ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 109–122
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 109–122

УДК 517.9

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ЕЛІПТИЧНО-ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

Микола БОКАЛО, Ірина СКІРА

Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: mm.bokalo@gmail.com, irusichka.skira@gmail.com

Доведено коректність задачі Фур'є для анізотропних еліптично-параболічних інтегро-диференціальних систем зі змінними показниками нелінійності без обмежень на зростання розв'язків і вихідних даних при прямуванні часової змінної до $-\infty$.

Ключові слова: задача Фур'є, задача без початкових умов, система еліптично-параболічних рівнянь, функціонально-диференціальне рівняння.

1. Вступ.

Нехай n, N – натуральні числа, $\mathbb{R}^n$ (відповідно, $\mathbb{R}^N$) – лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $x = (x_1, ..., x_n)$ (відповідно, $y = \mathrm{col}(y_1, ..., y_N)$) дійсних чисел і наділений нормою $|x| := (|x_1|^2 + ... + |x_n|^2)^{1/2}$ (відповідно, $|y| := (|y_1|^2 + ... + |y_N|^2)^{1/2}$). Позначаємо через $M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ – лінійний простір, складений з матриць $\zeta = (\zeta_{kl}) = (\zeta_{kl}; k = \overline{1,N}, l = \overline{0,n})$ розмірності $N \times (n+1)$ з дійсними елементами і наділений нормою $|\zeta| = (\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=0}^{n}|\zeta_{ij}|^2)^{1/2}$.

Вважаємо, що Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, а $\partial\Omega$ (її межа) – кусково-гладка поверхня, причому $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_0 – замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема, Γ_0 може бути порожньою множиною або збігатися з $\partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$; $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі.

Позначаємо $S := (-\infty, 0)$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times S$, $Q_{t_1,t_2} := \Omega \times (t_1, t_2)$ для довільних $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$.

2010 Mathematics Subject Classification: 35D30, 35K20, 35K55.

Розглядаємо *задачу*: знайти векторну функцію $u = \mathrm{col}(u_1 \dots u_N) : \overline{Q} \to \mathbb{R}^N$, яка задовольняє (в певному сенсі) систему рівнянь

$$(b_i(x)u_i)_t - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_{ij}(x,t,\delta u) + a_{i0}(x,t,\delta u) + \int\limits_{\Omega} c_i(x,y,t,u(y,t))dy =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{ij}(x,t) + f_{i0}(x,t), \quad (x,t) \in Q\,, \quad i = \overline{1,N}\,, \tag{1}$$

та крайові умови

$$u_i\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial \nu_a}\Big|_{\Sigma_1} = 0, \quad i = \overline{1,N}\,, \tag{2}$$

де $b_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $(i = \overline{1,N})$, $a_{ij} : Q \times M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$, $c_i : \Omega \times \Omega \times S \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,N})$, $f_{ij} : Q \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$ – задані дійснозначні функції, причому $b_i(x) \geqslant 0\,(i = \overline{1,N})$ для майже всіх (м. в.) $x \in \Omega$.

Тут і далі $\nabla u := (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ – матриця, складена з похідних u_{i,x_j} $(i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n})$, $\delta u := (u, \nabla u)$, $\partial u_i(x,t)/\partial \nu_a := \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t,\delta u)\,\nu_j(x)$, $(x,t) \in \Sigma_1$, – похідна по "конормалі".

Прикладом систем вигляду (1), які вивчаються, є система

$$u_{i,t} - \sum_{j=1}^{n} \Big(\widehat{a}_{ij}(x,t)|u_{i,x_j}|^{p_{ij}(x)-2} u_{i,x_j}\Big)_{x_j} + \widehat{a}_{i0}(x,t)|u_i|^{p_{i0}(x)-2}u_i +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{N} \widehat{c}_{ik}(x,y,t)u_k(y,t)dy = f_i(x,t), \quad (x,t) \in Q,\ i = \overline{1,N}, \tag{3}$$

де $\widehat{a}_{ij}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$ – вимірні, обмежені, додатні та відділені від нуля функції, $\widehat{c}_{ik}$ $(i,k = \overline{1,N})$ – вимірні й обмежені функції, f_i $(i = \overline{1,N})$ – інтегровні з деяким степенем функції, $p_{ij} > 1$ $(i = \overline{1,N},\ j = \overline{0,n})$ – вимірні та обмежені функції, які називають *показниками нелінійності.*

В останні десятиліття дуже активно вивчаються нелінійні диференціальні рівняння та їхні системи зі змінними показниками нелінійності, прикладами яких є (3) (див., наприклад, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]). Це пов'язано з тим, що такі рівняння і їхні системи виникають у математичному моделюванні різних типів фізичних процесів, зокрема, описують потоки електрореологічних речовин, процеси відновлення зображень, електричний струм у кондукторі під впливом змінного температурного поля [11].

Як добре відомо, крайові задачі для лінійних та багатьох нелінійних параболічних рівнянь, заданих в необмежених знизу за часовою змінною областях (задачі Фур'є), є коректними, якщо на їхні розв'язки та вихідні дані, крім крайових умов, накладені певні обмеження на їхнє зростання, коли часова змінна прямує до $-\infty$ ([12], [16], [17]). Проте є нелінійні параболічні рівняння, задачі Фур'є для яких однозначно розв'язні без будь-яких умов на нескінченності [1, 4, 5, 13, 15, 18, 19]. Тут розглядатимемо інтегро-диференціальні еліптично-параболічні системи, які мають таку саму властивість. Раніше для таких систем задачу Фур'є не розглядали. Зауважимо, що інтегро-диференціальні еліптично-параболічні рівняння та їхні системи широко використовують у математичному моделюванні складних явищ в сучасному природознавстві, економіці та техніці (наприклад, у теорії ядерних реакцій під час вивчення процесу уповільнення нейтронів у дифузії заряджених частинок у плазмі та в інших різноманітних задачах). Зокрема такі рівняння досліджували в [7, 8].

Зробивши додаткові припущення на вихідні дані, доведено однозначну розв'язність задач Фур'є для одного класу систем анізотропних вироджуваних параболічних рівнянь з інтегральними членами за відсутності обмежень на поведінку розв'язку та зростання вихідних даних при прямування часової змінної до $-\infty$. Отримані результати є узагальненням і доповненням результатів, які отримали для параболічних рівнянь зі сталими показниками нелінійності [14].

2. Основні позначення та факти.

Нехай $r \in L_\infty(\Omega)$, причому $r(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega$. Припустимо, що або $G = \Omega$, або $G = \Omega \times I$, де I – інтервал числової осі $\mathbb{R}$. Позначимо через $L_{r(\cdot)}(G)$ узагальнений простір Лебега, який складається з функцій $v \in L_1(G)$ таких, що $\rho_{G,r}(v) < \infty$, де $\rho_{G,r}(v) := \int\limits_\Omega |v(x)|^{r(x)}\,dx$, якщо $G = \Omega$, та $\rho_{G,r}(v) := \int\limits_{\Omega\times I} |v(x,t)|^{r(x)}\,dxdt$, якщо $G = \Omega \times I$. На цьому просторі введемо норму $\|v\|_{L_{r(\cdot)}(G)} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \leqslant 1\}$, з якою він є банаховим [12]. Якщо $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} r(x) > 1$, то спряжений простір $[L_{r(\cdot)}(G)]'$ може бути ототожненим з $L_{r'(\cdot)}(G)$, де r' є функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Позначимо через $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ лінійний простір вимірних функцій $g\colon Q \to \mathbb{R}$ таких, що їхнє звуження $g|_{Q_{t_1,t_2}}$ на Q_{t_1,t_2} належить до $L_{r(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ для будь-яких $t_1, t_2 \in S$. Цей простір є повним локально опуклим із системою півнорм $\big\{\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} \,\big|\, t_1, t_2 \in S,\, t_1 < t_2\big\}$. Послідовність $\{g_m\}$ — *сильно збіжна* (відповідно, *слабко збіжна*) в $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, якщо послідовність $\{g_m|_{Q_{t_1,t_2}}\}$ — сильно збіжна (відповідно, слабко збіжна) в $L_{r(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ для будь-яких $t_1, t_2 \in S\, (t_1 < t_2)$. Аналогічно визначаємо простір $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Нехай $p = (p_{ij}; i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}) \equiv (p_{ij})$ – матрична функція, яка задовольняє умову

$(\mathcal{P})$ $2 \leqslant p_{ij}^- := \operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} p_{ij}(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} p_{ij}(x) =: p_{ij}^+ < +\infty$, причому $p_{i0}^- > 2$ $(i = \overline{1,N}$, $j = \overline{0,n})$.

Через $p' = (p'_{ij}; i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}) \equiv (p'_{ij})$ позначатимемо матричну функцію таку, що $1/p_{ij}(x) + 1/p'_{ij}(x) = 1$ для м. в. $x \in \Omega$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$.

Нехай $W^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N) := \{v = \mathrm{col}(v_1,\ldots,v_N) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ – вимірна $|\, \partial_j v_i \in L_{p_{ij}(\cdot)}(\Omega)$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})\}$ з нормою $\|v\|_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N)} := \sum\limits_{i=1}^N \sum\limits_{j=0}^n \|\,\partial_j v_i\|_{L_{p_{ij}(\cdot)}(\Omega)}$, де тут і далі $\partial_0 w := w$, $\partial_j w := w_{x_j}$ $(j = \overline{1,n})$ для $w : \Omega \to \mathbb{R}$. Цей простір є банаховим і його називають узагальненим простором Соболєва.

Позначимо через $\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ замикання простору

$$\widetilde{C}^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N) := \bigl\{v \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N) \bigm| \operatorname{supp} v - \text{обмежена множина}, \quad v\bigr|_{\Gamma_0} = 0\bigr\}$$

в $W^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Для зручності викладення матеріалу позначимо $\mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N) := \widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Для довільних $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $(t_1 < t_2)$ введемо простір

$$W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N) := \bigl\{w\colon Q_{t_1,t_2} \to \mathbb{R}^N \mid \partial_j w_i \in L_{p_{ij}(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})\,(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})\bigr\}$$

з нормою $\|w\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)} := \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=0}^{n} \|\partial_j w_i\|_{L_{p_{ij}(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)}$.

Через $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)$ позначимо підпростір простору $W^{1,0}_{p(\cdot),}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)$, складений з функцій w таких, що $w(\cdot,t) \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ для майже всіх $t \in [t_1,t_2]$.

Введемо лінійний простір $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q};\mathbb{R}^N)$, складений з визначених на Q вимірних функцій, звуження яких на Q_{t_1,t_2} належить до $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2};\mathbb{R}^N)$ для будь-яких $t_1,t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$. Цей простір є повним локально опуклим із сім'єю півнорм $\bigl\{\|h\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n} \|\|\partial_j h_i\|_{L_{p_{ij}(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})}\bigm| t_1,t_2 \in S\ (t_1 < t_2)\bigr\}$.

Далі протягом усієї роботи будемо вважати, що

($\mathcal{B}$) для кожного $i \in \{1,\ldots,N\}$ функція $b_i : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна і $0 \leqslant b_i(x) \leqslant 1$ для м. в. $x \in \Omega$.

Нехай $\Omega_{0,i} := \{x \in \Omega \mid b_i(x) > 0\}$ і $\widetilde{b}_i(x) := b_i(x)$, якщо $x \in \Omega_{0,i}$, та $\widetilde{b}_i(x) := 1$, якщо $x \in \Omega \setminus \Omega_{0,i}$, для кожного $i \in \{1,\ldots,N\}$. Позначимо $b := \mathrm{col}(b_1,\ldots,b_N)$ і нехай $H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)$ лінійний простір функцій вигляду $w = \mathrm{col}(w_1 = \widetilde{b}_1^{-1/2}v_1,\ldots,w_N = \widetilde{b}_N^{-1/2}v_N)$, де $v_i \in L_2(\Omega)$ для кожного $i \in \{1,\ldots,N\}$. Введемо на $H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)$ півнорму $\|w_i\|_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)} = \bigl(\int_\Omega \sum\limits_{i=1}^{N} b_i(x)|w_i(x)|^2 dx\bigr)^{1/2}$. Легко перевірити, що $H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)$ — поповнення лінійного простору $\mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ за півнормою $\|\cdot\|_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)}$ ([12]).

Позначимо через $C(S;B)$, де B – лінійний простір з нормою чи півнормою $\|\cdot\|_B$, простір функцій $v\colon S \to B$ таких, що їхнє звуження на будь-який інтервал $[t_1,t_2] \subset S$ належить до $C([t_1,t_2];B)$. Простір $C(S;B)$ є повним локально опуклим з сім'єю півнорм $\bigl\{\|v\|_{C([t_1,t_2];B)} := \max_{t\in[t_1,t_2]} \|v(t)\|_B \bigm| t_1,t_2 \in S\ (t_1 < t_2)\bigr\}$. У цьому просторі послідовність $\{g_m\}$ є збіжною, якщо послідовність $\{g_m|_{[t_1,t_2]}\}$ є збіжною в $C([t_1,t_2];B)$ для будь-яких $t_1,t_2 \in S$ $(t_1 < t_2)$.

Визначимо простір

$$\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(Q;\mathbb{R}^N) := \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q};\mathbb{R}^N) \cap C(S;H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)),$$

який є повним лінійним локально опуклим з сім'єю півнорм

$$\Bigl\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n} \|\partial_j h_i\|_{L_{p_{ij}(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} + \|h\|_{C([t_1,t_2];H_b(\Omega;\mathbb{R}^N))} \Bigm| t_1,t_2 \in S,\ t_1 < t_2\Bigr\}.$$

3. Постановка задачі та формулювання основних результатів.

Передусім дамо означення узагальненого розв'язку задачі (1)–(2), а для цього введемо відповідні обмеження на вихідні дані, тобто визначимо класи вихідних даних.

Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину матричних функцій $(a_{ij}; i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}) \equiv (a_{ij})$, які задовольняють умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожних $i \in \{1,\ldots,N\}$ та $j \in \{0,\ldots,n\}$ функція $a_{ij}(x,t,\xi)$, $(x,t) \in Q$, $\xi = (\xi_{kl}) \in M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_{ij}(x,t,\cdot) : M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ – неперервна, а для будь-якого $\xi \in M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ функція $a_{ij}(\cdot,\cdot,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ – вимірна; крім того, $a_{ij}(x,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожних $i \in \{1,\ldots,N\}$ та $j \in \{0,\ldots,n\}$, майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $\xi \in M_{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ виконується нерівність

$$|a_{ij}(x,t,\xi)| \leqslant h_{ij}(x,t)\Big(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{n}|\xi_{kl}|^{p_{kl}(x)/p'_{ij}(x)}\Big) + g_{ij}(x,t),$$

де $h_{ij} \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $g_{ij} \in L_{p'_{ij}(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

$(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільних $\xi^1, \xi^2 \in M^{N\times(n+1)}(\mathbb{R})$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}(a_{ij}(x,t,\xi^1) - a_{ij}(x,t,\xi^2))(\xi^1_{ij} - \xi^2_{ij}) \geqslant$$

$$\geqslant K_1\sum_{k=1}^{N}|\xi^1_{k0} - \xi^2_{k0}|^2 + K_2\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{n}|\xi^1_{kl} - \xi^2_{kl}|^{p_{kl}(x)},$$

де $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ – сталі.

Нехай $\mathbb{C}$ — множина векторних функцій $\mathrm{col}(c_1 \ldots c_N)$, які задовольняють такі умови:

$(\mathcal{C}_1)$ для кожного $i \in \{1,\ldots,N\}$ функція $c_i(x,y,t,\eta), (x,y,t,\eta) \in \Omega\times\Omega\times S\times\mathbb{R}^N$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega\times\Omega\times S$ функція $c_i(x,y,t,\cdot) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ — неперервна, а для всіх $s \in \mathbb{R}$ функція $c_i(\cdot,\cdot,\cdot,\eta) : \Omega\times\Omega\times S \to \mathbb{R}$ вимірна за Лебегом; $c_i(x,y,t,0) = 0$ для майже всіх $(x,y,t) \in \Omega\times\Omega\times S$.

$(\mathcal{C}_2)$ для кожного $i \in \{1,\ldots,N\}$, довільних $\eta^1, \eta^2 \in \mathbb{R}^N$ та майже всіх $(x,y,t) \in \Omega\times\Omega\times S$ виконується нерівність

$$|c_i(x,y,t,\eta^1) - c_i(x,y,t,\eta^2)| \leq L|\eta^1 - \eta^2|,$$

де $L > 0$ — стала.

Через $\mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}$ позначатимемо множину матричних функцій $(f_{ij};\, i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}) \equiv (f_{ij})$ таких, що $f_{ij} \in L_{p'_{ij}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$ і для кожних $i \in \{1,\ldots,N\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$ функція f_{ij} зануляється в околі Σ_1.

Означення 1. Нехай $b = \mathrm{col}(b_1,\ldots,b_N)$ і $p = (p_{ij})$ задовольняють умови, відповідно, $(\mathcal{B})$ та $(\mathcal{P})$, $(a_{ij}) \in \mathbb{A}_p$, $\mathrm{col}(c_1,\ldots,c_N) \in \mathbb{C}$, $(f_{ij}) \in \mathbb{F}_{p',\mathrm{loc}}$. *Узагальненим розв'язком* задачі (1)–(2) назвемо векторну функцію $u \in \mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q};\mathbb{R}^N)$, яка задовольняє інтегральну тотожність

$$\iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \Big\{ \sum_{j=0}^n a_{ij}(x,t,\delta u)\partial_j v_i \varphi_i +$$

$$(4)\qquad + v_i\varphi_i \int\limits_\Omega c_i(x,y,t,u(y,t))\,dy - b_i(x)u_i v_i {\varphi_i}' \Big\}\,dxdt = \iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n f_{ij}\partial_j v_i \varphi_i\,dxdt$$

$\forall v = \mathrm{col}(v_1,\ldots,v_N) \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N),\ \forall \varphi = \mathrm{col}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N) \in C^1_c((-\infty,0);\mathbb{R}^N)$.

Тут і далі під $C^1_c(I;\mathbb{R}^N)$, де I — інтервал числової осі, розуміємо лінійний простір векторних функцій $\varphi = \mathrm{col}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)$, компоненти яких є фінітними неперервно диференційовними функціями.

Теорема 1. *Нехай $b = col(b_1,\ldots,b_N)$ і $p = (p_{ij})$ задовольняють, відповідно, умови $(\mathcal{B})$ та $(\mathcal{P})$, $(a_{ij}) \in \mathbb{A}_p$, $col(c_1,\ldots,c_N) \in \mathbb{C}$, $(f_{ij}) \in \mathbb{F}_{p',loc}$ і, крім того, виконується нерівність*

$$(5)\qquad K_1 > L mes_n \Omega.$$

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(2)*, причому для будь-яких R, R_0, t_0 таких, що $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_0 < 0$, правильна оцінка*

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)|u_i(x,t)|^2\,dx + \int\limits_{t_0-R_0}^{t_0} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \Big[\sum_{j=1}^n |\partial_j u_i(x,t)|^{p_{ij}(x)} + |u_i(x,t)|^2 \Big]\,dxdt \leqslant$$

$$(6)\qquad \leqslant C_1 \Big\{ \sum_{i=1}^N R^{-2/(p^+_{i0}-2)} + \int\limits_{t_0-R}^{t_0} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n |f_{ij}|^{p'_{ij}(x)}\,dxdt \Big\},$$

де $C_1 > 0$ – стала, яка залежить лише від $K_1, K_2, L, mes_n\Omega$ і p^-_{ij} $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$.

4. Допоміжні твердження. Сформулюємо та доведемо твердження, які використаємо для доведення теореми 1.

Лема 1. *Нехай $b = col(b_1,\ldots,b_N)$ і $p = (p_{ij})$ задовольняють умови, відповідно, $(\mathcal{B})$ та $(\mathcal{P})$, а $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ – довільні числа, причому $t_1 < t_2$. Припустимо, що функція $w \in \widetilde{W}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ задовольняє інтегральну тотожність*

$$(7)\qquad \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n g_{ij}\partial_j v_i \varphi_i - b_i w_i v_i \varphi'_i \Big\}\,dxdt = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N),\ \forall \varphi \in C^1_c((t_1,t_2);\mathbb{R}^N)$$

для деяких $g_{ij} \in L_{p'_{ij}(\cdot),loc}(\overline{Q})$ $(i = \overline{1,N},\ j = \overline{0,n})$. Тоді $w \in C\big([t_1,t_2]; H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)\big)$ і для будь-яких $\theta \in C^1([t_1,t_2])$, $v \in \mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ і $\tau_1, \tau_2 \in [t_1,t_2]$ $(\tau_1 < \tau_2)$ виконуються *рівності*

$$\theta(\tau_2)\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^N b_i(x)w_i(x,\tau_2)v_i(x)\,dx-\theta(\tau_1)\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^N b_i(x)w_i(x,\tau_1)v_i(x)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^N\Big\{\Big(\sum_{j=0}^n g_{ij}v_{i,x_j}\Big)\theta-b_iw_iv_i\theta'\Big\}\,dxdt=0, \tag{8}$$

$$\frac12\theta(t_2)\|w(\cdot,t_2)\|^2_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)}-\frac12\theta(t_1)\|w(\cdot,t_1)\|^2_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)}-$$

$$-\frac12\int\limits_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^N\|w(\cdot,t)\|^2_{H_b(\Omega;\mathbb{R}^N)}\theta'(t)\,dt+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega\Big(\sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n g_{ij}\partial_jw_i\Big)\theta\,dxdt=0. \tag{9}$$

Це твердження доводиться аналогічно як лема 2 [6].

Лема 2. *Нехай $b=col(b_1,\dots,b_N)$ і $p=(p_{ij})$ задовольняють умови, відповідно, $(\mathcal{B})$ та $(\mathcal{P})$, $(a_{ij})\in\mathbb{A}_p$, $col(c_1,\dots,c_N)\in\mathbb{C}$ і для кожного $l\in\{1,2\}$ функції $u^l\in\mathbb{U}^b_{p,loc}(Q;\mathbb{R}^N)$, $(f^l_{ij})\in\mathbb{F}_{p',loc}$ такі, що правильна тотожність*

$$\iint\limits_Q\sum_{i=1}^N\Big\{\sum_{j=0}^n a_{ij}(x,t,\delta u^l)\partial_jv_i\varphi_i+v_i\varphi_i\int\limits_\Omega c_i(x,y,t,u^l(y,t))\,dy-\ b_i(x)u^l_iv_i\varphi_i'\Big\}\,dxdt=$$

$$=\iint\limits_Q\sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n f^l_{ij}\partial_jv_i\varphi_idxdt\quad\forall v\in\mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N),\ \forall\varphi\in C^1_c((-\infty,0);\mathbb{R}^N). \tag{10}$$

Тоді для довільних чисел R, R_0, t_0 таких, що $R_0>0$, $R\geqslant\max\{1,2R_0\}$, $t_0\leqslant0$, виконуеться нерівність

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]}\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^N b_i(x)|u^1_i(x,t)-u^2_i(x,t)|^2\,dx+$$

$$+\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^N\Big[\sum_{j=0}^n|\partial_ju^1_i-\partial_ju^2_i|^{p_{ij}(x)}+|u^1_i-u^2_i|^2\Big]\,dxdt\leqslant C_1\Big\{\sum_{i=1}^N R^{-2/(p^+_{i0}-2)}+$$

$$+\int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n|f^1_{ij}-f^2_{ij}|^{p'_{ij}(x)}dxdt\Big\}, \tag{11}$$

де $C_1>0$ – стала, яка залежить тільки від $K_1,K_2,L,mes_n\Omega$ і $p^-_{ij}(i=\overline{1,N},j=\overline{0,n})$.

Доведення. Нехай R,R_0,t_0 такі, як у формулюванні леми, і $\eta(t):=t-t_0+R$, $t\in\mathbb{R}$. Для заданих $v\in\mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ і $\varphi\in C^1_c((-\infty,0);\mathbb{R}^N)$ розглянемо тотожність (10) при $l=1$ та цю саму тотожність при $l=2$ і віднімемо ці тотожності. Прийнявши для майже всіх $(x,t)\in Q$

$$
\begin{gathered}
u_i^{12}(x,t) := u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t) \ (i=\overline{1,N}),\\
a_{ij}^{12}(x,t) := a_{ij}(x,t,\delta u^1(x,t)) - a_{ij}(x,t,\delta u^2(x,t)) \ (i=\overline{1,N}, j=\overline{0,n}),\\
c_i^{12}(x,y,t) := c_i(x,y,t,u^1(y,t)) - c_i(x,y,t,u^2(y,t)) \ (i=\overline{1,N}),\\
f_{ij}^{12}(x,t) := f_{ij}^1(x,t) - f_{ij}^2(x,t) \ (i=\overline{1,N}, j=\overline{0,n}),
\end{gathered}
$$

у підсумку отримаємо рівність

$$
\iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \Big\{ \sum_{j=0}^n a_{ij}^{12} \partial_j v_i \varphi_i + v_i\varphi_i \int\limits_\Omega c_i^{12}\, dy - \ b_i u_i^{12} v_i \varphi_i' \Big\}\, dxdt =
$$

$$
= \iint\limits_Q \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n f_{ij}^{12}(x,t) \partial_j v_i \varphi_i \, dxdt, \tag{12}
$$

до якої застосуємо лему 1 з $\tau_1 = t_0 - R$, $\tau_2 = \tau \in (t_0 - R, t_0]$, $w_i = u_i^{12}$, $g_{ij} = a_{ij}^{12} - f_{ij}^{12}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,N})$, $\theta = \eta^s$, $s := \max\limits_{i=\{1,\dots,N\}} p_{i0}^-/(p_{i0}^- - 2)$. У підсумку здобудемо рівність

$$
\eta^s(\tau) \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x) |u_i^{12}(x,\tau)|^2 dx + 2 \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \Big(\sum_{j=0}^n a_{ij}^{12}\, \partial_j u_i^{12} + u_i^{12} \int\limits_\Omega c_i^{12}\, dy \Big) \eta^s \, dxdt =
$$

$$
= s \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N b_i |u_i^{12}|^2 \eta^{s-1}\, dxdt + 2 \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n f_{ij}^{12} \partial_j u^{12}\, \eta^s\, dxdt. \tag{13}
$$

Зробимо відповідні оцінки членів рівності (13). Згідно з умовою $(\mathcal{A}_3)$ маємо

$$
\int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \ \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n a_{ij}^{12} \partial_j u_i^{12} \eta^s \, dxdt \geqslant
$$

$$
\geqslant K_1 \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N |u_i^{12}|^2 \eta^s\, dxdt + K_2 \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^n |\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)} \eta^s \, dxdt. \tag{14}
$$

Використовуючи умову $(\mathcal{C}_2)$ і нерівність Коші-Буняковського, отримуємо оцінку

$$
\Big| \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N u_i^{12}(x,t) \Big(\int\limits_\Omega c_i^{12}(x,y,t)\, dy \Big) \eta^s(t)\, dxdt \Big| \leqslant
$$

$$
\leqslant \sum_{i=1}^N \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \big| u_i^{12}(x,t) \big| \Big(\int\limits_\Omega \big| c_i^{12}(x,y,t) \big| \ dy \Big) \eta^s(t)\, dxdt \leqslant
$$

$$
\leqslant L \sum_{i=1}^N \int\limits_{t_0-R}^{\tau} \int\limits_\Omega \big| u_i^{12}(x,t) \big| \Big(\int\limits_\Omega \big| u_i^{12}(y,t) \big| \ dy \Big) \eta^s(t)\, dxdt =
$$

$$= L\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\Big(\int\limits_{\Omega}\big|u_i^{12}(x,t)\big|\,dx\Big)^2\eta^s(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant L\mathrm{mes}_n\Omega\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\big|u^{12}(x,t)\big|^2\eta(t)^s\,dxdt.$$

Звідси матимемо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}u_i^{12}\Big(\int\limits_{\Omega}c_i^{12}\,dy\Big)\eta^s\,dxdt > -L\mathrm{mes}_n\Omega\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u^{12}|^2\eta^s\,dxdt. \tag{15}$$

Далі використовуватимемо нерівність

$$ad \leqslant \varepsilon|a|^{r(x)} + \varepsilon^{-1/(r(x)-1)}\,|d|^{\,r'(x)} \tag{16}$$

для м. в. $x\in\Omega$ і будь-яких $a,d\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, де $r\in L_\infty(\Omega)$, $r(x)>1$, $1/r(x)+1/r'(x)=1$ для м. в. $x\in\Omega$, яка є наслідком стандартної нерівності Юнга: $a\,d\leqslant|a|^q/q+|d|^{q'}/q'$, $a,d\in\mathbb{R}$, $q>1$, $1/q+1/q'=1$.

Вибираючи (для майже кожного $x\in\Omega$) $r(x)=p_{i0}(x)/2$, $r'(x)=p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)$, $a=b_i(x)|u^{12}|^2\eta^{s/r(x)}$, $d=\eta^{s/r'(x)-1}$, $\varepsilon=\varepsilon_1\in(0,1)$, на підставі (16) отримаємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}b_i|u_i^{12}|^2\eta^{s-1}dxdt \leqslant \varepsilon_1\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}|u_i^{12}|^{p_{i0}(x)}\eta^s\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_1^{-2/(p_{i0}^{-}-2)}\eta^{s-p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)}\,dxdt, \tag{17}$$

де $\varepsilon_1\in(0,1)$ – довільне число. Тут ми використали умову: $0\leqslant b(x)\leqslant 1$ для м. в. $x\in\Omega$.

Знову використавши нерівність (16), одержуємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}f_{ij}^{12}\,\partial_j u_i^{12}\eta^s\,dxdt \leqslant \varepsilon_2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}|\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)}\eta^s\,dxdt+ \tag{18}$$

$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}\varepsilon_2^{-1/(p_{ij}^{-}-1)}|f_{ij}^{12}|^{p'_{ij}(x)}\eta^s\,dxdt,$$

де $\varepsilon_2\in(0,1)$ – довільне число.

З (13) на підставі (14), (15), (17) і (18) за достатньо малих значеннях ε_1 і ε_2 отримаємо

$$\eta^s(\tau)\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{N} b_i(x)|u_i^{12}(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=1}^{n}|\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)}+|u^{12}|^2\Big]\eta^s\,dxdt\leqslant \tag{19}$$
$$\leqslant C_2\Big\{\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\eta^{s-p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)}\,dxdt+$$
$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}|f_{ij}^{12}|^{p'_{ij}(x)}\eta^s\,dxdt\Big\},$$

де C_2 – стала, яка залежить тільки від $K_1, K_2, L, \mathrm{mes}_n\Omega$ і p_{ij}^- $(i=\overline{1,N}, j=\overline{1,n})$, а $\tau\in(t_0-R,t_0]$ – довільне число.

Оскільки $0\leqslant\eta(t)\leqslant R$, коли $t\in[t_0-R,t_0]$, і $\eta(t)\geqslant R-R_0$, коли $t\in[t_0-R_0,t_0]$, то з нерівності (19) отримаємо нерівність

$$(R-R_0)^s\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N} b_i(x)|u_i^{12}(x,\tau)|^2\,dx+ \tag{20}$$
$$+(R-R_0)^s\int\limits_{t_0-R_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=0}^{n}|\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)}+|u_i^{12}|^2\Big]\,dxdt\leqslant$$
$$\leqslant C_2\Big\{\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}R^{s-p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)}dxdt+$$
$$+R^s\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}|f_{ij}^{12}|^{p'_{ij}(x)}\,dxdt\Big\}.$$

Поділимо отриману нерівність на $(R-R_0)^s$. Зауважимо таке: оскільки $R\geqslant\max\{1;2R_0\}$, то маємо $R/(R-R_0)=1+R_0/(R-R_0)\leqslant 2$. Врахувавши це та нерівність $R^{-p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)}\leqslant R^{-p_{i0}^+/(p_{i0}^+-2)}$ (правильну через те, що $R\geqslant 1$ і $-p_{i0}(x)/(p_{i0}(x)-2)\leqslant -p_{i0}^+/(p_{i0}^+-2)$ для м. в. $x\in\Omega$), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{N} b_i(x)|u_i^{12}(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{t_0-R_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\Big[\sum_{j=0}^{n}|\partial_j u_i^{12}|^{p_{ij}(x)}+|u_i^{12}|^2\Big]\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_3\Big\{\sum_{i=1}^{N}R^{-p_{i0}^+/(p_{i0}^+-2)}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\,dxdt+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}|f_{ij}^{12}|^{p'_{ij}(x)}\,dxdt\Big\}, \tag{21}$$

де $C_3 > 0$ – стала, яка залежить від $K_1, K_2, L, \mathrm{mes}_n\Omega$ і p_{ij}^- $(i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n})$, а $\tau \in (t_0 - R, t_0]$ – довільне число. Звідси, врахувавши, що $\int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_{\Omega} dxdt = R \cdot \mathrm{mes}_n\Omega$, отримаємо (11). $\square$

5. Обґрунтування основного результату.

Доведемо теорему 1. Для цього спочатку переконаємося, що задача (1)–(2) має не більше одного узагальненого розв'язку. Припустимо протилежне. Нехай $u^1 = \mathrm{col}(u_1^1, \ldots, u_N^1)$, $u^2 = \mathrm{col}(u_1^2, \ldots, u_N^2)$ – (різні) узагальнені розв'язки цієї задачі. Тоді на підставі леми 2 матимемо

$$\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}|u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)|^2\,dxdt \leqslant C_1\sum_{i=1}^{N} R^{-2/(p_{i_0}^+-2)}, \tag{22}$$

де R, R_0, t_0 – довільні числа такі, що $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Зафіксуємо числа $R_0 > 0$ і $t_0 \in \mathbb{R}$ та перейдемо в (22) до границі при $R \to +\infty$. У підсумку отримаємо, що $u^1 = u^2$ майже скрізь на $Q_{t_0-R_0,t_0}$. Оскільки R_0, t_0 – довільні числа, то звідси одержуємо, що $u^1 = u^2$ майже всюди на Q. Отримане протиріччя доводить наше твердження.

Тепер перейдемо до доведення існування узагальненого розв'язку задачі (1)–(2). Для цього для кожного $m \in \mathbb{N}$ розглянемо мішану задачу для системи (1) в області $Q_m = \Omega \times (-m, 0)$ з однорідною початковою умовою і крайовими умовами типу (2), а точніше, задачу на знаходження функції $u^m \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_m; \mathbb{R}^N) \cap C([-m, 0]; H_b(\Omega; \mathbb{R}^N))$, яка задовольняє початкову умову

$$u_i^m|_{t=-m} = 0, \quad i = \overline{1,N},$$

та інтегральну тотожність

$$\iint\limits_{Q_m}\sum_{i=1}^{N}\Big\{\sum_{j=0}^{n} a_{ij}(x,t,\delta u^m)\partial_j v_i\varphi_i + v_i\varphi_i\int\limits_{\Omega} c_i(x,y,t,u^m(y,t))\,dy - u_i^m v_i\varphi_i'\Big\}\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_m}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n} f_{ij}^m\partial_j v_i\varphi_i\,dxdt \quad \forall v \in \mathbb{V}_p(\Omega; \mathbb{R}^N),\ \forall\varphi \in C_c^1((-m,0); \mathbb{R}^N), \tag{23}$$

де $f_{ij}^m(x,t) := f_{ij}(x,t)$, якщо $(x,t) \in Q_m$, і $f_{ij}^m(x,t) := 0$, якщо $(x,t) \in Q \setminus Q_m$, для кожних $i \in \{1, \ldots, N\}$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Існування та єдиність функції u^m можна довести аналогічно, як це зроблено в [6] у випадку рівнянь другого порядку. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ продовжимо u^m нулем на Q і за цим продовженням збережемо позначення u^m. Доведемо, що послідовність $\{u^m\}$ збігається в $\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(Q; \mathbb{R}^N)$ до узагальненого розв'язку задачі (1)–(2). Для цього спочатку зауважимо, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ функція u^m є узагальненим розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (1)–(2) тільки тим, що замість f_{ij} стоять f_{ij}^m

$(i=\overline{1,N}, j=\overline{0,n})$. Отож, на підставі леми 2 для будь-яких натуральних чисел m і k матимемо

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]}\int_\Omega \sum_{i=1}^N b_i(x)|u_i^m(x,t)-u_i^k(x,t)|^2\,dx+$$

$$+\int_{t_0-R_0}^{t_0}\int_\Omega\sum_{i=1}^N\Big[\sum_{j=0}^n|\partial_j(u_i^m-u_i^k)|^{p_{ij}(x)}+|u_i^m-u_i^k|^2\Big]\,dxdt\leqslant C_1\Big\{\sum_{i=1}^N R^{-2/(p_{i0}^+-2)}+$$

$$+\int_{t_0-R}^{t_0}\int_\Omega\sum_{i=1}^N\sum_{j=0}^n|f_{ij}^m(x,t)-f_{ij}^k(x,t)|^{p_{ij}{}'(x)}\,dxdt\Big\}, \tag{24}$$

де R, R_0, t_0 – довільні числа такі, що $t_0\leqslant 0$, $R_0>0$, $R\geqslant\max\{1;2R_0\}$.

Покажемо, що при фіксованих t_0 і R_0 ліва частина нерівності (24) прямує до нуля при $m\to+\infty$, $k\to+\infty$. Справді, нехай $\varepsilon>0$ – довільне як завгодно мале число. Виберемо $R\geqslant\max\{1,2R_0\}$ настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$C_1\sum_{i=1}^N R^{-2/(p_{i0}^+-2)}<\varepsilon. \tag{25}$$

Це можна зробити, оскільки $p_{i0}^+-2>0\ \forall i\in\{1,\dots,N\}$. Тоді для будь-яких $m,k\in\mathbb{N}$ таких, що $\max\{-m,-k\}\leqslant t_0-R$, маємо $f_{ij}^m=f_{ij}^k$ $(i=\overline{1,N},\ j=\overline{0,n})$ майже всюди на $\Omega\times(t_0-R,t_0)$, а отже, права частина нерівності (24) на підставі (25) є меншою за ε. Звідси випливає, що звуження членів послідовності $\{u^m\}$ на $Q_{t_0-R_0,t_0}$ утворює фундаментальну послідовність у просторі $\widetilde{W}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_0-R_0,t_0};\mathbb{R}^N)\cap C([t_0-R_0,t_0];H_b(\Omega;\mathbb{R}^N))$. Отже, на підставі довільності t_0 і R_0 існує функція $u\in\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(Q;\mathbb{R}^N)$ така, що $u^m\to u$ в $\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}(Q;\mathbb{R}^N)$. Зауважимо, що в тотожності (23) можна замінити інтегрування по Q_m на інтегрування по Q. Зробивши це, перейдемо в отриманій рівності до границі при $m\to\infty$. У підсумку отримаємо (4) для довільних $v\in\mathbb{V}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ і $\varphi\in C_c^1((-\infty;0);\mathbb{R}^N)$. Це означає, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(2). Оцінка (6) безпосередньо випливає з леми 2 для $u^1=u,\ u^2=0,\ f_{ij}^1=f_{ij},\ f_{ij}^2=0\,(i=\overline{1,N},j=\overline{0,n})$.

Список використаної літератури

1. М. М. Бокало, І. Б. Паучок, *Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності,* Мат. студії **24** (2006), no. 1, 25–48.
2. M. Bokalo and O. Domanska, *On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces,* Mat. Stud. **28** (2007), no. 1, 77–91.
3. О. М. Бугрій, С. П. Лавренюк, *Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації,* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **56** (2000), 33–43.
4. М. М. Бокало, В. М. Сікорський, *Про властивості розв'язків задачі без початкових умов для рівнянь, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації,* Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **51** (1998), 85–98.

5. M. Bokalo, *Almost periodic solutions of anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity,* Electron. J. Differ. Equ. **169** (2014), 1–13.
6. M. M. Bokalo, O. M. Buhrii and R. A. Mashiyev, *Unique solvability of initial boundary value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity,* J. Nonl. Evol. Equ. Appl. **2013** (2014), 67–87.
7. O. Buhrii and N. Buhrii, *On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential equations with variable exponents of nonlinearity,* New Trends in Mathematical Sciences **5** (2017), no. 3, 128–153.
8. O. Buhrii and N. Buhrii, *Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity,* Open Math. **15** (2017), 859-–883.
9. В. Н. Самохин, *Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации,* Дифференц. уравнения **32** (1996), no. 5, 643–651.
10. O. Kováčik and J. Rákosníc, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$,* Czech. Math. J. **41** (1991), no. 4, 592–618.
11. M. Růžička, *Electroreological fluids: modeling and mathematical theory,* Springer, Berlin, 2000.
12. R. E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations,* Mathematical surveys and monographs 49, Amer. Math. Soc., Providence, 1997.
13. Н. М. Бокало, *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений,* Труды семинара имени И. Г. Петровского **14** (1989), 3–44.
14. М, Бокало, В. Дмитрів, *Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь в анізотропних просторах,* Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **59** (2001), 84–101.
15. Н. М. Бокало, *Корректность первой краевой задачи и задачи Коши для некоторых квазилинейных параболических систем без условий на бесконечности,* Труды семинара имени И. Г. Петровского **25** (2006), 35–54.
16. Mykola Bokalo and Alfredo Lorenzi, *Linear evolution first-order problems without initial conditions,* Milan J. Math. **77** (2009), 437–494.
17. О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, *Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений,* Успехи мат. наук **31** (1976), no. 6, 142–166.
18. M. Bokalo, *Dynamical problems without initial conditions for elliptic-parabolic equations in spatial unbounded domains,* Electron. J. Differ. Equ. **178** (2010), 1–24.
19. М. М. Бокало, *Про коректність задачі Фур'є для системи рівнянь типу нестаціонарної фільтрації без умов на нескінченності,* Мат. студії **6** (1996), 85–98.
20. Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач,* Мир, Москва, 1972.
21. А. А. Панков, *Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциальных операторных уравнений,* Наукова думка, Київ, 1985, 184 с.

Стаття: надійшла до редколегії 13.11.2017
доопрацьована 23.12.2017
прийнята до друку 27.12.2017

THE FOURIER PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL ELLIPTIC-PARABOLIC SYSTEMS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY

Mykola BOKALO, Iryna SKIRA

Ivan Franko National University of Lviv
1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, irusichka.skira@gmail.com

The existence and uniqueness of a weak solution of the Fourier problem for nonlinear integro-differential elliptic-parabolic systems are investigated without any assumptions on the solution behavior and growth of the initial data as time variable tends to $-\infty$.

Key words: Fourier problem, problem without initial condition, elliptic-parabolic systems, functional differential equation.