ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 56–74
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 56–74

УДК 517.95

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ВИРОДЖУВАНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОПЕРАТОРАМИ ТИПУ ВОЛЬТЕРРА

Микола БОКАЛО, Ольга СУС

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університецька, 1, Львів, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, oliasus@gmail.com

Досліджено мішані задачі для нелінійних вироджуваних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності та інтегральними операторами типу Вольтерра. Доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків таких задач у відповідних узагальнених просторах Лебега та Соболєва. Отримано апріорні оцінки узагальнених розв'язків досліджуваних задач.

Ключові слова: інтегро-диференціальні рівняння, еліптично-параболічні рівняння, змінні показники нелінійності, метод Гальоркіна, метод монотонності.

Вступ

Інтегро-диференціальні рівняння параболічного типу широко використовують для математичного моделювання складних явищ в сучасному природознавстві, економіці та техніці. Зокрема, такі рівняння трапляються в задачах опису еволюції популяцій [20], в теорії ядерних реакцій для вивчення процесу уповільнення нейтронів [29], в дифузії заряджених частинок у плазмі та в інших різноманітних задачах [18], [19], [21], [22], [23].

Розглядаємо нелінійні вироджувані параболічні рівняння зі змінними показниками нелінійності та інтегральними операторами типу Вольтерра. Їхнім типовим прикладом є рівняння

$$\big(b(x)u\big)_t - \sum_{i=1}^{n}\Big(\widehat{a}_i(x,t)|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i}\Big)_{x_i} + \widehat{a}_0(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u +$$

2010 Mathematics Subject Classification: 35K10, 35K20, 35K35, 35K55, 35R09

$$+\int_0^t \widehat{h}_0(x,t,s)\widehat{h}_1(u(x,s))\,ds = f(x,t)\,, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{1}$$

де Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $T>0$ – дійсне число, $\widehat{a}_i>0$ $(i=\overline{0,n})$, $p_i>1$ $(i=\overline{0,n})$, $\widehat{h}_0$ — вимірні обмежені функції, $\widehat{h}_1$ — ліпшицева функція. Зауважимо, що величини p_i $(i=\overline{0,n})$, які називають показниками нелінійності, є змінними.

Нелінійні диференціальні рівняння подібні до (1) з $b\equiv 1$ і $\widehat{h}_0\equiv 0$ (зі змінними показниками нелінійності) вивчають дуже активно (див. [2, 3, 4, 5, 6, 7, 13, 9, 17, 31, 32]). Мішані задачі для цих рівнянь описують багато фізичних процесів (див. [13, 16]), зокрема, електромагнітні поля, електрореологічні рідини, процеси відновлення зображення, потік струму в змінних температурних полях. Розв'язки цих задач належать до відповідних узагальнених просторів Лебега і Соболєва. Вперше ці простори були введені у [15], а їхні властивості вивчали у [8, 11, 14, 15] та ін.

Вироджувані нелінійні параболічні рівняння вигляду (1) у випадку, коли $p_0\equiv \mathrm{const}>1,\ldots,p_n\equiv const>1$ і $\widehat{h}_0\equiv 0$, розглядалися у [33, 34, 35, 36, 30]. Зауважимо, що мішані задачі для згадуваних рівнянь у випадку змінних показників нелінійності досліджені в [26].

Рівняння вигляду (1) зі сталими показниками нелінійності та інтегральними операторами досліджували у [24, 25, 27, 28] та ін. Зокрема, у [28] дослідили мішану задачу для інтегро-диференціального рівняння вигляду

$$u_t-\triangle u+\int_0^t g(t-s,u(x,s))\,ds = f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega\times(0,+\infty),$$

$$u=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\times(0,+\infty), \qquad u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\Omega.$$

У праці [25] вивчається стійкість глобального розв'язку нелокального рівняння Вольтерра

$$u_t-\triangle u=(a-bu)u-\int_0^t K(t-s)u(x,s)\,ds, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,+\infty).$$

На відміну від відомих нам робіт, ми розглядаємо нелінійні вироджувані параболічні рівняння зі змінними показниками нелінійності та інтегральними членами, в яких невідома функція входить під знак інтеграла за часовою змінною, тобто, коли значення розв'язку в актуальний момент часу залежить і від значень розв'язку в попередні моменти. Досліджуємо питання про однозначну розв'язність задачі (2)-(4) в узагальнених просторах Лебега і Соболєва.

Робота складається зі вступу і трьох розділів. У першому розділі введено основні позначення та допоміжні факти. Формулювання задачі й основного результату містить другий розділ. У третьому розділі обґрунтовано основний результат.

1. Основні позначення та допоміжні факти

Нехай $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^n$ — лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $x = (x_1, \dots, x_n)$ дійсних чисел і наділений нормою $|x| := (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$; Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$; $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_0 — замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема, $\Gamma_0 = \emptyset$ або $\Gamma_0 = \partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$; $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$; $T > 0$; $Q := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0,T)$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0,T)$.

Введемо деякі потрібні нам далі функційні простори. Нехай $G = \Omega$ або $G = Q$. Припустимо, що функція $r \in L_\infty(\Omega)$ така, що $r(x) \geqslant 1$ для м.в. $x \in \Omega$. Через $L_{r(\cdot)}(G)$ позначимо лінійний простір, який складається з вимірних функцій $v : G \to \mathbb{R}$ таких, що $\rho_{G,r}(v) < \infty$, де

$$\rho_{G,r}(v) := \int\limits_{\Omega} |v(x)|^{r(x)}\, dx, \text{ якщо } G = \Omega,$$

і

$$\rho_{G,r}(v) := \iint\limits_{Q} |v(x,t)|^{r(x)}\, dxdt, \text{ якщо } G = Q.$$

Цей простір є банаховим з нормою $||v||_{L_{r(\cdot)}(G)} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \leqslant 1\}$ (див. [11, p. 599]) і його називають *узагальненим простором Лебега*. Зауважимо таке: якщо $r(x) = r_0 = \mathrm{const} \geqslant 1$ для м.в. $x \in \Omega$, то норма $||\cdot||_{L_{r(\cdot)}(G)}$ збігається зі стандартною нормою $||\cdot||_{L_{r_0}(G)}$ простору Лебега $L_{r_0}(G)$. Згідно з [11, p. 599], якщо $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} r(x) > 1$, то спряжений до $L_{r(\cdot)}(G)$ простір $[L_{r(\cdot)}(G)]'$ ототожнюється з простором $L_{r'(\cdot)}(G)$, де функція $r'(x)$, $x \in \Omega$, визначається рівністю $1/r(x) + 1/r'(x) = 1$ для м.в. $x \in \Omega$. Зауважимо, що множина $C(\overline{G})$ є щільною в $L_{r(\cdot)}(G)$ (див. [11, p. 603]).

Нехай $p = (p_0, \dots, p_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$, $b : \Omega \to \mathbb{R}$ – функції, які задовольняють такі умови:

- ($\mathcal{P}$) для кожного $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ вектор-функція $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$ є вимірною і $p_i^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_i(x) > 1$, $p_i^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_i(x) < +\infty$;
- ($\mathcal{B}$) функція b – вимірна, невід'ємна та обмежена на Ω, причому множина $\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid b(x) > 0\}$ – відкрита.

Через $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ позначимо узагальнений простір Соболєва, що складається з функцій $v \in L_{p_0(\cdot)}(\Omega)$ таких, що $v_{x_1} \in L_{p_1(\cdot)}(\Omega)$, $\dots$, $v_{x_n} \in L_{p_n(\cdot)}(\Omega)$. Цей простір є банаховим з нормою $||v||_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega)} := ||v||_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n ||v_{x_i}||_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega)}$. Під $\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ – розумітимемо замикання простору $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega}) := \{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\}$ в $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$.

Приймемо $V_p(\Omega) := \widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega) \cap L_2(\Omega)$. Легко переконатися, що $V_p(\Omega)$ є банаховим простором з нормою

$$||v||_{V_p(\Omega)} := ||v||_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega)} + ||v||_{L_2(\Omega)}\,.$$

Визначимо $\widetilde{b}(x) := b(x)$, якщо $x \in \Omega_0$, та $\widetilde{b}(x) := 1$, якщо $x \in \Omega\backslash\Omega_0$, і приймемо $H_b(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна $| v = \widetilde{b}^{-1/2}w$, де $w \in L_2(\Omega)\}$. Цей простір є поповненням простору $V_p(\Omega)$ за півнормою

$$||v||_{H_b(\Omega)} := ||b^{1/2}v||_{L_2(\Omega)}.$$

Під $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ розумітимемо простір функцій $w \in L_{p_0(\cdot)}(Q)$ таких, що $w_{x_1} \in L_{p_1(\cdot)}(Q), \dots, w_{x_n} \in L_{p_n(\cdot)}(Q)$. Розглядатимемо цей простір з нормою $||w||_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)} := ||w||_{L_{p_0(\cdot)}(Q)} + \sum_{i=1}^n ||w_{x_i}||_{L_{p_i(\cdot)}(Q)}$. Визначимо простір $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ як замикання простору $\widetilde{C}^{1,0}(\overline{Q}) := \big\{w \in C(\overline{Q}) \bigm| w_{x_i} \in C(\overline{Q})\ (i = \overline{1,n}),\ \ w|_{\Sigma_0} = 0\big\}$ в $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$.

Приймемо

$$U_{p,b}(Q) := \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q) \cap C([0,T]; H_b(\Omega)).$$

Легко переконатися, що це банахів простір з нормою

$$||w||_{U_{p,b}(Q)} := ||w||_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)} + ||w||_{L_2(Q)} + \max_{t\in[0,T]} ||w(\cdot,t)||_{H_b(\Omega)}\,.$$

Очевидно, що для будь-якої функції $w \in U_{p,b}(Q)$ маємо $w(\cdot,t) \in V_p(\Omega)$ для м.в. $t \in [0,T]$.

Зрештою, визначимо простори

$$F_{p'}(Q) := \big\{(f_0, f_1, \dots, f_n) \ \mid\ f_i \in L_{p_i'(\cdot)}(Q) \ \ (i = \overline{0,n}),$$

$$f_i = 0 \quad \text{в деякому околі поверхні} \quad \Sigma_1 \text{ для кожного } i \in \{1,...,n\}\big\},$$

де $1/p_i(x) + 1/p_i'(x) = 1$ для м.в. $x \in \Omega$ $(i = \overline{0,n})$,

$$C^1_c(0,T) := \{\varphi \in C^1([0,T]) \ \mid\ \operatorname{supp}\varphi \subset (0,T)\}.$$

2. Постановка задачі та формулювання основного результату

Розглядаємо задачу: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$\big(b(x)u\big)_t - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}\, a_i(x,t,u,\nabla u) + a_0(x,t,u,\nabla u) +$$

$$+ \int\limits_0^t h(x,t,s,u(x,s))\,ds = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x,t) + f_0(x,t)\,, \quad (x,t) \in Q\,, \tag{2}$$

крайові умови

$$u\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_a}\Big|_{\Sigma_1} = 0 \tag{3}$$

і початкову умову

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \text{якщо } x \in \Omega \text{ і } b(x) > 0. \tag{4}$$

Тут $b:\Omega\to\mathbb{R}$, $a_i:Q\times\mathbb{R}^{1+n}\to\mathbb{R}$, $f_i:Q\to\mathbb{R}$, $h:Q\times(0,T)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $u_0:\Omega\to\mathbb{R}$ – задані дійснозначні функції, причому $b(x)\geqslant 0$ для майже всіх $x\in\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial\nu_a}(x,t):=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(x,t,u,\nabla u)\,\nu_i,\ (x,\,t)\in\Sigma_1,$ – похідна по "конормалі".

Зауважимо, що рівність $b=0$ може виконуватись на довільній підмножині Ω і просторова частина виразу в лівій частині рівняння (2) є еліптичною. Тому такі рівняння ще називають еліптично-параболічними (див. [30]).

Ми розглядатимемо узагальнені розв'язки задачі (2)-(4). Для їхнього означення спочатку введемо відповідні класи вихідних даних.

Нехай p – вектор-функція, яка задовольняє умову $(\mathcal{P})$. Позначимо через $\mathbb{AH}_p$ множину наборів дійснозначних функцій $(a_0,a_1,\dots,a_n,h)$, які мають такі властивості:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного $i\in\{0,1,\dots,n\}$ функція $Q\times\mathbb{R}^{1+n}\ni(x,t,\rho,\xi)\mapsto a_i(x,t,\rho,\xi)\in\mathbb{R}$ є каратеодорівською, тобто, для м.в. $(x,t)\in Q$ функція $a_i(x,t,\cdot,\cdot):\mathbb{R}^{1+n}\to\mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $(\rho,\xi)\in\mathbb{R}^{1+n}$ функція $a_i(\cdot,\cdot,\rho,\xi):Q\to\mathbb{R}$ є вимірною; крім того, $a_i(x,t,0,0)=0$ для м.в. $(x,t)\in Q$ $(i=\overline{0,n})$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $i\in\{0,1,\dots,n\}$, для м.в. $(x,t)\in Q$ і будь-яких $(\rho,\xi)\in\mathbb{R}^{1+n}$ маємо

$$|a_i(x,t,\rho,\xi)|\leq C_1\big(|\rho|^{2/p_i'(x)}+|\rho|^{p_0(x)/p_i'(x)}+\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^{p_j(x)/p_i'(x)}\big)+h_i(x,t),$$

де $C_1=\mathrm{const}>0$, $h_i\in L_{p'_i(\cdot)}(Q)$;

$(\mathcal{A}_3)$ для м.в. $(x,t)\in Q$ і всіх (ρ_1,ξ^1), $(\rho_2,\xi^2)\in\mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(x,t,\rho_1,\xi^1)-a_i(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\xi_i^1-\xi_i^2)+ \\ +\big(a_0(x,t,\rho_1,\xi^1)-a_0(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\rho_1-\rho_2)\geq K_1|\rho_1-\rho_2|^2\,, \tag{5}$$

де $K_1=\mathrm{const}>0$;

$(\mathcal{A}_4)$ для м.в. $(x,t)\in Q$ і всіх $(\rho,\xi)\in\mathbb{R}^{1+n}$ маємо

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t,\rho,\xi)\xi_i+a_0(x,t,\rho,\xi)\rho\geq K_2\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^{p_i(x)}+|\rho|^{p_0(x)}\Big)-g(x,t)\,,$$

де $K_2=\mathrm{const}>0$, $g\in L_1(Q)$ (очевидно, що $g\geq 0$);

$(\mathcal{H}_1)$ функція $Q\times(0,T)\times\mathbb{R}\ni(x,t,s,\rho)\mapsto h(x,t,s,\rho)\in\mathbb{R}$ є каратеодорівською, тобто, для м.в. $(x,t,s)\in Q\times(0,T)$ функція $h(x,t,s,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $\rho\in\mathbb{R}$ функція $h(\cdot,\cdot,\cdot,\rho):Q\times(0,T)\to\mathbb{R}$ є вимірною; крім того, $h(x,t,s,0)=0$ для м.в. $(x,t,s)\in Q\times(0,T)$;

$(\mathcal{H}_2)$ для майже всіх $(x,t,s)\in Q\times(0,T)$ і будь-яких $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ маємо

$$|h(x,t,s,\rho_1)-h(x,t,s,\rho_2)|\leqslant M|\rho_1-\rho_2|, \tag{6}$$

де $M=\mathrm{const}>0$.

Тепер подамо означення узагальненого розв'язку задачі (2)–(4).

Означення 1. *Нехай p та b задовольняють, відповідно, умови $(\mathcal{P})$ та $(\mathcal{B})$, $(a_0, a_1, \dots, a_n, h) \in \mathbb{AH}_p$, $(f_0, f_1, ..., f_n) \in F_{p'}(Q)$, $u_0 \in H_b(\Omega)$. Функцію $u \in U_{p,b}(Q)$ називають узагальненим розв'язком задачі* (2)–(4), *якщо вона задовольняє умову*

$$\|u(\cdot,0) - u_0(\cdot)\|_{H_b(\Omega)} = 0$$

і виконується інтегральна рівність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u) v_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u,\nabla u) v\varphi +$$

$$+v\varphi \int\limits_0^t h(x,t,s,u(x,s))\, ds - b(x)uv\varphi' \Big\}\ dxdt = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n f_i v_{x_i}\varphi + f_0 v\varphi \Big\}\ dxdt \qquad (7)$$

для будь-яких $v \in V_p(\Omega)$ і $\varphi \in C_c^1(0,T)$.

Теорема 1. *Нехай p та b задовольняють, відповідно, умови $(\mathcal{P})$ та $(\mathcal{B})$, $(a_0, a_1, \dots, a_n, h) \in \mathbb{AH}_p$, $(f_0, f_1, \dots, f_n) \in F_{p'}(Q)$, $u_0 \in H_b(\Omega)$. Крім того, припустимо, що*

$$K_1 - MT > 0. \qquad (8)$$

Тоді задача (2)–(4) *має єдиний узагальнений розв'язок і для нього правильна оцінка*

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega b(x)|u(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n \big|u_{x_i}(x,t)\big|^{p_i(x)} + |u(x,t)|^{p_0(x)} + |u(x,t)|^2 \Big\}\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \Big[\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{j=1}^n \big|f_j(x,t)\big|^{p'_j(x)} + g(x,t) \Big\} dxdt + \int\limits_\Omega b(x)|u_0(x)|^2\, dx \Big], \qquad (9)$$

де C_2 – додатна стала, яка залежить тільки від K_1, K_2, M, T і p_i^- $(i = \overline{0,n})$.

3. Обґрунтування основного результату

Спочатку введемо позначення:

$$\partial_0 w := w,\ \partial_i w := w_{x_i}\ (i = \overline{1,n}),$$
$$a_j(w)(x,t) := a_j(x,t,w(x,t),\, \nabla w(x,t)), \quad (x,t) \in Q \quad (j = \overline{0,n}),$$
$$h(w)(x,t,s) := h(x,t,s,w(x,s)),\ \ (x,t,s) \in \Omega \times (0,T) \times (0,T).$$

Нам буде потрібне таке твердження (див.[26, лема 2]).

Лема 1. *Нехай b задовольняє умову $(\mathcal{B})$, $w \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ така, що $b^{1/2}w \in L_2(Q)$ і для деяких функцій $g_i \in L_{p'_i(\cdot)}(Q)$ $(i = \overline{0,n})$ виконується тотожність*

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n g_i \partial_i v\varphi - bwv\varphi' \Big\}\, dxdt = 0, \quad v \in V_p(\Omega),\, \varphi \in C_c^1(0,T). \qquad (10)$$

Тоді $w \in C([0,T]; H_b(\Omega))$ *і для всіх* $\theta \in C^1([0,T])$, $v \in V_p(\Omega)$ *і* $t_1, t_2 \in [0,T]$ $(t_1 < t_2)$ *правильні рівності*

$$\theta(t_2)\int\limits_\Omega b(x)w(x,t_2)v(x)\,dx - \theta(t_1)\int\limits_\Omega b(x)w(x,t_1)v(x)\,dx +$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n g_i\partial_i v\theta - bwv\theta'\Big\}\,dxdt = 0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\theta(t_2)\int\limits_\Omega b(x)|w(x,t_2)|^2\,dx - \frac{1}{2}\theta(t_1)\int\limits_\Omega b(x)|w(x,t_1)|^2\,dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega b|w|^2\theta'\,dxdt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n g_i\partial_i w\Big\}\theta\,dxdt = 0\,, \tag{12}$$

а також нерівність

$$\max_{t\in[0,T]} ||b^{1/2}(\cdot)w(\cdot,t)||^2_{L_2(\Omega)} \le C_2\big(||b^{1/2}w||^2_{L_2(Q)} + \sum_{i=0}^n ||g_i||_{L_{p_i'(\cdot)}(Q)}\,||\partial_i w||_{L_{p_i(\cdot)}(Q)}\big)\,, \tag{13}$$

де $C_2 > 0$ *– стала, яка не залежить від* w *і* $g_0, \ldots, g_n$.

Доведення теореми 1. Спершу доведемо *єдиність* узагальненого розв'язку задачі (2)–(4). Припустимо протилежне і нехай u_1 та u_2 – різні узагальнені розв'язки даної задачі. Розглянемо різницю між тотожностями, які отримали з (7) підстановкою замість u спочатку u_1, а потім – u_2. Із здобутої тотожності на підставі леми 1 при $w = u_1 - u_2$, $\theta \equiv 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = T$ матимемо (див. (12)) рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega b(x)|w(x,T)|^2\,dx + \iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (a_i(u_1) - a_i(u_2))(\partial_i u_1 - \partial_i u_2) +$$
$$+(u_1 - u_2)\int\limits_0^t \Big(h(u_1)(x,t,s) - h(u_2)(x,t,s)\Big)ds\Big\}\,dxdt = 0. \tag{14}$$

Розглянемо члени лівої частини рівності (14). З умови $(\mathcal{A}_3)$ одержимо нерівність

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (a_i(u_1) - a_i(u_2))(\partial_i u_1 - \partial_i u_2)\Big\}\,dxdt \geqslant K_1 \iint\limits_Q |u_1 - u_2|^2\,dxdt. \tag{15}$$

На підставі умови $(\mathcal{H}_2)$ (див. (6)) отримаємо

$$|h(u_1)(x,t,s) - h(u_2)(x,t,s)| \leqslant M|u_1(x,s) - u_2(x,s)| \tag{16}$$

для м.в. $(x,t,s) \in \Omega \times (0,T) \times (0,T)$.

Використавши нерівність Коші-Буняковського та оцінку (16), матимемо

$$\Big|\iint\limits_Q \Big\{\big(u_1(x,t)-u_2(x,t)\big)\int\limits_0^t \big(h(u_1)(x,t,s)-h(u_2)(x,t,s)\big)ds\Big\}dxdt\Big| \leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_\Omega \Big(\int\limits_0^T |w(x,t)|dt\Big)\Big(\int\limits_0^T |w(x,s)|ds\Big)dx = M\int\limits_\Omega \Big(\int\limits_0^T |w(x,t)|dt\Big)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant MT\iint\limits_Q |w(x,t)|^2 dxdt\,. \qquad (17)$$

На підставі оцінок (15) і (17) з (14) отримаємо

$$\big(K_1 - MT\big)\iint\limits_Q |w(x,t)|^2\,dxdt \leqslant 0\,.$$

Звідси, врахувавши нерівність (6), отримаємо рівність $\iint\limits_Q |w(x,t)|^2\,dxdt = 0$, тобто, рівність $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ для м.в. $(x,t)\in Q$. Це суперечить нашому припущенню, що і доводить єдиність узагальненого розв'язку задачі (2)–(4).

Тепер доведемо *існування* узагальненого розв'язку задачі (2)–(4), використавши метод Фаедо-Гальоркіна. Отож, нехай $\{w_j \in V_p(\Omega)\,|\, j\in\mathbb{N}\}$ – лінійно незалежна сім'я функцій, яка є повною в просторі $V_p(\Omega)$. Очевидно, що ця сім'я функцій є повною і в $H_b(\Omega)$. Пприймемо $V_{p,m}(\Omega) = \Big\{\sum\limits_{k=1}^m \alpha_k w_k \;\Big|\; \alpha_1,\dots,\alpha_m\in\mathbb{R}\Big\}$, $m\in\mathbb{N}$. Очевидно, що замикання $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} V_{p,m}(\Omega)$ в $V_p(\Omega)$ збігається з $V_p(\Omega)$.

Оскільки сім'я функцій $\big\{w_j \mid j\in\mathbb{N}\big\}$ є повною в $H_b(\Omega)$, то можна вибрати послідовність функцій $\{u_{0,m}\}_{m=1}^\infty$ таку, що $u_{0,m}\in V_{p,m}(\Omega)$ для всіх $m\in\mathbb{N}$ і

$$||u_0 - u_{0,m}||_{H_b(\Omega)} = ||b^{1/2}u_0 - b^{1/2}u_{0,m}||_{L_2(\Omega)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \qquad (18)$$

Тепер зауважимо, що для м.в. $x\in\Omega$ і для будь-якого $\eta\in[0,1]$ матимемо

$$|b^{1/2}(x) - (b(x)+\eta)^{1/2}|^2|u_{0,m}(x)|^2 \le 4(b(x)+1)|u_{0,m}(x)|^2.$$

Звідси на підставі теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла (див. [30]) для будь-якого $m\in\mathbb{N}$ отримаємо

$$||b^{1/2}u_{0,m} - (b+\eta)^{1/2}u_{0,m}||_{L_2(\Omega)} \underset{\eta\to+0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Отож, існує послідовність $\{\eta_m\}_{m=1}^\infty$ чисел з інтервалу $(0,1)$ така, що $\eta_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ і

$$||b^{1/2}u_{0,m} - (b+\eta_m)^{1/2}u_{0,m}||_{L_2(\Omega)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \qquad (19)$$

Приймемо

$$b_m(x) := b(x) + \eta_m, \quad x\in\Omega, \ \ m\in\mathbb{N}. \qquad (20)$$

На підставі (18) та (19) одержимо

$$||b^{1/2}u_0 - b_m^{1/2}u_{0,m}||_{L_2(\Omega)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{21}$$

Тепер перейдемо безпосередньо до використання методу Фаедо-Гальоркіна. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ гальоркінське наближення u_m шукаємо у вигляді

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_{m,k}(t) w_k(x)\,, \quad (x,t) \in \overline{Q}\,,$$

де $c_{m,1}, \ldots, c_{m,m}$ – абсолютно неперервні функції, які є розв'язками задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\int\limits_{\Omega_t} b_m u_{m,t} w_j\, dx + \int\limits_{\Omega_t} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} (a_i(u_m) - f_i)\partial_i w_j + \tag{22}$$

$$+ w_j \int\limits_0^t h(u_m)\, ds \Big\}\, dx = 0,\ \ t \in\ [0,T], \quad j = \overline{1,m}\,,$$

$$u_m|_{t=0} = u_{0,m}\,, \tag{23}$$

де $\Omega_t := \{(x,t) |\, x \in \Omega\}$, $t \in\ [0,T]$.

Доведемо існування та єдиність розв'язку задачі (22), (23). Оскільки функції $w_1, \ldots, w_m$ – лінійно незалежні, то матриця $\Big(a^m_{k,j} := \int\limits_\Omega b_m w_k w_j\, dx\Big)_{k,j=1}^m$ – додатно визначена. Отже, систему звичайних диференціальних рівнянь (22) можна записати в нормальній формі. За теоремою Каратеодорі (див. [1]) отримаємо існування та єдиність глобального розв'язку $c_{1,m}, \ldots.., c_{m,m}$ задачі (22), (23). Цей розв'язок визначений на проміжку $[0, T_m\rangle$, де $T_m \le T$. Тут кутова дужка "$\rangle$" означає або круглу ")", або квадратну "]" дужку. Далі ми отримаємо оцінки, з яких, зокрема, випливатиме, що $[0, T_m\rangle = [0, T]$.

Для кожного $j \in \{1, ..., m\}$ і майже кожного $t \in (0, T)$ домножимо рівність з номером j системи (22) на $c_{m,j}(t)$ і підсумуємо отримані рівності. У результаті для м.в. $t \in (0, T)$ одержимо

$$\int\limits_{\Omega_t} b_m u_{m,t} u_m\, dx + \int\limits_{\Omega_t} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} (a_i(u_m) - f_i)\partial_i u_m + u_m \int\limits_0^t h(u_m)\, ds \Big\}\, dx = 0. \tag{24}$$

Проінтегруємо рівність (24) за $t \in [0, \tau] \subset [0, T_m\rangle$, використавши формулу інтегрування частинами. У результаті отримаємо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega b_m(x)|u_m(x,\tau)|^2\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2\, dx +$$

$$+[\delta + (1-\delta)] \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_i(u_m)\partial_i u_m \Big\}\, dxdt +$$

$$+\int_0^\tau\!\!\int_\Omega \Big\{u_m \int_0^t h(u_m)\,ds\Big\}\,dxdt = \int_0^\tau\!\!\int_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n f_i \partial_i u_m\Big\}\,dxdt, \tag{25}$$

де $\tau \in (0, T_m\rangle$, $\delta \in (0,1)$ – довільні числа.

Зробимо відповідні оцінки членів рівності (25). На підставі умов $(\mathcal{A}_1)$ і $(\mathcal{A}_3)$ матимемо таку оцінку:

$$\int_0^\tau\!\!\int_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n a_i(u_m)\partial_i u_m\Big\}\,dxdt \geqslant K_1 \int_0^\tau\!\!\int_\Omega |u_m(x,t)|^2\,dxdt, \tag{26}$$

а з умови $(\mathcal{A}_4)$ одержимо

$$\int_0^\tau\!\!\int_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n a_i(u_m)\partial_i u_m\Big\}dxdt \geqslant K_2 \int_0^\tau\!\!\int_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}dxdt - \int_0^\tau\!\!\int_\Omega g(x,t)dxdt. \tag{27}$$

З умов $(\mathcal{H}_1)$ і $(\mathcal{H}_2)$ легко випливає нерівність

$$|h(u_m)(x,t,s)| \leqslant M|u_m(x,s)| \tag{28}$$

для м.в. $(x,t,s) \in \Omega \times (0,T) \times (0,T)$.

Врахувавши оцінку (28) та використавши нерівність Коші-Буняковського, матимемо

$$\Big|\int_0^\tau\!\!\int_\Omega \Big\{u_m(x,t)\int_0^t h(u_m)(x,t,s)ds\Big\}dxdt\Big| \leqslant \int_0^\tau\!\!\int_\Omega \Big\{|u_m(x,t)|\cdot \int_0^t |h(u_m)(x,t,s)|ds\Big\}dxdt \leqslant$$

$$\leqslant M\int_\Omega \Big\{\Big(\int_0^\tau |u_m(x,t)|dt\Big)\Big(\int_0^\tau |u_m(x,s)|ds\Big)\Big\}dx \leqslant MT\int_0^\tau\!\!\int_\Omega |u_m(x,t)|^2 dxdt\,. \tag{29}$$

Далі використовуватимемо нерівність Юнга

$$ab \le \varepsilon|a|^q + \varepsilon^{-\frac{1}{q-1}}|b|^{q'}, \quad a,b \in \mathbb{R},\ q>1,\ \varepsilon>0, \tag{30}$$

де $q' = q/(q-1)$.

Виберемо довільно значення $\varepsilon \in (0,1)$. Використовуючи нерівність (30), отримаємо

$$\int_0^\tau\!\!\int_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n f_i(x,t)\partial_i u_m(x,t)\Big\}\,dxdt \leqslant \varepsilon \int_0^\tau\!\!\int_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\,dxdt +$$

$$+\int_0^\tau\!\!\int_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n \varepsilon^{-\frac{1}{p_i^- - 1}}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}\Big\}\,dxdt. \tag{31}$$

З (25) на підставі (26), (27), (29) та (31) одержимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b_m(x)|u_m(x,\tau)|^2\,dx + \delta K_1\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2\,dxdt+$$
$$+(1-\delta)K_2\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\,dxdt \leqslant MT\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2dxdt+$$
$$+\varepsilon\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\,dxdt+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{-\frac{1}{p_i^- -1}}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}\,dxdt\Big\}+$$
$$+(1-\delta)\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}g(x,t)\,dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2\,dx, \tag{32}$$

де $\tau\in(0,T_m\rangle$.

З (32) безпосередньо отримаємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} b_m(x)|u_m(x,\tau)|^2\,dx + (\delta K_1 - MT)\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2\,dxdt+$$
$$+[(1-\delta)K_2-\varepsilon]\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}dxdt \leqslant \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{-\frac{1}{p_i^- -1}}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}\,dxdt\Big\}+$$
$$+(1-\delta)\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}g(x,t)\,dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2\,dx,\quad \tau\in(0,T_m\rangle. \tag{33}$$

Виберемо і зафіксуємо значення $\delta\in(0,1)$ таке, що $\delta K_1 - MT>0$ (це можна зробити на підставі (8)), а потім – значення $\varepsilon\in(0,1)$ таке, що $(1-\delta)K_2-\varepsilon>0$, і підставимо їх в (33). У результаті здобудемо нерівність

$$\int\limits_{\Omega} b_m(x)|u_m(x,\tau)|^2\,dx + C_3\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}dxdt + C_4\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)|^2\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_5\Big[\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}+g(x,t)\Big\}\,dxdt+\int\limits_{\Omega}b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2\,dx\Big], \tag{34}$$

де $\tau\in(0,T_m\rangle$ – довільне, а C_3,C_4,C_5 – додатні сталі, які залежать тільки від K_1, K_2, M, T і p_i^- $(i=\overline{0,n})$.

З (19) випливає, що

$$\int\limits_{\Omega} b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2\,dx \underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\int\limits_{\Omega}b(x)|u_0(x)|^2\,dx. \tag{35}$$

Отже, послідовність $\Big\{ \int\limits_\Omega b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2\, dx \Big\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою, тому на підставі нерівності (34) можна зробити висновок, що існує незалежна від T_m стала, яка обмежує функцію $t \mapsto \int\limits_\Omega b_m(x)|u_m(x,t)|^2\, dx$ на $[0, T_m\rangle$, а отже, існує незалежна від T_m стала, яка обмежує функції $c_{m,1}, \ldots, c_{m,m}$ на $[0, T_m\rangle$. Внаслідок цього отримаємо, що $[0, T_m\rangle = [0, T]$. Враховуючи це, з (34) отримаємо нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega b_m(x)|u_m(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)} + |u_m(x,t)|^2 \Big\}\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \Big[\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n |f_i(x,t)|^{p_i'(x)} + g(x,t) \Big\}\, dxdt + \int\limits_\Omega b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2\, dx \Big], \qquad (36)$$

де $C_6 > 0$ – стала, яка залежать тільки від K_1, K_2, M, T і p_i^- $(i = \overline{0,n})$.

На підставі (35) і (36) одержуємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \int\limits_\Omega b_m(x)|u_m(x,t)|^2\, dx \le C_7\,, \qquad (37)$$

$$\iint\limits_Q |u_m(x,t)|^2\, dxdt \le C_7\,, \qquad (38)$$

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)} \Big\}\, dxdt \le C_7\,, \qquad (39)$$

де $C_7 > 0$ – стала, що не залежить від m.

З умов $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, (28) та оцінок (38) і (39) отримаємо

$$\iint\limits_Q |a_i(u_m)(x,t)|^{p_i'(x)}\, dxdt \le C_8\,, \quad i = \overline{0,n}\,, \qquad (40)$$

$$\iint\limits_Q \Big| \int\limits_0^t h(u_m)(x,t,s)\, ds \Big|^2\, dxdt \leqslant C_9, \qquad (41)$$

де сталі C_8 і C_9 – додатні, що не залежать від m.

Оскільки простори $L_2(Q)$, $L_{p_i(\cdot)}(Q)$, $L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i = \overline{0,n})$ рефлексивні (див. [11, с. 600]), то з оцінок (37)–(41) випливає існування підпослідовності послідовності $\{u_m\}$ (позначатимемо її так само, як і саму послідовність) та функцій $v_* \in L_2(\Omega)$, $u \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q)$, $\chi_i \in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i = \overline{0,n})$ і $\zeta \in L_2(Q)$ таких, що

$$b_m^{1/2}(\cdot) u_m(\cdot, T) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v_*(\cdot) \quad \text{слабко в} \quad L_2(\Omega), \qquad (42)$$

$$u_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в} \quad L_2(Q) \;\; \text{і слабко в} \quad \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q), \qquad (43)$$

$$a_i(u_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \;\; \text{слабко в} \;\; L_{p_i'(\cdot)}(Q) \quad (i = \overline{0,n}), \qquad (44)$$

$$\int_0^t h(u_m)\,ds \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \zeta \quad \text{слабко в} \quad L_2(Q). \tag{45}$$

Доведемо, що u є узагальненим розв'язком задачі (2)–(4). Спочатку зауважимо, що для будь-яких функцій $v \in L_2(\Omega)$, $\zeta \in L_2(0,T)$ на підставі означення b_m і теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла маємо

$$b_m^{1/2} v \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} b^{1/2} v \quad \text{сильно в} \quad L_2(\Omega) \quad \text{і майже скрізь на} \quad \Omega, \tag{46}$$

$$b_m v\zeta \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} bv\zeta \quad \text{сильно в} \quad L_2(Q). \tag{47}$$

Тепер виберемо довільно та зафіксуємо числа $j, m \in \mathbb{N}$ такі, що $m \geq j$. Рівність системи (22) під номером j помножимо на довільну функцію $\theta \in C^1([0,T])$ і проінтегруємо здобуту рівність по $t \in [0,T]$. У результаті після нескладних перетворень, використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$\theta(T)\int_\Omega b_m(x)u_m(x,T)w_j(x)\,dx - \theta(0)\int_\Omega b_m(x)u_{0,m}(x)w_j(x)\,dx -$$

$$-\iint_Q b_m u_m w_j \theta'\,dxdt + \iint_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (a_i(u_m) - f_i)\partial_i w_j + w_j \int_0^t h(u_m)ds\Big\}\theta\,dxdt = 0\,. \tag{48}$$

Спрямувавши m до ∞ в (48) і врахувавши (21), (42), (43), (44)–(47), отримаємо

$$\theta(T)\int_Q b^{1/2}(x)v_*(x)w_j(x)\,dx - \theta(0)\int_Q b(x)u_0(x)w_j(x)\,dx -$$

$$-\iint_Q buw_j\theta'\,dxdt + \iint_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (\chi_i - f_i)\partial_i w_j + \zeta w_j\Big\}\theta\,dxdt = 0\,. \tag{49}$$

Оскільки j – довільне число, а система функцій $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ повна в просторі $V_p(\Omega)$, то з (49) матимемо, що для всіх $v \in V_p(\Omega)$ і $\theta \in C^1([0,T])$ правильна рівність

$$\theta(T)\int_\Omega b^{1/2}(x)v_*(x)v(x)\,dx - \theta(0)\int_\Omega b(x)u_0(x)v(x)\,dx -$$

$$-\iint_Q buv\theta'\,dxdt + \iint_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (\chi_i - f_i)\partial_i v + \zeta v\Big\}\theta\,dxdt = 0\,. \tag{50}$$

Зауважимо таке: оскільки $C_c^1(0,T) \subset C^1([0,T])$, то з (50) отримаємо тотожність

$$\iint_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (\chi_i - f_i)\partial_i v\varphi + \zeta v\varphi - buv\varphi'\Big\}dxdt = 0, \quad \text{де} \ \ v \in V_p(\Omega),\ \varphi \in C_c^1(0,T). \tag{51}$$

На підставі леми 1 з (51) одержимо, що

$$u \in C([0,T]; H_b(\Omega)) \tag{52}$$

і для всіх $v \in V_p(\Omega)$, $\theta \in C^1([0,T])$ правильна рівність

$$\theta(T)\int\limits_\Omega b(x)u(x,T)v(x)\,dx - \theta(0)\int\limits_\Omega b(x)u(x,0)v(x)\,dx -$$
$$-\iint\limits_Q buv\theta'\,dxdt + \iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (\chi_i - f_i)\partial_i v + \zeta v\Big\}\theta\,dxdt = 0\,. \tag{53}$$

Порівнюючи (50) і (53), отримаємо рівності

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{для м. в.} \quad x \in \Omega_0\,, \tag{54}$$
$$b^{1/2}(x)u(x,T) = v_*(x) \quad \text{для м. в.} \quad x \in \Omega. \tag{55}$$

Отож, ми встановили, що функція u належить простору $U_p^b(Q)$ (див.(43) і (52)), задовольняє початкову умову (4) (див. (54)) та інтегральну тотожність (51). З тотожності (51) випливатиме тотожність (7), якщо для будь-яких $v \in V_p(\Omega)$ і майже всіх $t \in (0,T)$ правильна рівність

$$\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n \chi_i\partial_i v + \zeta v\Big\}\,dx = \int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n a_i(u)\partial_i v + \Big(\int\limits_0^t h(u)\,ds\Big)v\Big\}\,dx\,. \tag{56}$$

Отже, якщо тотожність (56) правильна, то u – узагальнений розв'язок задачі (2)–(4).

Для доведення тотожності (56) використаємо метод монотонності (див. [12]). Нехай w – довільна функція з простору $\in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q)$. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ визначимо

$$W_m := \iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (a_i(u_m) - a_i(w))(\partial_i u_m - \partial_i w) +$$
$$+ (u_m - w)\Big(\int\limits_0^t h(u_m)\,ds - \int\limits_0^t h(w)\,ds\Big)\Big\}\,dxdt. \tag{57}$$

Використавши умову $(\mathcal{A}_3)$, для довільного $m \in \mathbb{N}$ отримаємо таку оцінку

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (a_i(u_m) - a_i(w))(\partial_i u_m - \partial_i w)\Big\}\,dxdt \geqslant K_1 \iint\limits_Q |u_m - w|^2\,dxdt. \tag{58}$$

Провівши міркування, аналогічні до тих, які привели нас до (17), отримаємо оцінку

$$\Big|\iint\limits_Q \Big\{(u_m(x,t) - w(x,t))\Big(\int\limits_0^t h(u_m)(x,t,s)\,ds - \int\limits_0^t h(w)(x,t,s)\,ds\Big)\Big\}\,dxdt\Big| \leqslant$$
$$\leqslant MT\iint\limits_Q |u_m - w|^2\,dxdt, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{59}$$

Отже, врахувавши (8), одержимо

$$W_m \geqslant \big(K_1 - MT\big) \iint\limits_Q |u_m - w|^2 \, dxdt \geqslant 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{60}$$

Запишемо (57) у вигляді

$$W_m = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n a_i(u_m)\partial_i u_m + u_m \int\limits_0^t h(u_m)\, ds \Big\}\, dxdt -$$

$$- \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n \big[a_i(u_m)\partial_i w + a_i(w)(\partial_i u_m - \partial_i w)\big] +$$

$$+ w \int\limits_0^t h(u_m)\, ds + (u_m - w) \int\limits_0^t h(w)\, ds \Big\}\, dxdt, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{61}$$

Приймемо $\tau = T$ в (25). Отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n a_i(u_m)\partial_i u_m + u_m \int\limits_0^t h(u_m) ds \Big\}\, dxdt \; = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u_m \Big\}\, dxdt -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b_m(x)|u_m(x,T)|^2 \, dx \; + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2 \, dx, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{62}$$

З (61) на підставі (62) отримаємо

$$0 \leqslant W_m = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u_m \Big\}\, dxdt - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b_m(x)|u_m(x,T)|^2 \, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b_m(x)|u_{0,m}(x)|^2 \, dx - \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n \big[a_i(u_m)\partial_i w + a_i(w)(\partial_i u_m - \partial_i w)\big] +$$

$$+ w \int\limits_0^t h(u_m)\, ds + (u_m - w) \int\limits_0^t h(w)\, ds \Big\}\, dxdt, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{63}$$

На підставі (42) та (55) матимемо

$$\liminf_{m\to\infty} ||b_m^{1/2}(\cdot) u_m(\cdot, T)||_{L_2(\Omega)} \geq ||b^{1/2}(\cdot) u(\cdot, T)||_{L_2(\Omega)}\,. \tag{64}$$

Зважаючи на (21), (43) – (45), (64), з (63) одержуємо

$$0 \leq \limsup_{m\to\infty} W_m \leq \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u \Big\} dxdt - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b(x)|u(x,T)|^2 dx + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b(x)|u_0(x)|^2 dx -$$

$$- \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n \big[\chi_i \partial_i w + a_i(w)(\partial_i u - \partial_i w)\big] + w\zeta + (u - w) \int\limits_0^t h(w)\, ds \Big\} dxdt\,. \tag{65}$$

Із (51), використовуючи лему 1 при $\theta \equiv 1$ і рівність (54), отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n \chi_i \partial_i u + \zeta u \Big\}\, dxdt = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u \Big\}\, dxdt -$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b(x) |u(x,T)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b(x) |u_0(x)|^2 \, dx\,. \qquad (66)$$

Отже, з (65) і (66) одержимо

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n (\chi_i - a_i(w))(\partial_i u - \partial_i w) + \Big(\zeta - \int\limits_0^t h(w)\, ds\Big)(u - w)\Big\} dxdt \geq 0\,. \qquad (67)$$

Приймемо $w = u - \lambda v\varphi$ в (67), де $v \in V_p(\Omega)$, $\varphi \in C_c^1(0,T)$, $\lambda > 0$, і поділимо отриману нерівність на λ. У підсумку матимемо

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n (\chi_i - a_i(u - \lambda v\varphi))\partial_i v\varphi + \big(\zeta - \int\limits_0^t h(u - \lambda v\varphi)\, ds\big) v\varphi \Big\}\, dxdt \geq 0\,. \qquad (68)$$

Перейдемо в (68) до границі при $\lambda \to 0+$, використавши умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ і теорему Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла. У результаті отримаємо рівність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n (\chi_i - a_i(u))\partial_i v + \big(\zeta - \int\limits_0^t h(u)\, ds\big) v \Big\} \varphi\, dxdt = 0$$

для будь-яких $v \in V_p(\Omega)$ і $\varphi \in C_c^1(0,T)$. Звідси легко випливає тотожність (56).

Доведемо, що виконується оцінка (9). На підставі леми 1 з інтегральної тотожності (7), враховуючи (4), отримаємо рівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_\Omega b(x)|u(x,\tau)|^2\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega b(x)|u_0(x)|^2\, dx + [\delta + (1-\delta)] \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^n a_i(u) \partial_i u \Big\}\, dxdt +$$
$$+ \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ u \int\limits_0^t h(u)\, ds \Big\}\, dxdt = \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u \Big\}\, dxdt, \quad \tau \in [0,T]. \qquad (69)$$

де $\delta \in (0,1)$ – довільне число. Далі, міркуючи цілком аналогічно, як для переходу від (25) до (36), здобудемо (9). Теорема повністю доведена. □

4. Висновки

Ми дослідили мішані задачі для вироджуваних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності, що збурені інтегральним оператором. Збурюючий оператор інколи називають оператором пам'яті, оскільки значення образу при дії цього оператора залежить від значень шуканої функції в моменти часу, які передують актуальному. Такого типу рівняння раніше не вивчалися. При цьому на частині межі задано крайову умову першого роду, а на іншій — другого. Введено поняття узагальненого розв'язку мішаної задачі для розглядуваних рівнянь, використавши узагальнені простори Лебега та Соболєва. Встановлено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків досліджуваних задач. При доведенні існування розв'язку використано модифікації методів Фаедо-Гальоркіна та монотонності.

Список використаної літератури

1. *Alexiewicz A., Orlicz W.* On a theorem of C. Caratheodory // Ann. Pol. Math. — 1955. — **1**, №2. — P. 414–417.
2. *Alkhutov Y., Antontsev S., Zhikov V.* Parabolic equations with variable order of nonlinearity // Collection of works of Institute of Mathematics NAS of Ukraine. — 2009. — **6**. — P. 23–50.
3. *Antontsev S., Shmarev S.* Extinction of solutions of parabolic equations with variable anisotropic nonlinearities // Proc. Steklov Inst. Math. — 2008. — **261**, №1. — P. 11–21.
4. *Bokalo M.M., Domanska O.V.,* On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces // Mat. Stud. — 2007. — **28**, №1. — P. 77–91.
5. *Bokalo M.M., Pauchok I.B.* On the well-posedness of a Fourier problem for nonlinear parabolic equations of higher order with variable exponents of nonlinearity // Mat. Stud. — 2006. — **24**, №1. – P. 25–48.
6. *Buhrii O.M., Lavrenyuk, S.P.* On a parabolic variational inequality that generalizes the equation of polytropic filtration // Ukr. Math. J. — 2001. — **53**, №7. — P. 1027–1042.
7. *Buhrii O.M., Mashiyev R.A.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. — 2009. — **70**, №6. — P. 2331–2335.
8. *Fan X., Zhao D.* On the space $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$ // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — **263**, №2. — P. 424–446.
9. *Fu Y., Pan N.* Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth // J. Math. Anal. Appl. — 2010. — **362**, №2. — P. 313–326.
10. *Kováčik O.* Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$ // Fasc. Math. — 1995. — **25**. — P. 87–94.
11. *Kováčik O., Rákosník J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,\,p(x)}$ // Czech. Math. J. — 1991. — **41(116)**, №4. — P. 592–618.
12. *Lions J.* Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. — Paris: Dunod Gauthier-Villars. — 1969.
13. *Mashiyev R.A., Buhrii O.M.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — **377**, №2. — P. 450-463.
14. *Musielak J.* Orlicz spaces and modular spaces // Lect. Notes Math. — Berlin-Heidelberg: Springer. — 1983. — **1034**. — 222 p.
15. *Orlicz W.* Über konjugierte Exponentenfolgen // Stud. Math. — 1931. — **3**, №1. — P. 200–211.
16. *Růžička M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory // Lect. Notes Math. — Berlin-Heidelberg: Springer. — 2000. — **1748**. — 176 p.
17. *Zhikov V.V., Pastukhova, S.E.* Lemmas on compensated compactness in elliptic and parabolic equations // Proc. Steklov Inst. Math. — 2010. — 270, №1. – P. 104–131.

18. *Abbasbandy S., Ghehsareh H.R.* The He's variational iteration method for solving the integro-differential parabolic problem with integral conditions // Appl. Appl. Math. — 2010. — **Special Issue**, №1. — P. 12–23.
19. *Colombo F.* Direct and inverse problems for a phase-field model with memory // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — 260, №2. — P. 517–545.
20. *Kozhanov A.I.* Parabolic equations with nonlocal nonlinear source // Sib. Math. J. — 1994. — **35**, №5. — P. 945–956.
21. *Kumar K., Kumar R., Shukla R.K.* Nonlocal parabolic integro-differential equations with delays // Int. J. Appl. Math. Res. — 2012. — **1**, №4. — P. 549–564.
22. *Loayza M.* Asymptotic behavior of solutions to parabolic problems with nonlinear nonlocal terms // Electron. J. Differ. Equ. — 2013. — **2013**, №228. — P. 1–12.
23. *Souplet P.* Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source // J. Differ. Equations. — 1999. — **153**, №2. — P. 374–406.
24. *Yamada Y.* Asymptotic stability for some system of semilinear Volterra diffusion equations // J. Differ. Equations. — 1984. — **52**, №3. — P. 295–326.
25. *Yamada Y.* On a certain class of semilinear Volterra diffusion equations // J. Math. Anal. Appl. – 1982. — **88**, №2. — P. 443–457.
26. *Bokalo M.M., Buhrii O.M., Mashiyev R.A.* Unique solvability of initial-boundary-value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity // J. Nonlinear Evol. Equ. Appl. — 2014. — 2013, №6. — P. 67–87.
27. *Engler H.* On some parabolic integro-differential equations: existence and asymptotics of solutions // Lect. Notes Math. — 1983. — **1017**. – P. 161–167.
28. *Heard M., Rankin S.* A semilinear parabolic Volterra integro-differential equation // J. Differential Equations. — 1988. — **71**, №2. — P. 201–233.
29. *Liut D., Mu C.* Blow-up analysis for a semilinear perabolic equation with nonlinear memory and nonlocal nonlinear boundary condition // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2010. — №51. — P. 1–17.
30. *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. — Providence: Amer. Math. Soc. – 1997.
31. *Kováčik O.* Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$ // Fasc. Math. — 1995. — **25**. — P. 87–94.
32. *Buhrii O., Domans'ka G., Protsakh N.* Initial boundary value problem for nonlinear differential equation of the third order in generalized Sobolev spaces // Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. — 2005. — **64**. – P. 44–61.
33. *Andreu F., Igbida, N. Mazón J., Toledo J.* A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions // Interfaces Free Bound. — 2006. — **8**, №4. — P. 447–479.
34. *Bokalo M.* The unique solvability of a problem without initial conditions for linear and nonlinear elliptic-parabolic equations / *M. Bokalo* // J. Math. Sci. — 2011. — **178**, №1. — P. 41–64.
35. *Ivanov A.* Quasilinear degenerate and nonuniformly elliptic and parabolic second-order equations // Proc. Steklov Inst. Math. — 1984. — **160**. — P. 1-–288
36. *Showalter R.E.* Degenerate evolution equations and applications // Indiana Univ. Math. J. — 1974. – *23*, №. 8. — P. 655–677.

Стаття: надійшла до редколегії 27.02.2017
прийнята до друку 13.03.2017

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS WITH INTEGRAL OPERATORS TYPE VOLTERRA

Mykola BOKALO, Olga SUS

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str. 1, Lviv, 79000
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, oliasus@gmail.com

This paper is devoted to the results of investigation of initial-boundary value problems for nonlinear integro-differential equations with variable exponents of nonlinearity. We consider weak solutions which belong to the generalized Sobolev and Lebesgue spaces. Under certain conditions on data-in the uniqueness and existence of the solutions are proved. Also estimates of the solutions are obtained.

Key words: elliptic-parabolic equations, variable exponents of nonlinearity, Galerkin's and monotone procedures.