ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 27–33
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 27–33

УДК 517.555

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЕВОГО РОЗВИНЕННЯ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО L-ІНДЕКСУ ЗА СУКУПНІСТЮ ЗМІННИХ

Андрій БАНДУРА[1], Наталія ПЕТРЕЧКО[2]

[1]*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,*
вул. Карпатська, 15, Івано-Франківськ, 76019,
e-mail: andriykopanytsia@gmail.com
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: petrehcko.n@gmail.com

Узагальнено один критерій обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних на випадок $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, $z \in \mathbb{C}^n$. Отримане твердження описує поводження коефіцієнтів розвинення у степеневий ряд на кістяку полікруга. Також доведено нове твердження через заміну квантора загальності на квантор існування, яке послаблює відомі достатні умови обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій.

Ключові слова: ціла функція, обмежений **L**-індекс за сукупністю змінних, полікруг, степеневий ряд.

1. Вступ. У [1, 2] один із авторів статті спільно з М.Т. Бордуляк та О.Б. Скасківим розширив означення функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних на випадок $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервні функції. Попереднє означення, введене М.Т. Бордуляк та М.М. Шереметою [3, 4], стосувалося функцій $\mathbf{L}_0$ такого вигляду $\mathbf{L}_0(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Відповідно, існують цілі функції, які через такий вузький клас функцій $\mathbf{L}_0$, мають необмежений $\mathbf{L}_0$-індекс за сукупністю змінних (див. приклад функції $F(z_1, z_2) = \exp(z_1 z_2)$ у [3]), хоча за фіксованих значень $n-1$ змінних вони мають обмежений індекс як функції однієї змінної. Увівши у розгляд функції **L** зазначеного загальнішого вигляду, ми зуміли розширити клас функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних (див. той самий приклад у [1, 7]).

М.Т. Бордуляк та М.М. Шеремета [3] навели без доведення критерій обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних, в якому накладаються умови на поводження коефіцієнтів розвинення у степеневий ряд цілої функції на кістяку полікруга. Його доведення можна знайти у [5, 6]. Відповідне твердження було новим навіть для

2010 Mathematics Subject Classification: 32A15, 32A05, 32A17

$n = 1$. Ми переносимо цю теорему на випадок $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $z \in \mathbb{C}^n$. Крім того, використовуючи ідею про можливість заміни квантора загальності на квантор існування [8, 9] у критеріях обмеженості індексу, ми відповідно послаблюємо достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних (теорема 3).

2. Основні позначення. Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ \ldots, \ l_n(z))$, $\mathbf{L}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+ := (0, +\infty)^n$ – деяка фіксована неперервна функція. Цілу функцію $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ називаємо ([1, 2, 7], див. також [3, 4]) *функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних,* якщо існує число $m \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ та всіх $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n_+$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} \leqslant \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}:\ K \in \mathbb{Z}^n_+,\ \|K\| \leqslant m\right\}, \tag{1}$$

де

$$F^{(K)}(z) := \frac{\partial^{\|K\|}F}{\partial z^K} := \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}f}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_n^{k_n}}, \quad K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+,$$

а $\|K\| = k_1 + \ldots + k_n$, $K! = k_1! \cdots k_n!$, $\mathbf{L}^J = l_1^{j_1} \cdots l_n^{j_n}$. Найменше ціле число m, для якого виконується нерівність (1), називається $\mathbf{L}$*-індексом за сукупністю змінних функції* F та позначається через $N(F, \mathbf{L})$. Зв'язок означення функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних з іншими означеннями обмеженого індексу [10, 11] можна знайти у [1, 7].

Нам знадобляться деякі стандартні позначення. Нехай $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Позначимо $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{2} = (2, \ldots, 2) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j-\text{те місце}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$. Також для $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ використовуватимемо такі позначення:

$$AB = (a_1b_1, \cdots, a_nb_n),\ A/B = (a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n),\ A^B = a_1^{b_1}a_2^{b_2} \cdot \ldots a_n^{b_n},$$

однак не порушуючи умов існування зазначених виразів.

Запис $A < B$ означає, що $a_j < b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$; подібно визначається відношення $A \leqslant B$.

Полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n:\ |z_j - z_j^0| < r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ позначаємо через $\mathbb{D}^n(z^0, R)$, а його кістяк $\{z \in \mathbb{C}^n:\ |z_j - z_j^0| = r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ — через $\mathbb{T}^n(z^0, R)$, замкнений полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n:\ |z_j - z_j^0| \leqslant r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ — через $\mathbb{D}^n[z^0, R]$.

Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j(z)$ — додатні неперервні функції, $z \in \mathbb{C}^n$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Для $R \in \mathbb{R}^n_+$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ та $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$ визначимо

$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \inf\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(z^0)}: z \in D^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\},$$

$$\lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \sup\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(z^0)}: z \in D^n\left[z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right]\right\},$$

$$\Lambda_1(R) = (\lambda_{1,j}(R), \ldots, \lambda_{1,n}(R)), \quad \Lambda_2(R) = (\lambda_{2,1}(R), \ldots, \lambda_{2,n}(R)).$$

Через Q^n позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}(z)$, які для кожного $R \in \mathbb{R}^n_+$ та $j \in \{1, \ldots, n\}$ задовольняють $0 < \lambda_{1,j}(R) \leqslant \lambda_{2,j}(R) < +\infty$.

Нам буде потрібна така теорема:

Теорема 1 ([2]). *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існують числа* $p \in \mathbb{Z}_+$ *та* $c \in \mathbb{R}_+$ *такі, що для усіх* $z \in \mathbb{C}^n$ *справджується нерівність*

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} :\ \|J\| = p+1\right\} \leqslant c \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)} :\ \|K\| \leqslant p\right\}. \tag{2}$$

3. Основні твердження. Нехай $z^0 \in \mathbb{C}^n$. Розвинемо цілу у $\mathbb{C}^n$ функцію F у степеневий ряд, записаний у діагональній формі

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k((z-z^0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\|J\|=k} b_J (z-z^0)^J, \tag{3}$$

де p_k — однорідні многочлени k-го степеня, $b_J = \frac{F^{(J)}(z^0)}{J!}$. Многочлен p_{k_0}, $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, називається головним у степеневому розвиненні (3) на $\mathbb{T}^n(z^0, R)$, якщо для кожного $z \in \mathbb{T}^n(z^0, R)$ виконується така нерівність

$$|\sum_{k \neq k^0} p_k(z-z^0)| \leqslant \frac{1}{2} \max\{|b_J| R^J \colon \|J\| = k^0\}.$$

Теорема 2. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли існує* $p \in \mathbb{Z}_+$ *таке, що для усіх* $d > 0$ *знайдеться* $\eta(d) \in (0; d)$, *що для будь-якого* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *та деяких* $r = r(d, z^0) \in (\eta(d), d)$, $k^0 = k^0(d, z^0) \leqslant p$ *многочлен* p_{k^0} *є головним у ряді* (3) *на* $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\mathbf{e}}{\mathbf{L}(z^0)})$.

Доведення. Нехай F є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних та $N = N(F, \mathbf{L}) < +\infty$, а n_0 — це $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних у точці $z^0 \in \mathbb{C}^n$, тобто це найменше число, для якого нерівність (1) виконується у точці z^0.

Тоді для кожної точки $z^0 \in \mathbb{C}^n$ $n_0 \leqslant N$. Покладемо $a^*_J = \frac{|b_J|}{\mathbf{L}^J(z^0)} = \frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^J(z^0)}$, $a_k = \max\{a^*_J :\ \|J\| = k\}$, $c = 2\{(N+n+1)!(n+1)! + (N+1)C^N_{n+N-1}\}$. Нехай d — довільне число. Покладемо $r_m = \frac{d}{(d+1)c^m}$ для $m \in \mathbb{Z}_+$ та позначимо $\mu_m = \max\{a_k r_m^k :\ k \in \mathbb{Z}_+\}$, $s_m = \min\{k :\ a_k r_m^k = \mu_m\}$.

Оскільки при фіксованому $z^0 \in \mathbb{C}^n$ $a^*_K \leqslant \max\{a^*_J :\ \|J\| \leqslant n_0\}$ для усіх $K \in \mathbb{Z}^n_+$, то $a_k \leqslant a_{n_0}$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$. Звідси для усіх $k > n_0$, враховуючи нерівність $r_0 < 1$, отримаємо $a_k r_0^k < a_{n_0} r_0^{n_0}$, тому $s_0 \leqslant n_0$. Водночас $c r_m = r_{m-1}$, а отже, для усіх $k > s_{m-1}$ (у нас $r_{m-1} < 1$) отримуємо

$$a_{s_{m-1}} r_m^{s_{m-1}} = a_{s_{m-1}} r_{m-1}^{s_{m-1}} c^{-s_{m-1}} \geqslant a_k r_{m-1}^k c^{-s_{m-1}} = a_k r_m^k c^{k-s_{m-1}} \geqslant c a_k r_m^k. \tag{4}$$

З цієї нерівності випливає, що $s_m \leqslant s_{m-1}$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Отож, можна записати

$$\mu_0 = \max\{a_k r_0^k :\ k \leqslant n_0\},\ \mu_m = \max\{a_k r_m^k :\ k \leqslant s_{m-1}\},\ m \in \mathbb{N}$$

Введемо додаткові позначення при $m \in \mathbb{N}$

$$\mu_0^* = \max\left\{a_k r_0^k :\ s_0 \neq k \leqslant n_0\right\},\ s_0^* = \min\{k :\ k \neq s_0, a_k r_0^k = \mu_0^*\},$$
$$\mu_m^* = \max\{a_k r_m^k :\ s_m \neq k \leqslant s_{m-1}\},\ s_m^* = \min\{k :\ k \neq s_m, a_k r_m^k = \mu_m^*\},$$

і доведемо, що існує число $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\frac{\mu^*_{m_0}}{\mu_{m_0}} \leqslant \frac{1}{c}. \tag{5}$$

Від супротивного, припустимо, що для усіх $m \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$\frac{\mu^*_m}{\mu_m} > \frac{1}{c}. \tag{6}$$

Якщо $s^*_m < s_m$, то спершу

$$a_{s^*_m} r^{s^*_m}_{m+1} = \frac{a_{s^*_m} r^{s^*_m}_m}{c^{s^*_m}} = \frac{\mu^*_m}{c^{s^*_m}} > \frac{\mu_m}{c^{s^*_m+1}} = \frac{a_{s_m} r^{s_m}_m}{c^{s^*_m+1}} = \frac{a_{s_m} r^{s_m}_{m+1}}{c^{s^*_m+1-s_m}} \geqslant a_{s_m} r^{s_m}_{m+1}.$$

Крім того, для усіх $k > s^*_m$, $k \neq s_m$, (інакше кажучи, $k-1 \geqslant s^*_m$) подібно виводимо, що

$$a_{s^*_m} r^{s^*_m}_{m+1} = \frac{a_{s^*_m} r^{s^*_m}_m}{c^{s^*_m}} \geqslant \frac{a_k r^k_m}{c^{s^*_m}} \geqslant \frac{a_k r^k_m}{c^{k-1}} = c a_k r^k_{m+1},$$

тобто $a_{s^*_m} r^{s^*_m}_{m+1} > a_k r^k_{m+1}$ для усіх $k > s^*_m$, тому

$$s_{m+1} \leqslant s^*_m \leqslant s_m - 1. \tag{7}$$

Якщо $s_m < s^*_m \leqslant s_{m-1}$, то можливою є рівність $s_{m+1} = s_m$. Справді, за визначенням $s_{m+1} \leqslant s_m$, тому згадана рівність вірогідна. Коли її немає, тобто $s_{m+1} < s_m$, тоді $s_{m+1} \leqslant s_m - 1$ (це натуральні числа!). Отож, отримали (7).

Оже, з нерівностей $s^*_{m+1} \leqslant s_m$ та $s^*_m \neq s_{m+1}$ випливає, що $s^*_{m+1} < s_{m+1}$. Тому замість (7) матимемо нерівність

$$s_{m+2} \leqslant s^*_{m+1} \leqslant s_{m+1} - 1 = s_m - 1.$$

Отже, якщо для усіх $m \in \mathbb{Z}_+$ виконується (6), то для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ справджується одна з нерівностей $s_{m+2} \leqslant s_{m+1} \leqslant s_m - 1$ або $s_{m+2} \leqslant s_m - 1$, тобто $s_{m+2} \leqslant s_m - 1$. З цього випливає, що

$$s_m \leqslant s_{m-2} - 1 \leqslant \ldots \leqslant s_{m-2[m/2]} - [m/2] \leqslant s_0 - [m/2] \leqslant n_0 - [m/2] \leqslant N - [m/2].$$

Інакше кажучи, $s_m < 0$, при $m > 2N+1$, що неможливо. Отож, існує m_0, для якого виконується (5), причому як видно з наведених вище міркувань $m_0 \leqslant 2N+1$.

Приймемо $r = r_{m_0}$, $\eta(d) = \frac{d}{(d+1)c^{2(N+1)}}$, $p = N$ та $k_0 = s_{m_0}$. Тоді для $\|J\| \neq k_0 = s_{m_0}$ на $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)})$, з врахуванням (4) та (5), отримуємо

$$|b_J||z-z^0|^J = a^*_J r^{\|J\|} \leqslant a_{\|J\|} r^{\|J\|} \leqslant \frac{1}{c} a_{s_{m_0}} r^{s_{m_0}}_{m_0} = \frac{1}{c} a_{k_0} r^{k_0},$$

тому на $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)})$ одержуємо

$$\left| \sum_{\|J\| \neq k_0} b_J (z-z^0)^J \right| \leqslant \sum_{\|J\| \neq k_0} a^*_J r^{\|J\|} \leqslant \sum_{\substack{k=0,\\ k\neq k_0}}^{\infty} a_k C^k_{n+k-1} r^k =$$

$$= \sum_{\substack{k=0,\\ k\neq s_{m_0}}}^{s_{m_0-1}} a_k C^k_{n+k-1} r^k + \sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} a_k C^k_{n+k-1} r^k. \tag{8}$$

Враховуючи (7), визначаємо таку оцінку для першої суми:

$$\sum_{\substack{k=0,\\ k\neq s_{m_0}}}^{s_{m_0-1}} a_k C_{n+k-1}^k r^k \leqslant \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} \sum_{k=0}^{N} C_{n+k-1}^k \leqslant \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} (N+1) C_{n+N-1}^N. \tag{9}$$

Для всіх $k \geqslant s_{m_0-1}+1$ виконується $a_k r_{m_0-1}^k \leqslant \mu_{m_0-1}$, тому $a_k r_{m_0}^k = \frac{a_k r_{m_0-1}^k}{c^k} \leqslant \frac{\mu_{m_0-1}}{c^k}$. З огляду на (5), отримуємо

$$\sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} a_k C_{n+k-1}^k r^k \leqslant \mu_{m_0-1} \sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} C_{n+k-1}^k \frac{1}{c^k} \leqslant$$

$$\leqslant a_{s_{m_0-1}} r_{m_0}^{s_{m_0-1}} c^{s_{m_0-1}} \sum_{k=s_{m_0-1}+1} (k+1)(k+2)\ldots(k+n) \frac{1}{c^k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_{s_{m_0}} r^{s_{m_0}}}{c} c^{s_{m_0-1}} \left(\sum_{k=s_{m_0-1}+1}^{\infty} x^{k+n} \right)^{(n)} \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} = \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} c^{s_{m_0-1}} \left\{ \frac{x^{s_{m_0-1}+n+1}}{1-x} \right\}^{(n)} \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} =$$

$$= \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} c^{s_{m_0-1}} \sum_{j=0}^{n} C_n^j (n-j)! (s_{m_0-1}+n+1)\ldots(s_{m_0-1}+n-j+2) \times$$

$$\times \frac{x^{s_{m_0-1}+1+n-j}}{(1-x)^{n-j+1}} \Bigg|_{x=\frac{1}{c}} \leqslant \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} c^{s_{m_0-1}} n! (N+n+1)! \sum_{j=0}^{n} \frac{(1/c)^{s_{m_0-1}+1+n-j}}{(1-1/c)^{n-j+1}} =$$

$$= n!(N+n+1)! \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(c-1)^{n-j+1}} \leqslant (n+1)!(N+n+1)! \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{c}, \tag{10}$$

бо $c \geqslant 2$. З нерівностей (8)-(10) випливає, що

$$\left| \sum_{\|J\|\neq k_0} b_J (z-z^0)^J \right| \leqslant \frac{((N+1)C_{n+N-1}^N + (n+1)!(N+n+1)!) a_{k_0} r^{k_0}}{c} \leqslant \frac{1}{2} a_{k_0} r^{k_0},$$

тобто многочлен P_{k_0} є головним у ряді (3) на кістяку $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\mathbf{e}}{\mathbf{L}(|z^0|)})$. Необхідність доведена.

Перейдемо до доведення достатності. Нехай існують числа $p \in \mathbb{Z}_+$ та $\eta \in (0; d)$ такі, що для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $d = 1$ і деяких $r = r(1, z^0) \in (\eta; 1)$, $k_0 = k_0(1, z^0) \leqslant p$ многочлен P_{k_0} є головним у ряді (3) на кістяку $\mathbb{T}^n(z^0, \frac{r\mathbf{e}}{\mathbf{L}(|z^0|)})$. Тоді на цьому кістяку

$$\left| \sum_{\|J\|\neq k_0} b_J (z-z^0)^J \right| = \left| f(z) - \sum_{\|J\|=k_0} b_J (z-z^0)^J \right| \leqslant \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{2}.$$

Звідси за нерівністю Коші отримаємо $|b_J (z-z^0)^J| = a_j^* r^{\|J\|} \leqslant \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{2}$ для усіх $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|J\| \neq k_0$, тобто для усіх $k \neq k_0$

$$a_k r^k \leqslant \frac{a_{k_0} r^{k_0}}{2}. \tag{11}$$

Припустимо, що F не є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Тоді за теоремою 1 для усіх $p_1 \in \mathbb{Z}_+$ та $c \geqslant 1$ при деякому $z^0 \in \mathbb{C}^n$ справджується нерівність

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z^0)|}{\mathbf{L}^J(z^0)}: \ \|J\| = p_1 + 1\right\} > c \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{\mathbf{L}^K(z^0)}: \ \|K\| \leqslant p_1\right\}.$$

Візьмемо тут $p_1 = p$ та $c = \left(\frac{(p+1)!}{\eta^{p+1}}\right)^n$. Відтак для відповідного $z^0(p_1, c)$ одержимо

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z^0)|}{J!\mathbf{L}^J(|z^0|)}: \ \|J\| = p + 1\right\} > \frac{1}{\eta^{p+1}} \max\{\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(|z^0|)}: \ \|K\| \leqslant p\}.$$

Іншими словами, $a_{p+1} > \frac{a_{k_0}}{\eta^{p+1}}$, і звідсіля $a_{p+1} r^{p+1} > \frac{a_{k_0} r^{p+1}}{\eta^{p+1}} \geqslant a_{k_0} r^{k_0}$. Ця нерівність суперечить (11). Отже, F є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. $\square$

Нескладно помітити, що у доведенні достатності радіус $R = (r, \ldots, r)$ кістяка $\mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))$ можна замінити на радіус $R = (r_1, \ldots, r_n)$, де r_j не обов'язково рівні між собою, $r_j \in \{1, \ldots, n\}$. Отож, така теорема правильна.

Теорема 3. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$ *та існують* $p \in \mathbb{Z}_+$, $d \in (0; 1]$, $\eta \in (0; d)$, *що для будь-якого* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *і деякого* $R = (r_1, \ldots, r_n)$ *з* $r_j = r_j(d, z^0) \in (\eta(d); d)$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *та* $k^0 = k^0(d, z^0) \leqslant p$ *многочлен* p_{k^0} *є головним у ряді* (3) *на кістяку* $\mathbb{T}^n(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))$. *Тоді ціла у* $\mathbb{C}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Список використаної літератури

1. *Bandura A.I., Bordulyak M.T., Skaskiv O.B.* Sufficient conditions of boundedness of **L**-index in joint variables// Мат. Студ. — 2016. — **45**, №1. — C. 12–26. doi: 10.15330/ms.45.1.12-26
2. *Бандура А.І.* Нові критерії обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій // Мат. вісник НТШ. — 2016. — **16**. — С. 58–67.
3. *Бордуляк М.Т., Шеремета М.М.* Обмеженість **L**-індексу цілої функції декількох змінних // Доп. АН України. — 1993. — **9**. — С. 10–13.
4. *Бордуляк М.Т.* Простір цілих у $\mathbb{C}^n$ функцій обмеженого **L**-індексу // Мат. Студ. — 1995. — **4**. — С. 53–58.
5. *Бордуляк М.Т.* Обмеженість **L**-індексу цілої функції багатьох комплексних змінних: дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. — Львів. ун-т, Львів, 1995. – 100 с.
6. *Бордуляк М.Т.* Обмеженість **L**-індексу цілої функції багатьох комплексних змінних. — Львів. ун-т, Львів, 1992. – 37 с. – Деп. в УкрІНТЕІ 17.12.92, № 2006 – Ук -92.
7. *Bandura A., Skaskiv O.* Entire functions of several variables of bounded index. — Lviv: Publisher I.E. Chyzhykov, 2016. — 128 p.
8. *Bandura A.I.* A modified criterion of boundedness of L-index in direction // Мат. Студ. — 2013. — **39**, №1. — С. 99–102.
9. *Bandura A.I., Skaskiv O.B.* Open problems for entire functions of bounded index in direction// Мат. Студ. — 2015. — **43**, №1. — С. 103–109. doi: 10.15330/ms.43.1.103–109
10. *Lepson B.* Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index // Proc. Sympos. Pure Math. — Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc. — 1968. — **2**. — P. 298–307.

11. *Krishna G.J., Shah S.M.* Functions of bounded indices in one and several complex variables // Mathematical essays dedicated to A.J. Macintyre. — Athens: Ohio Univ. Press. — 1970. — P. 223–235.

PROPERTIES OF POWER SERIES EXPANSION OF ENTIRE FUNCTION OF BOUNDED L-INDEX IN JOINT VARIABLES

Andriy BANDURA[1], Nataliya PETRECHKO[2]

[1]*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas,*
76019, Ivano-Frankivsk, Karpatska Str., 15, e-mail: andriykopanytsia@gmail.com
[2] *Ivan Franko National University of L'viv,*
79000, L'viv, Universytets'ka str., 1, e-mail: petrechko.n@gmail.com

Some criterion of boundedness of **L**-index in joint variables is generalized in the case $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, $z \in \mathbb{C}^n$. This proposition describes behaviour of coefficients of power series expansion on the skeleton of a polydisc. Replacing the universal quantifier by the existential quantifier, we also prove new theorem which provides weaker sufficient conditions of boundedness of **L**-index in joint variables for entire functions.

Key words: entire function, bounded **L**-index in joint variables, polydisc, power series.

Стаття: надійшла до редколегії 29.11.2016
прийнята до друку 27.02.2017