \cap \mathcal{L} = 0$. Тому $\dim \mathcal{L} = \dim A_1\mathcal{L}$, а отже,

$$\dim[G_1/A_1^{-1}(R(A_1) \cap R(A_\lambda))] = \dim \mathcal{L} = \dim A_1\mathcal{L} = \dim[R(A_1)/(R(A_1) \cap R(A_\lambda))].$$

Твердження б) доведено.

в) Правильність цього твердження безпосередньо випливає з (16).

г) З (17), (18) випливає, що

$$\ker(L_A - \lambda) = \{0\} \Leftrightarrow \ker A_\lambda = \{0\} \quad (21)$$

$$R(L_A - \lambda) = H \Leftrightarrow R(A_1) \subset R(A_\lambda). \quad (22)$$

Враховуючи (21), (22) і застосовуючи теорему про замкнений графік (див. [15, с. 211]), бачимо, що

$$(L_A - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H) \Leftrightarrow A_\lambda^{-1}A_1 \in \mathcal{B}(G_1, G_2).$$

Припустимо, що умови (21), (22) справджуються. Знайдемо резольвенту оператора L_A , тобто розв'яжемо таку задачу:

нехай $f \in R(L_A - \lambda)$ ($= H$); знайти $y \in H$ таке, що $(y, f) \in L_A - \lambda$.

Для цього повторимо міркування, використані для доведення лема 8. Отримуємо $(y, f) \in L - \lambda$ тоді і тільки тоді, коли існує $a \in G_2$ таке, що $y = L_\lambda f + Z_\lambda a$ (див.

(12)); при цьому $f \in R(L_A - \lambda)$ тоді і тільки тоді, коли $A_\lambda a = -A_1 \tilde{Z}_\lambda^* f$ (див. (13)). Підставляючи (13) в (12), бачимо, що

$$(L_A - \lambda)^{-1} f = y = L_\lambda f - Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \tilde{Z}_\lambda^* f.$$

Рівність (19) доведено. \square

Далі скрізь під $\mathcal{B}_\infty(X_1, X_2)$, де X_1, X_2 — гільбертові простори, розуміємо множину компактних операторів з $\mathcal{B}(X_1, X_2)$, а $\mathcal{B}_\infty(H) \stackrel{def}{=} \mathcal{B}_\infty(H, H)$.

Наслідок 4. *В умовах теореми 1*

$$(L_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H) \Leftrightarrow A_\lambda^{-1} A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2).$$

Доведення. (\Rightarrow) Нехай $\lambda \in \rho(L_2) \cap \rho(L_A)$ і $(L_A - \lambda)^{-1} L_\lambda \equiv -Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \tilde{Z}_\lambda^* \in \mathcal{B}_\infty(H)$.
Тоді

$$Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \tilde{Z}_\lambda^* \downarrow \ker(M - \lambda) \in \mathcal{B}_\infty(\ker(M - \bar{\lambda}), H),$$

а отже,

$$Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \tilde{Z}_\lambda^* \Pi_\lambda = Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, H).$$

Оскільки, $\ker Z_\lambda = \{0\}$, а $R(Z_\lambda) = \ker(L - \lambda)$, то $Z_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(\ker(L - \lambda), G_2)$, тому

$$A_\lambda^{-1} A_1 = Z_\lambda^{-1} Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2).$$

(\Leftarrow) Оскільки $Z_\lambda \in \mathcal{B}(G_2, H)$, $A_\lambda^{-1} A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2)$, $\tilde{Z}_\lambda^* \in \mathcal{B}(H, G_1)$, то з (19) випливає, що $(L_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H)$. \square

5. Випадок, коли $R(A)$ — замкнений підпростір. У цьому випадку твердження, висловлені в теоремі 1 та наслідку 4, допускають деякі уточнення. Далі скрізь вважаємо, що L_A — відношення описане в п. 1, причому $R(A) = \overline{R(A)} \stackrel{def}{=} F_1$ (це припущення не зменшує загальності).

Лема 9.

$$L_A^* = \{\hat{z} \in M \mid \exists h \in F_1 : \tilde{\Gamma}_1 \hat{z} = A_1^* h, \tilde{\Gamma}_2 \hat{z} = -A_1^* h\}. \quad (23)$$

Доведення. У праці [16] доведено, що існує $B \in \mathcal{B}(G_2 \oplus G_1, F \ominus F_1)$ такий, що

$$L_A^* = \ker B \tilde{\Gamma} = \{z \in M : B \tilde{\Gamma} z = 0\} \stackrel{def}{=} M_B.$$

Більше того, $M_B = L_A^* \Leftrightarrow \ker A = J^* \overline{R(B^*)}$, де

$$J = \begin{pmatrix} 0 & i1_{G_2} \\ -i1_{G_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Міняючи ролями A та B і враховуючи нормальну розв'язність оператора A (а отже, і оператора A^* — див. [15, с. 295]), бачимо, що $L_A^* = M_B \Leftrightarrow \ker B = JR(A^*)$.

Але права частина рівності (23) — це $\{\hat{z} \in M : \tilde{\Gamma} \hat{z} \in JR(A^*)\}$, в той час, як $M_B = \{z \in M : \tilde{\Gamma} \hat{z} \in \ker B\}$. Лему доведено. \square

Лема 10. *Нехай $\lambda \in \rho(L_2)$. Існує гомеоморфізм $\tilde{\Pi}_\lambda \in \mathcal{B}(G_2, \ker(L - \lambda))$ такий, що*

$$R(L_A^* - \bar{\lambda}) = R(M_0 - \bar{\lambda}) \oplus \tilde{\Pi}_\lambda R(A_\lambda^*). \quad (24)$$

Доведення. Міркуючи так, як при доведенні зауваження 4, бачимо, що

$$\ker(Z_\lambda^* \downarrow \ker(L - \lambda)) = \{0\}, R(Z_\lambda^* \downarrow \ker(L - \lambda)) = G_2.$$

Тому $\tilde{\Pi}_\lambda^{def} = (Z_\lambda^* \downarrow \ker(L - \lambda))^{-1} \in \mathcal{B}(G_2, \ker(L - \lambda))$ — гомеоморфізм $G_2 \rightarrow \ker(L - \lambda)$.

Враховуючи лему 1, зауваження 3 та лему 9, отримуємо:

$$M - \bar{\lambda} = \{(M_\lambda f + \tilde{Z}_\lambda a, f) : f \in H, a \in G_1\}, \quad (25)$$

$\widehat{M}_\lambda f + \widehat{\tilde{Z}}_\lambda a \in L_A^*$ тоді і тільки тоді, коли існує $h \in F_1$ таке, що

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_1 \widehat{M}_\lambda f + \tilde{\Gamma}_1 \widehat{\tilde{Z}}_\lambda a = A_2^* h \\ \tilde{\Gamma}_2 \widehat{M}_\lambda f + \tilde{\Gamma}_1 \widehat{\tilde{Z}}_\lambda a = -A_1^* h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_\lambda^* f + \widetilde{M}(\bar{\lambda})a = A_2^* h \\ a = -A_1^* h \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Z_\lambda^* f = (M(\lambda)^* A_1^* + A_2^*)h \equiv A_\lambda^* h.$$

Отже, (див. (25)), $f \in R(L_A^* - \bar{\lambda})$ тоді і тільки тоді, коли існує $h \in F_1$ таке, що $Z_\lambda^* f = A_\lambda^* h$, тобто, коли $Z_\lambda^* f \in R(A_\lambda^*)$ (пор. з (10)). Зокрема,

$$f \in R(L_A^* - \bar{\lambda}) \cap [H \ominus R(M_0 - \bar{\lambda})] = R(L_A^* - \bar{\lambda}) \cap \ker(L - \lambda)$$

тоді і тільки тоді, коли $(Z_\lambda^* \downarrow \ker(L - \lambda))f \in R(A_\lambda^*)$, тобто, коли $f \in \tilde{\Pi}_\lambda R(A_\lambda^*)$. Лему доведено. \square

Наслідок 5.

$$\ker(L_A^* - \bar{\lambda}) = \tilde{Z}_\lambda A_1^* \ker A_\lambda^*. \quad (26)$$

Доведення. Для того, щоб переконатися у правильності (26), достатньо повторити міркування, використані в процесі доведення леми 10, при $f = 0$. \square

Теорема 2. Нехай $R(A) = F_1$, $\lambda \in \rho(L_2)$. Тоді

$$\text{а) } \dim \ker(L_A^* - \bar{\lambda}) = \dim \ker A_\lambda^*; \quad (27)$$

$$\text{б) } \dim[H/R(L_A^* - \bar{\lambda})] = \dim[G_2/R(A_\lambda^*)]; \quad (28)$$

в) $R(L_A - \lambda)$ замкнений в H тоді і тільки тоді, коли $R(A_\lambda)$ замкнений у F_1 .
У цьому випадку

$$\dim[H \ominus R(L_A - \lambda)] = \dim[F_1 \ominus R(A_\lambda)], \quad (29)$$

$$\dim[H \ominus R(L_A^* - \bar{\lambda})] = \dim[G_1 \ominus R(A_\lambda^*)]; \quad (30)$$

г) $\lambda \in \rho(L_A)$ тоді і тільки тоді, коли $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(F_1, G_2)$. У цьому випадку

$$(L_A - \lambda)^{-1} L_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H) \Leftrightarrow A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, F_1).$$

Доведення. а) Зрозуміло, що $R(A_1) + R(A_\lambda) = R(A) \equiv F_1$, тому (див. [15, с. 279]) $\ker A_1^* \cap \ker A_\lambda^* = 0$. Звідси, з (26) та з оборотності оператора \tilde{Z}_λ випливає (27).

б) Нехай

$$\ker(L - \lambda)^{-1} = \tilde{\Pi}_\lambda R(A_\lambda^*) \dot{+} \mathcal{L}. \quad (31)$$

З (31) випливає таке:

1) $H = R(M_0 - \bar{\lambda}) \dot{+} \tilde{\Pi}_\lambda R(A_\lambda^*) \dot{+} \mathcal{L}$ так що $\dim[H/(R(L_A^* - \bar{\lambda}))] = \dim \mathcal{L}$;

2) $G_2 = \tilde{\Pi}_\lambda^{-1} \ker(L - \lambda) = R(A_\lambda^*) \dot{+} \tilde{\Pi}_\lambda^{-1} \mathcal{L}$, так що $\dim[G_2/R(A_\lambda^*)] = \dim \tilde{\Pi}_\lambda^{-1} \mathcal{L} = \dim \mathcal{L}$.

Рівність (28) доведено.

в) Оскільки $R(M_0 - \bar{\lambda})$ — замкнений многовид, то правильність цього твердження випливає безпосередньо з (24), при цьому потрібно взяти до уваги теорему про одночасну замкненість областей значень взаємно спряжених лінійних операторів (відношень) (див. [3],[15, с. 295]), а також застосувавши твердження а) і теорему про взаємну ортогональність многовидів нулів та областей значень взаємно спряжених операторів (відношень) (див. [1, 2, 3]).

г) Безпосередньо з (29), (30) випливає, що

$$R(L_A - \lambda) = H \Leftrightarrow R(A_\lambda) = F_1, \quad R(L_A^* - \bar{\lambda}) = H \Leftrightarrow R(A_\lambda^*) = G_2.$$

Враховуючи цю обставину та доведене вище, бачимо, що

$$\begin{aligned} \lambda \in \rho(L_A) &\Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(L_A^*) \Leftrightarrow \ker(L_A^* - \bar{\lambda}) = \{0\}, \\ R(L_A^* - \bar{\lambda}) = \{0\} &\Leftrightarrow \ker(A_\lambda^*) = \{0\}, \\ R(A_\lambda^*)^{-1} \in \mathcal{B}(G_2, F_1) &\Leftrightarrow A_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(F_1, G_2). \end{aligned}$$

Далі (див. наслідок 4)

$$(L_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(H) \Leftrightarrow A_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2).$$

Але $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(F_1, G_2)$, тому $A_\lambda^{-1} A_\lambda \in \mathcal{B}_\infty(G_1, G_2)$ тоді і тільки тоді, коли $A_1 \in \mathcal{B}_\infty(G_1, F_1)$. Теорему доведено. \square

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Arens R.* Operational calculus of linear relations // *Pacif. J. Math.* — 1961. — **11**, №1. — P. 9–23.
2. *Coddington E.A.* Self-adjoint subspace extensions of nondensely defined linear symmetric operators // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1973. — **79**, № 4. — P. 712–715.
3. *Dijkster A., de Snoo H.S.V.* Self-adjoint extensions of symmetric subspaces // *Pacif. J. Math.* — 1974. — **54**, №1. — P. 71–100.
4. *Рофе-Бекетов Ф.С.* Самоспряженныерасширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // *Докл. АН СССР.* — 1969. — **184**, №5. — С. 1034–1037.
5. *Кочубей А.Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // *Мат. заметки.* — 1975. — **17**, №1. — С. 41–48.
6. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1984. — 284 с.
7. *Malamud M.M., Mogilevskii V.I.* On extensions of dual pairs of operators // *Доп. НАН України.* — 1997. — №1. — С. 30–37.
8. *Derkach V.A., Hassi S., Malamud M.M., de Snoo H.S.V.* Generalized resolvents andadmissibility // *Methods Funct. Anal. Topol.* — 2000. — **6**, №3. — P. 24–55.
9. *Арлінський Ю.М.* Максимальні акретивні розширення секторіальних операторів: Автореф. дис. д-ра фіз.-мат. наук. - Київ, 2000.
10. *Arlinskii Yu.M., Hassi S., Sebestyen Z., de Snoo H.S.V.* On the class of extremal extensions of a nonnegative operator // *Operator Theory: Advances and Applications, Recent Advances in Operator Theory and Related Topics.* **127**. Basel: Birkhäuser, 2001. — P. 41–81.
11. *Hassi S., de Snoo H.S.V., Sterk A., Winkler H.* Finite-domentional graph perturbations of selfadjoint Sturm-Liouville operators // *Tiberiu Constantinescu Memorial Volume*, Bucharest: Theta Foundation, 2007. — P. 205–226.

12. *Hassi S., de Snoo H.S.V., Szafraniec F.H.* Infinite-dimensional perturbations, maximally nondensely symmetric operators, and some matrix representations // *Indag. Math.* — 2012. — **23**. — P. 1087–1117.
13. *Bruk V.M.* On the characteristic operator of an integral equation with a nevanlinna measure in the infinite-dimensional case // *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.* — 2014. — **10**, №2. — P. 163–188.
14. *Kuzhel A.V., Kuzhel S.A.* Regular extensions of Hermitian operators, Utrecht: VSP, 1988.
15. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — Москва: Мир, 1972.
16. *Oluyar Yu.I., Storozh O.G.* Criteria of mutual adjointness of proper extensions of linear relations // *Mat. Stud.* — 2013. — **40**, №1. — P. 71–78.
17. *Сторож О.Г.* Зв'язок між двома парами лінійних відношень та дисипативні розширення деяких нещільно визначених операторів // *Карпатські мат. публ.* — 2009. — **1**, №2. — С. 207–213.

*Стаття: надійшла до редколегії 31.05.2016
доопрацьована 23.08.2016
прийнята до друку 13.03.2017*

RESOLVENT AND CONDITIONS OF SOLVABILITY FOR PROPER EXTENSIONS OF LINEAR RELATION IN HILBERT SPACE

Olha PIHURA, Oleh STOROZH

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: info@nuft.edu.ua, storog@ukr.net*

In the terms of abstract boundary operators a class of extensions L_A of a fixed closed linear relation L_0 in a Hilbert space is investigated. The dimension of the null space, the codimension of range and a criterion of normal solvability for the relation $L_A - \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) are established. The resolvent set of the considered extension is founded and its resolvent is constructed.

Key words: Hilbert space, linear relation, operator, resolvent.