ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 186–191
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 186–191

УДК 512.64

НАЙБІЛЬШИЙ СПІЛЬНИЙ ДІЛЬНИК І НАЙМЕНШЕ СПІЛЬНЕ КРАТНЕ ОДНОГО КЛАСУ МАТРИЦЬ

Андрій РОМАНІВ

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, Львів, 79060
e-mail: romaniv_a@ukr.net

Для особливих матриць другого порядку над комутативною областю Безу стабільного рангу 1,5 знайдено форму Сміта та перетворювальні матриці їхнього найбільшого спільного лівого дільника та найменшого спільного правого кратного.

Ключові слова: комутативна область Безу стабільного рангу 1,5, найбільший спільний дільник матриць, найменше спільне кратне матриць, форма Сміта, перетворювальна матриця.

У 2008 р. У. МакГоверн ввів у розгляд кільця майже стабільного рангу 1. Тобто кільця нетривіальні гомоморфні образи яких є кільцями стабільного рангу 1 [4].

На підставі цього класу кілець В. Щедрик ввів поняття кільця стабільного рангу 1,5. Кільце R є *кільцем стабільного рангу* 1,5, якщо для довільних взаємно простих зліва елементів a, b, c із R , $c \neq 0$ існує такий елемент $r \in R$, що елементи $a+br$, c взаємно прості зліва [3]. Досліджуючи структуру кілець матриць, він довів, що кільце матриць другого порядку над кільцем стабільного рангу 1,5 є кільцем стабільного рангу 1,5. Тому, природно, виникла задача дослідження арифметичних властивостей кілець матриць другого порядку над такими кільцями.

Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5 з $1 \neq 0$ і A та B – матриці над R. Якщо $A = BC$, то кажуть, що матриця B є *лівим дільником матриці* A, а матриця A є *правим кратним матриці* B.

Якщо $A = DA_1$ та $B = DB_1$, то матрицю D називають *спільним лівим дільником* матриць A та B. Крім того, якщо кожний інший спільний лівий дільник матриць A та B ділить зліва матрицю D, то матриця D називається *найбільшим спільним лівим дільником* матриць A та B (в позначеннях $(A, B)_l$).

Якщо $M = AP = BQ$, то матрицю M називають *спільним правим кратним* матриць A та B. Крім того, якщо матриця M є лівим дільником кожного іншого

2010 Mathematics Subject Classification: 15A23

спільного правого кратного матриць A та B, то матрицю M називають *найменшим спільним правим кратним* матриць A та B (в позначеннях $[A, B]_r$).

Продовжуюємо дослідження розпочаті в [2], зокрема, встановлюються взаємозв'язки між формами Сміта і перетворювальними матрицями двох особливих матриць та формами Сміта, і перетворювальними матрицями їхнього найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного над комутативною областю Безу стабільного рангу 1,5.

Нехай A та B – особливі 2×2 матриці над R. Для них існують такі оборотні матриці P_A, Q_A та P_B, Q_B, що

$$P_A A Q_A = \mathrm{E}, \text{ де } \mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, 0),$$
$$P_B B Q_B = \Delta, \text{ де } \Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, 0).$$

Матриці E та Δ називаються формами Сміта [6], а матриці P_A, P_B та Q_A, Q_B лівими та правими перетворювальними матрицями матриць A та B, відповідно.

Нехай $a \in R$. Розглянемо множину $\mathbf{G}_a$ всіх оборотних матриць вигляду

$$\left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ ah_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Очевидно, що $\mathbf{G}_a$ є мультиплікативною групою. Якщо $a = 0$, то $\mathbf{G}_a = \mathbf{G}_0$ – група оборотних верхніх трикутних матриць.

Позначимо через $\mathbf{P}_A$ та $\mathbf{P}_B$ множини всіх лівих перетворювальних матриць для матриць A та B, відповідно. Згідно з результатами [1], [5], $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_0 P_A$, $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_0 P_B$. Символами $[a, b]$ будемо позначати найменше спільне кратне елементів a та b, через $a|b$ – елемент a ділить елемент b.

Лема 1. *Нехай A, B — особливі матриці з $M_2(R)$, $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2 = S$. Тоді елемент $s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]$ є інваріантом стосовно вибору перетворювальних матриць P_B та P_A.*

Доведення. Нехай $A = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, 0)$ $B = \mathrm{diag}(\delta_1, 0)$ і F_A та F_B інші ліві перетворювальні матриці цих матриць. Тобто $F_A \in \mathbf{P}_A$, $F_B \in \mathbf{P}_B$. Тоді існують такі $H_A = \left\| \begin{matrix} e_1' & v_{12} \\ 0 & e_2' \end{matrix} \right\|$ та $H_B = \left\| \begin{matrix} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\|$, що $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Позначимо $F_B F_A^{-1} = \left\|s'_{ij}\right\|_1^2 = S'$. Для доведення леми потрібно з'ясуваати, що s_{21} та s'_{21} асоційовні в кільці R. Розглянемо добуток матриць

$$S' = F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

де $S = P_B P_A^{-1}$. Запишемо ці матриці в явному вигляді, тобто

$$\left\| \begin{matrix} s'_{11} & s'_{12} \\ s'_{21} & s'_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} e_1 & h_{12} \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} e_1'^{-1} & * \\ 0 & e_2'^{-1} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} s''_{11} & s''_{12} \\ s_{21}u & s''_{22} \end{matrix} \right\|,$$

де $u = e_2 e_1'^{-1}$ – оборотний елемент кільця R. Отже, $s'_{21} = s_{21}u$, що і потрібно було довести. $\square$

Лема 2. *Нехай A, B – особливі матриці з $M_2(R)$, $P_B P_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} e_1 & s \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\|$. Тоді*

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B.$$

Доведення. Оскільки

$$P_B P_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} e_1 & s \\ 0 & e_2 \end{matrix} \right\| = H \in \mathbf{G}_0,$$

то $P_B = HP_A$, де $H \in \mathbf{G}_0$. Зауваживши, що $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_0 P_A$, отримуємо, що

$$\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_0 P_B = \mathbf{G}_0 H P_A = \mathbf{G}_0 P_A = \mathbf{P}_A.$$

$\square$

Лема 3. *Нехай A, B – особливі матриці з $M_2(R)$, $P_B P_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & s_{22} \end{matrix} \right\|$. Тоді для будь-яких інших матриць $P'_A \in \mathbf{P}_A$ та $P'_B \in \mathbf{P}_B$ матимемо*

$$P'_B P'^{-1}_A = \left\| \begin{matrix} s'_{11} & s'_{12} \\ 0 & s'_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Доведення. Нехай P'_A та P'_B інші ліві перетворювальні матриці матриць A та B. Тобто $P'_A \in \mathbf{P}_A$, $P'_B \in \mathbf{P}_B$. Тоді існують такі $H_A \in \mathbf{G}_0$ та $H_B \in \mathbf{G}_0$, що $P'_A = H_A P_A$, $P'_B = H_B P_B$.

Розглянемо добуток матриць

$$P'_B P'^{-1}_A = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1} = \|s'_{ij}\|_1^2.$$

Запишемо ці матриці в явному вигляді, тобто

$$H_B S H_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & s_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ 0 & l_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} s'_{11} & s'_{12} \\ 0 & s'_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Отже, $s'_{21} = 0$, що і потрібно було довести. $\square$

Теорема 1. *Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5, $A = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, 0)$, $B = \operatorname{diag}(\delta_1, 0)$, $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2$, $P_B \in \mathbf{P}_B$, $P_A \in \mathbf{P}_A$. Тоді:*

1) *якщо $s_{21} \neq 0$, то*

$$(A, B)_l = (L_A P_A)^{-1} \Phi = (L_B P_B)^{-1} \Phi,$$

де

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (\varepsilon_1, \delta_1) & 0 \\ 0 & s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1] \end{matrix} \right\|,$$

а матриці L_A та L_B задовольняють рівність $L_B^{-1} L_A = P_B P_A^{-1}$ і належать, відповідно, групам $\mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}}$ та $\mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \delta_1)}}$;

2) *якщо $s_{21} = 0$, то $(A, B)_l = P^{-1} \Phi$, де*

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} (\varepsilon_1, \delta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \ P \in \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B.$$

Доведення. 1. На підставі леми 1 елемент $s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1]$, а отже, і матриця Φ не залежать від вибору перетворювальних матриць P_A та P_B. Далі доведення проводиться аналогічно як у теоремі 2 з [2].

2. Згідно з лемою 3 елемент s_{21} дорівнює нулю незалежно від вибору матриць P_A та P_B. На підставі леми 2 маємо, що $\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$. Нехай $U \in \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$. Це означає, що матриці A та B можна записати у вигляді

$$A = U^{-1} \mathrm{E} \mathrm{Q}_{\mathrm{A}}^{-1}, \quad \mathrm{B} = \mathrm{U}^{-1} \Delta \mathrm{Q}_{\mathrm{B}}^{-1}.$$

Розглянемо матрицю

$$D = U^{-1} \left\| \begin{array}{cc} (\varepsilon_1, \delta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| = U^{-1}\Phi.$$

Оскільки

$$A = \left(U^{-1} \left\| \begin{array}{cc} (\varepsilon_1, \delta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \right) \times \left(\left\| \begin{array}{cc} \frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1, \delta_1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| Q_A^{-1} \right) = DA_1,$$

$$B = \left(U^{-1} \left\| \begin{array}{cc} (\varepsilon_1, \delta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \right) \times \left(\left\| \begin{array}{cc} \frac{\delta_1}{(\varepsilon_1, \delta_1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| Q_B^{-1} \right) = DB_1,$$

то D є спільним лівим дільником матриць A та B.

Нехай $T = P_T^{-1}\Gamma Q_T^{-1}$, де

$$\Gamma = \left\| \begin{array}{cc} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{array} \right\|, \ \gamma_1 \,|\gamma_2\ ,$$

– інший спільний лівий дільник матриць A та B, тобто $A = TA_2$, $B = TB_2$. Отже, $\Gamma\,|\mathrm{E}$ та $\Gamma\,|\Delta$. Оскільки $\gamma_1\,|\varepsilon_1$ та $\gamma_1\,|\delta_1$, то $\gamma_1\,|(\varepsilon_1, \delta_1)$. Отож, $\Gamma\,|\Phi$. Тоді, на підставі леми 5 з [2] матриця T є лівим дільником матриці D. Отже, D є найбільшим спільним лівим дільником матриць A та B. □

Теорема 2. *Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5, $A = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, 0)$, $B = \mathrm{diag}(\delta_1, 0)$,*

$$P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2, \ P_B \in \mathbf{P}_B, \ P_A \in \mathbf{P}_A.$$

Тоді

1) *якщо $s_{21} \neq 0$, то $M = [A, B]_r = \mathbf{0}$;*
2) *якщо $s_{21} = 0$, то $[A, B]_r = P^{-1}\Omega$, де*

$$\Omega = \left\| \begin{array}{cc} [\varepsilon_1, \delta_1] & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \ P \in \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B.$$

Доведення. 1. Для доведення треба довести, що, крім нульової матриці, не існує іншого спільного правого кратного матриць A та B.

Припустимо, що $M = P_M^{-1}\Upsilon Q_M^{-1} \neq \mathbf{0}$ – спільне праве кратне матриць A та B. Тоді $\mathrm{E}|\Upsilon$ та $\Delta|\Upsilon$. Отже, $\Upsilon = \mathrm{diag}(\tau_1, 0)$. Окрім того, $M = AA_2$ та $M = BB_2$.

Оскільки $A|M$ та $B|M$ зліва, то на підставі теореми 1 з [5] $P_A = L_M P_M$ та $P_B = L_{M_1} P_M$, де $L_M \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \tau_1)}}$ і $L_{M_1} \in \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2, \tau_1)}}$. Зауважимо, що в цьому випадку

$$\mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2, \tau_1)}} = \mathbf{G}_{\frac{\delta_2}{(\delta_2, \tau_1)}} = \left\| \begin{array}{cc} e_1 & * \\ 0 & e_2 \end{array} \right\|$$

– група оборотних верхніх трикутних матриць. Тоді $P_M = L_M^{-1} P_A$ і $P_M = L_{M_1}^{-1} P_B$, тобто $L_M^{-1} P_A = L_{M_1}^{-1} P_B$. А це означає, що $L_{M_1} L_M^{-1} = P_B P_A^{-1} = S$. Отже,

$$\left\| \begin{array}{cc} e_1 & * \\ 0 & e_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{array} \right\|,$$

тобто $s_{21} = 0$. Це суперечить умові теореми.

2. Згідно з лемою 3 незалежно від вибору матриць P_A та P_B елемент s_{21} дорівнює нулю. На підставі леми 2 маємо, що $\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$. Нехай $U \in \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$. Це означає, що матриці A та B можна записати у вигляді

$$A = U^{-1}\mathrm{EQ}_\mathrm{A}^{-1}, \quad \mathrm{B} = \mathrm{U}^{-1}\Delta\mathrm{Q}_\mathrm{B}^{-1}.$$

Розглянемо матрицю

$$M = U^{-1}\begin{Vmatrix} [\varepsilon_1, \delta_1] & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = U^{-1}\Omega.$$

Оскільки

$$M = \left(U^{-1}\begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} Q_A^{-1}\right) \times \left((Q_A \begin{Vmatrix} \frac{[\varepsilon_1,\delta_1]}{\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\right) =$$

$$= \left(U^{-1}\begin{Vmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} Q_B^{-1}\right) \times \left(Q_B \begin{Vmatrix} \frac{[\varepsilon_1,\delta_1]}{\delta_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\right),$$

то M є спільним правим кратним матриць A та B.

Нехай $F = P_F^{-1}\Gamma Q_F^{-1}$ – інше спільне праве кратне матриць A та B. Це означає, що відповідні інваріантні множники матриці F кратні інваріантним множникам матриць A та B. Оскільки шнші інваріантні множники цих матриць є нулями, то матриця Γ має вигляд $\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, 0)$. Окрім того, $\varepsilon_1|\gamma_1$ та $\delta_1|\gamma_1$. Тому $[\varepsilon_1, \delta_1]|\gamma_1$, тобто $\gamma_1 = [\varepsilon_1, \delta_1]\alpha$. Отже, $\Omega \mid \Gamma$. Оскільки $F = AF_1$, то згідно з теоремою 1 з [5] $P_A = U = LP_F$, де $L \in \mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\gamma_1)}}$ – група оборотних верхніх трикутних матриць. Зауваживши, що $\mathbf{G}_{\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2,\gamma_1)}} = \mathbf{G}_{\frac{\omega_2}{(\omega_2,\gamma_1)}}$ отримуємо, що $U = LP_F$, де $L \in \mathbf{G}_{\frac{\omega_2}{(\omega_2,\gamma_1)}}$, а це на підставі леми 6 з [2] означає, що матриця M є лівим дільником матриці F. Отже, M є найменшим спільним правим кратним матриць A та B. $\square$

Список використаної літератури

1. *Зелиско В.Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1980. — **12**. — С. 14–21.
2. *Романів А.М., Щедрик В.П.* Найбільший спільний лівий дільник та найменше спільне праве кратне матриць другого порядку // Мат. вісник НТШ. — 2012. — **9**. — С. 269–284.
3. *Щедрик В.П.* Bezout rings of stable range 1.5 // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, №6. — С. 849–860.
4. *McGovern W.Wm.* Bezout rings with almost stable range 1 // J. Pure Appl. Algebra. — 2008. — **212**, №2. — P. 340–348.
5. *Shchedryk V.P.* Factorization of matrices over elementary divisor rings // Algebra Discrete Math. — 2009. — №2. — P. 79–98.
6. *Smith H.J.S.* On systems of linear indeterminate equations and congruences // Philos. Trans. R. Soc. Lond. — 1861. — **151**, №2. — P. 293–326.

Стаття: надійшла до редколегії 25.10.2016
доопрацьована 16.11.2016
прийнята до друку 20.12.2016

THE GREATEST COMMON DIVISOR AND LEST COMMON MULTIPLE OF ONE CLASS OF MATRICES

Andriy ROMANIV

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
NAS of Ukraine, 3b Naukova str., L'viv, 79060
e-mail: romaniv_a@ukr.net

For a singular matrix of the second order over a commutative Bezout domain of stable range 1.5, the Smith normal form and transforming matrices of them, the left greatest common divisor and right lest common multiple are established.

Key words: commutative Bezout domain of stable range 1,5, greatest common divisor of matrices, lest common multiple of matrices, Smith normal form, transforming matrix.