ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 139–154
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 139–154

УДК 517.95

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ БЕЗ УМОВ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

Микола БОКАЛО, Ніколєтта ГРЯДІЛЬ

Львівський національний університет ім. Івана Франка
вул. Університецька, 1, 79000, Львів
e-mails: mm.bokalo@gmail.com, nikolyetta@gmail.com

Досліджено мішані задачі для нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності в необмежених областях без умов на нескінченності. Доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків таких задач у відповідних узагальнених просторах Лебега та Соболєва. Отримано апріорні оцінки узагальнених розв'язків досліджуваних задач.

Ключові слова: параболічне рівняння, змінний показник нелінійності, необмежена область, метод монотонності.

1. Вступ. Нехай Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), де $\mathbb{R}^n$ – лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $x = (x_1, ..., x_n)$ дійсних чисел і наділений нормою $|x| := (|x_1|^2 + ... + |x_n|^2)^{1/2}$. Припускаємо, що $\partial\Omega$ (межа області Ω) – кусково-гладка поверхня і $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_0 – замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема, Γ_0 може бути порожньою множиною або збігатися з $\partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$. Нехай $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі; $Q := \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0, T)$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0, T)$, де $T > 0$ – довільно задане число.

Розглядаємо задачу: *знайти функцію* $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, *яка задовольняє* (*в певному сенсі*) *рівняння*

$$(1) \qquad u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + a_0(x, t, u, \nabla u) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q\,,$$

крайові умови

$$(2) \qquad u\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_a}\Big|_{\Sigma_1} = 0$$

та початкову умову

$$(3) \qquad u(x, 0) = u_0(x)\,, \quad x \in \Omega,$$

2010 Mathematics Subject Classification: 35D30, 35K20, 35K55.

де $a_j\colon Q\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(j=\overline{0,n})$, $f\colon Q\to\mathbb{R}$, $u_0\colon\Omega\to\mathbb{R}$ – *задані дійснозначні функції,* $\partial u(x,t)/\partial\nu_a:=\sum\limits_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u)\,\nu_i(x)$, $(x,t)\in\Sigma_1$, – *похідна по "конормалі".*

Ми вважаємо, що просторова частина диференціального виразу в лівій частині рівняння (1) є еліптичною, тобто рівняння (1) — *параболічне.*

Прикладом рівнянь типу (1), які тут вивчаються, є рівняння

$$u_t-\sum_{i=1}^n\Big(\widehat{a}_i(x,t)|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i}\Big)_{x_i}+\widehat{a}_0(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u=f(x,t), \tag{4}$$

де $\widehat{a}_i$ $(i=\overline{0,n})$ – деякі вимірні, додатні та відділені від нуля функції, $p_i>1$ $(i=\overline{0,n})$ – вимірні й обмежені функції, які називають *показниками нелінійності.*

Рівняння вигляду (4) зі сталими показниками нелінійності розглядалися у багатьох працях, зокрема, в [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. В останні десятиліття дуже активно вивчають нелінійні диференціальні рівняння зі змінними показниками нелінійності, прикладом яких є рівняння (4), [9, 10, 11, 13, 12, 14, 15]. Це пов'язано з тим, що такі рівняння виникають у математичному моделюванні різних типів фізичних процесів і, зокрема, описують потоки електрореологічних речовин, процеси відновлення зображень, електричний струм у кондукторі під впливом змінного температурного поля [11].

Як добре відомо, крайові задачі для лінійних параболічних рівнянь у необмежених областях є коректними, якщо на їхні розв'язки та вихідні дані додатково до крайових умов накладено певні обмеження на їх зростання на нескінченності. Така сама ситуація з крайовими задачами в необмежених областях і для нелінійних параболічних рівнянь з певних класів [3, 4]. Проте є рівняння, крайові задачі для яких однозначно розв'язні без будь-яких умов на нескінченності [1, 2, 5, 6, 7, 8, 12, 14]. Вперше такий результат для рівняння (4) при $p_0=$ const >2 і $p_1=\ldots=p_n=2$ отримано в праці [1].

Зробивши додаткові припущення на вихідні дані, доведено однозначну розв'язність мішаних задач без обмежень на нескінченності для одного класу нелінійних анізотропних параболічних рівнянь зі змінними показиками нелінійності. Отримані тут результати є узагальненням і доповненням результатів [12] стосовно рівнянь зі сталими показниками нелінійності.

Праця складається з шести розділів. У другому розділі введено основні позначення та допоміжні факти. Формулювання задачі й основного результату містить третій розділ. У четвертому розділі наведено допоміжні твердження. У п'ятому розділі обґрунтовано основний результат. Шостий розділ містить висновки.

2. Основні позначення та факти. Спочатку введемо функційні простори, які будуть потрібні для означення узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

Під $L_{r(\cdot)}(\Omega')$, де Ω' – довільна обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$, а $r\colon\Omega'\to\mathbb{R}$ – вимірна та обмежена функція така, що $r(x)\geqslant 1$ для майже всіх (м.в.) $x\in\Omega'$, розуміємо лінійний простір (класів) вимірних функцій $v:\Omega'\to\mathbb{R}$, для яких функціонал $\rho_{\Omega',r}(v):=\int\limits_{\Omega'}|v(x)|^{r(x)}\,dx$ приймає скінчені значення, з нормою $\|v\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega')}:=\inf\{\lambda>0\mid\rho_{\Omega',r}(v/\lambda)\leqslant 1\}$. Цей простір є банаховим і його називають *узагальненим* *простором Лебега* (див., наприклад, [9]). Зауважимо таке: коли $r(x) = r_0 = \mathrm{const} \geqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega'$, то $\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega')} = \|\cdot\|_{L_{r_0}(\Omega')}$. Відомо таке: якщо $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega'} r(x) > 1$, то спряжений до $L_{r(\cdot)}(\Omega')$ можна ототожнити з $L_{r'(\cdot)}(\Omega')$, де $r'(x)$, $x \in \Omega'$, – функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$ для майже всіх $x \in \Omega'$. Аналогічно як $L_{r(\cdot)}(\Omega')$ визначаємо простір $L_{r(\cdot)}(Q')$, де $Q' = \Omega' \times (0,T)$, Ω' – довільна обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$, використовуючи функціонал $\rho_{Q',r}(w) := \iint\limits_{Q'} |w(x,t)|^{r(x)}\,dxdt$ замість функціонала $\rho_{\Omega',r}(v)$.

Далі всюди під $Bd(\Omega)$ розумітимемо множину всеможливих обмежених підобластей області Ω. Нехай $r : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна функція така, що $r(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega$. Через $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ позначатимемо лінійний простір (класів) вимірних функцій $v : \Omega \to \mathbb{R}$, звуження яких $v|_{\Omega'}$ на довільну область $\Omega' \in Bd(\Omega)$ належать до $L_{r(\cdot)}(\Omega')$, із системою півнорм $\{\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega')}\,|\,\Omega' \in Bd(\Omega')\}$. Цей простір є повним локально опуклим простором. Зауважимо, що послідовність $\{v_l\}_{l=1}^{\infty}$ *сильно* (відповідно, *слабко*) збігається до v в $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, якщо для будь-якої області $\Omega' \in Bd(\Omega)$ послідовність $\{v_l|_{\Omega'}\}_{l=1}^{\infty}$ *сильно* (відповідно, *слабко*) збігається до $v|_{\Omega'}$ в $L_{r(\cdot)}(\Omega')$. Так само як $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ вводимо повний локально опуклий простір $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ із системою півнорм $\{\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega'\times(0,T))}\,|\,\Omega' \in Bd(\Omega)\}$.

Нехай $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{1+n}$ – вектор-функція, яка задовольняє умову:

($\mathcal{P}$) для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ функція $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна і $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega'} p_i(x) > 1$, $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega'} p_i(x) < \infty$ для будь-якої $\Omega' \in Bd(\Omega)$.

Через $p' = (p_0', p_1', \ldots, p_n')$ позначимо вектор-функцію, компоненти якої визначаються з рівностей $\frac{1}{p_i(x)} + \frac{1}{p_i'(x)} = 1$ для м.в. $x \in \Omega$ $(i = \overline{0,n})$. Очевидно, що функція p' задовольняє умову ($\mathcal{P}$) із заміною p_i на p_i' $(i = \overline{0,n})$.

Для довільної області $\Omega' \in Bd(\Omega)$ визначимо простір

$$W^1_{p(\cdot)}(\Omega') := \{v : \Omega' \to \mathbb{R} \ \text{– вимірна}\,|\, v \in L_{p_0(\cdot)}(\Omega'),\ v_{x_i} \in L_{p_i(\cdot)}(\Omega')\,(i = \overline{1,n})\}$$

з нормою

$$\|v\|_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega')} := \|v\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega')} + \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega')}.$$

Цей простір є банаховим і його називають узагальненим простором Соболєва. Під $W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ розумітимемо повний локально опуклий простір, складений з функцій $v \in L_{p_0(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ таких, що $v_{x_i} \in L_{p_i(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ для кожного $i \in \{1,\ldots,n\}$, із системою півнорм $\big\{\|v\|_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega')}) \,|\, \Omega' \in Bd(\Omega)\big\}$. Позначимо через $\widetilde{W}^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ замикання простору

$$\widetilde{C}^1(\overline{\Omega}) := \big\{v \in C^1(\overline{\Omega})\big|\operatorname{supp} v \text{ – обмежена множина, } v\big|_{\Gamma_0} = 0\big\}$$

в $W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Нехай $\widetilde{W}^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega)$ – підпростір простору $\widetilde{W}^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, складений з функцій з обмеженими носіями.

Для області $Q' = \Omega' \times (0,T)$, де $\Omega' \in Bd(\Omega)$, розглянемо банахів простір

$$W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q') := \{w : Q' \to \mathbb{R} \ \text{– вимірна} \,|\, w \in L_{p_0(\cdot)}(Q'),\ w_{x_i} \in L_{p_i(\cdot)}(Q')\,(i=\overline{1,n})\}$$

з нормою

$$\|w\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q')} := \|w\|_{L_{p_0(\cdot)}(Q')} + \sum_{i=1}^{n} \|w_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(Q')}.$$

Під $W^{1,0}_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ розуміємо повний локально опуклий простір, складений з функцій $w \in L_{p_0(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ таких, що $w_{x_i} \in L_{p_i(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i=\overline{1,n})$ із системою півнорм $\big\{\|w\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(\Omega'\times(0,T))} \mid \Omega' \in Bd(\Omega)\big\}$. Позначимо через $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}))$ підпростір простору $W^{1,0}_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, складений з функцій $w \in W^{1,0}_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ таких, що для майже всіх $t \in (0,T)$ функція $w(\cdot,t)$ належить до $\widetilde{W}^{1}_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$.

Також визначимо повний локально опуклий простір

$$C([0,T];L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) := \{w : [0,T] \to L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \,|\, w \in C([0,T];L_2(\Omega'))\ \ \forall\,\Omega' \in Bd(\Omega)\}$$

із системою півнорм

$$\{\|w\|_{C([0,T];L_2(\Omega'))} := \max_{t\in[0,T]} \|w(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega')} \mid \Omega' \in Bd(\Omega)\,\}.$$

Введемо повний локально опуклий простір

$$\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}} := \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C([0,T];L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$$

з топологією, яка породжена системою півнорм

$$\big\{\|w\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(\Omega'\times(0,T))} + \|w\|_{C([0,T];L_2(\Omega'))} \mid \Omega' \in Bd(\Omega)\,\big\}.$$

Нехай

$$\mathbb{H}_{\mathrm{loc}} := L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \qquad \mathbb{F}_{p',\,\mathrm{loc}} := L_{p_0'(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}).$$

Позначимо через $C^1_c(0,T)$ простір неперервно диференційових функцій на $(0,T)$ з компактним носієм.

3. Формулювання задачі та основного результату. Розглядатимемо узагальнені розв'язки задачі (1)–(3). Для їх означення спочатку введемо відповідні класи вихідних даних.

Нехай $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ – вектор-функція, яка задовольняє умову $(\mathcal{P})$. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину впорядкованих наборів дійснозначних функцій $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, які визначені на $Q \times \mathbb{R}^{1+n}$ і задовольняють умови:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ функція $a_i(x,t,\rho,\xi)$, $(x,t,\rho,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^{1+n}$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_i(x,t,\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ – неперервна, а для будь-яких $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ функція $a_i(\cdot,\cdot,\rho,\xi)\colon Q \to \mathbb{R}$ – вимірна; крім того, $a_i(x,t,0,0) = 0$ $(i=\overline{0,n})$ для майже всіх $(x,t) \in Q$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$|a_i(x,t,\rho,\xi)| \leqslant h_{1,i}(x,t)\big(|\rho|^{p_0(x)/p_i'(x)} + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p_j(x)/p_i'(x)}\big) + h_{2,i}(x,t),$$

де $h_{1,i} \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $h_{2,i} \in L_{p'_i(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Тепер подамо означення узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

Означення 1. Нехай p задовольняє умову $(\mathcal{P})$, $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_p$, $f \in \mathbb{F}_{p', \mathrm{loc}}$, $u_0 \in \mathbb{H}_{\mathrm{loc}}$. *Узагальненим розв'язком* задачі (1)–(3) називаємо функцію $u \in \mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}$, яка задовольняє початкову умову

$$u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \quad \text{в} \quad L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \tag{5}$$

та інтегральну рівність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u)\psi_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u,\nabla u)\psi\varphi - u\psi\varphi' \Big\}\, dxdt = \iint\limits_Q f\psi\varphi\, dxdt \tag{6}$$

для будь-яких $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),\,\mathrm{c}}(\Omega)$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$.

Мета нашої праці – за додаткових умов на вихідні дані довести однозначну розв'язність задачі (1)–(3).

Далі всюди, без втрати загальності, вважаємо, що $0 \in \Omega$. Нехай $k \in \{1, \dots, n\}$ – найменше число таке, що множина $\widetilde{\Omega}_R := \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2 < R^2\}$ є обмеженою для будь-якого $R > 0$. Наприклад, коли $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, де Ω_1 – необмежена область в $\mathbb{R}^k$, а Ω_2 – обмежена область в $\mathbb{R}^{n-k}$, то k – саме те, про яке говорилося. Для будь-якого $R > 0$ позначимо через Ω_R зв'язну компоненту множини $\widetilde{\Omega}_R$, що містить 0. Очевидно, що $\Omega = \bigcup\limits_{R>0} \Omega_R$.

Нехай $\alpha \geqslant 0$ – найменше з чисел, для якого виконується нерівність

$$\mathrm{mes}_n\, \Omega_R \leqslant c_1 R^\alpha \quad \forall R \geqslant 1, \tag{7}$$

де $c_1 > 0$ – стала. Тут і далі через $\mathrm{mes}_n G$ позначено міру Лебега множини G в $\mathbb{R}^n$.

Приймемо $Q_R := \Omega_R \times (0,T)$ для кожного $R > 0$. Зрозуміло, що $Q = \bigcup\limits_{R>0} Q_R$.

Далі всюди вважаємо, що виконується умова:

$(\mathcal{P}^*)$ вектор-функція $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ задовольняє умову $(\mathcal{P})$ і, крім того, $p_0(x) \geqslant 2$, $\max\limits_{i\in\{1,\dots,k\}} p_i(x) \leqslant 2$ для майже всіх $x \in \Omega$,

$$\min_{i\in\{1,\dots,k\}} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \big[p_0(x) - p_i(x)\big] > 0.$$

Позначимо через $\mathbb{A}^*_p$ підмножину $\mathbb{A}_p$, елементи якої задовольняють ще такі умови:

$(\mathcal{A}_3)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільних $(\rho_1, \xi^1), (\rho_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi^2))(\xi^1_i - \xi^2_i) +$$
$$+ (a_0(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_0(x,t,\rho_2,\xi^2))(\rho_1 - \rho_2) \geqslant K_1 |\rho_1 - \rho_2|^{q(x)},$$

де $K_1 > 0$ – стала, $q : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна функція така, що $2 \leqslant q(x) \leqslant p_0(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$ та, крім того, для кожного $i \in \{1, \dots, k\}$ $r_i^- := \operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} r_i(x) > \alpha$, $r_i^+ := \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} r_i(x) < +\infty$, де α – стала з нерівності (7), а $r_i(x) := q(x)p_i(x)/\big(q(x) - p_i(x)\big)$, $x \in \Omega$;

($\mathcal{A}_4$) для майже всіх $(x,t)\in Q$ та будь-яких $(\rho,\xi)\in\mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^n a_i(x,t,\rho,\xi)\,\xi_i + a_0(x,t,\rho,\xi)\,\rho \geqslant K_2\Big[\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i(x)} + |\rho|^{p_0(x)}\Big] - h_3(x,t),$$

де $K_2>0$ – стала, $h_3\in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $h_3\geqslant 0$;

($\mathcal{A}_5$) для майже всіх $(x,t)\in Q$ та будь-яких $(\rho_1,\xi^1),(\rho_2,\xi^2)\in\mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^k |a_i(x,t,\rho_1,\xi^1)-a_i(x,t,\rho_2,\xi^2)|^{p_i'(x)} \leqslant$$
$$\leqslant K_3\Big[\sum_{i=1}^n (a_i(x,t,\rho_1,\xi^1)-a_i(x,t,\rho_2,\xi^2))(\xi_i^1-\xi_i^2)+$$
$$+\,(a_0(x,t,\rho_1,\xi^1)-a_0(x,t,\rho_2,\xi^2))(\rho_1-\rho_2)\Big],$$

де $K_3>0$ – стала.

Зауваження 1. Опираючись на результати [14], неважко переконатися, що підмножиною $\mathbb{A}_p^*$ є множина $\mathbb{A}_p^1$ тих елементів $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ з $\mathbb{A}_p$, які задовольняють умови:

($\mathcal{A}_3'$) $a_i(x,t,\rho,\xi)\equiv a_i(x,t,\xi_i)$, $(x,t,\rho,\xi)\in Q\times\mathbb{R}^{1+n}$, і для майже всіх $(x,t)\in Q$ існує похідна $\partial a_i(x,t,\xi_i)/\partial\xi_i$, $\xi_i\neq 0$, якщо $i\in\{1,\ldots,n\}$, та, крім того, виконуються нерівності

$$A_i|\xi_i|^{p_i(x)-2}\leqslant \partial a_i(x,t,\xi_i)/\partial\xi_i\leqslant \widetilde{A}_i|\xi_i|^{p_i(x)-2},\qquad \xi_i\neq 0,$$

якщо $i\in\{1,\ldots,k\}$, а якщо $i\in\{k+1,\ldots,n\}$, то

$$\partial a_i(x,\xi_i)/\partial\xi_i\geqslant A_i|\xi_i|^{p_i(x)-2},\quad \xi_i\neq 0,$$
$$|a_i(x,\xi_i)|\leqslant \widetilde{A}_i|\xi_i|^{p_i(x)-1}+h_{4,i}(x,t),\quad \xi_i\in\mathbb{R},$$

де A_i, $\widetilde{A}_i$ – додатні сталі, $h_{4,i}\in L_{p_i'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$;

($\mathcal{A}_4'$) $a_0(x,t,\rho,\xi)\equiv a_0(x,t,\rho),(x,t,\rho,\xi)\in Q\times\mathbb{R}^{1+n}$, і для майже всіх $(x,t)\in Q$ існує похідна $\partial a_0(x,t,\rho)/\partial\rho$, $\rho\neq 0$, та виконуються нерівності

$$\partial a_0(x,t,\rho)/\partial\rho\geqslant A_0|\rho|^{p_0(x)-2}+A_0',\quad \rho\neq 0,$$
$$|a_0(x,t,\rho)|\leqslant \widetilde{A}_0|\rho|^{p_0(x)-1}+h_{4,0}(x,t),\quad \rho\in\mathbb{R},$$

де $h_{4,0}\in L_{p_0'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, A_0, $\widetilde{A}_0$ – додатні сталі, A_0' – невід'ємна стала, причому $A_0'=0$ тільки в тому випадку, коли

$$\min_{i\in\{1,\ldots,k\}}\ \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_0(x)p_i(x)/\big(p_0(x)-p_i(x)\big)>\alpha,$$

де α – стала з нерівності (7).

Прикладом елемента з класу $\mathbb{A}_p^1$ є набір функцій

$$\big(\widehat{a}_0(x,t)\,|\rho|^{p_0(x)-2}\rho,\ \widehat{a}_1(x,t)\,|\xi_1|^{p_1(x)-2}\xi_1,\ \ldots,\ \widehat{a}_n(x,t)\,|\xi_n|^{p_n(x)-2}\xi_n\big),$$

де $\widehat{a}_i\in L_\infty(Q)$ – додатні та відділені від нуля функції. При такому виборі коефіцієнтів рівняння (1) набуде вигляду (4).

Зауваження 2. Зауважимо таке: коли $p_1(x) = \ldots = p_k(x) = 2$ для майже всіх $x \in \Omega$, то іншою підмножиною $\mathbb{A}_p^*$ є множина $\mathbb{A}_p^2$ тих елементів $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ з $\mathbb{A}_p$, які задовольняють умову $(\mathcal{A}_4)$ та умови:

$(\mathcal{A}_3'')$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(\rho_1, \xi^1), (\rho_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i(x,t,\rho_1,\xi_1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi_2)| \leq D_1 \sum_{i=1}^{k} |\xi_i^1 - \xi_i^2| + D_2 |\rho_1 - \rho_2|,$$

де D_1, D_2 – невід'ємні сталі;

$(\mathcal{A}_4'')$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(\rho_1, \xi^1), (\rho_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} (a_i(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) +$$
$$+ (a_0(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_0(x,t,\rho_2,\xi^2))(\rho_1 - \rho_2) \geq$$
$$\geq K_4 \sum_{i=1}^{k} |\xi_i^1 - \xi_i^2|^2 + K_5 |\rho_1 - \rho_2|^2 + K_6 |\rho_1 - \rho_2|^{p_0(x)},$$

де $K_4 > 0, K_5 \geqslant 0, K_6 > 0$ – сталі, причому $K_5 = 0$ тільки в тому випадку, коли $D_2 = 0$, та $\min\limits_{i \in \{1,\ldots,k\}} \operatorname*{ess\,inf}\limits_{x \in \Omega} p_0(x)/\big(p_0(x)-2\big) > \alpha/2$, де α — стала з нерівності (7).

Прикладом рівнянь вигляду (1), для якого коефіцієнти $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ належать до класу $\mathbb{A}_p^2$, є рівняння

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{k} \big(\widehat{a}_{ij}(x,t) u_{x_j}\big)_{x_i} + \sum_{i=k+1}^{n} \Big(\widehat{a}_i(x,t) |u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i}\Big)_{x_i} +$$

$$+\widehat{a}_{0,1}(x,t)u + \widehat{a}_{0,2}(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u = f(x,t), \tag{8}$$

де $\widehat{a}_i \, (i = \overline{k+1,n})$, $\widehat{a}_{0,1}, \widehat{a}_{0,2}$ – вимірні, додатні і відділені від нуля функції, а $\widehat{a}_{ij} \, (i,j = \overline{1,k})$ – обмежені функції, які задовольняють умову: існує $\lambda > 0$ таке, що $\sum\limits_{i,j=1}^{k} \widehat{a}_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathbb{R}$.

Основний результат нашої праці — таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_p^*$, $f \in \mathbb{F}_{p',loc}$, $u_0 \in \mathbb{H}_{loc}$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі* (1)—(3), *причому для будь-яких* R, R_0 *таких, що* $R_0 > 0$, $R \geqslant \max\{1, 2R_0\}$, *правильна оцінка*

$$\max_{t \in [0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u(x,t)|^2 \, dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}(x,t)|^{p_i(x)} + |u(x,t)|^{p_0(x)} \Big] \, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \Big\{ R^{\alpha-\omega} + \int\limits_{\Omega_R} |u_0(x)|^2 \, dx + \iint\limits_{Q_R} |f(x,t)|^{p_0'(x)} \, dxdt + \iint\limits_{Q_R} h_3(x,t) \, dxdt \Big\}, \tag{9}$$

де $\omega := \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} r_i^-$, C_1 *– стала, яка залежить тільки від* $K_i\,(i=1,2,3)$, c_1, r_i^+ $(i=\overline{1,k})$.

4. Допоміжні твердження. Наведемо кілька технічних тверджень, які будуть потрібні для доведення теореми 1. Для цього використовуємо такі позначення:

$$a_j(v)(x,t) := a_j(x,t,v(x,t),\nabla v(x,t)) \quad (j=\overline{0,n}), \quad (x,t)\in Q;$$
$$\partial_0 v := v, \quad \partial_i v := v_{x_i} \quad (i=\overline{1,n}).$$

Твердження 1. *Для довільних* $a,b\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, $\mu>1$ *правильна нерівність*

$$a\,b \leqslant \varepsilon|a|^{\mu} + \varepsilon^{1-\mu'}\,|b|^{\mu'}, \tag{10}$$

де $\mu' = \frac{\mu}{\mu-1}$.

Доведення. Це твердження легко випливає з нерівності Юнга (див., наприклад, [16]): $a\,b \leqslant \frac{|a|^{\mu}}{\mu} + \frac{|b|^{\mu'}}{\mu'}$. □

Твердження 2. *Для будь-яких* a, b, c, $\varepsilon>0$, $\mu_1>1$, $\mu_2>1$, $\mu_3>1$, $\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}=1$, *правильна нерівність*

$$a\,b\,c \leqslant \varepsilon|a|^{\mu_1} + \varepsilon|b|^{\mu_2} + \varepsilon^{1-\mu_3}\,|c|^{\mu_3}. \tag{11}$$

Доведення. Це твердження легко отримати з нерівності Юнга (див., наприклад, [16]): $a\,b\,c \leqslant \frac{|a|^{\mu_1}}{\mu_1} + \frac{|b|^{\mu_2}}{\mu_2} + \frac{|c|^{\mu_3}}{\mu_3}$. □

Лема 1. *Нехай* $R>0$ *– довільне фіксоване число. Припустимо, що функція* $v\in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot),\,loc}(\overline{Q})$ *така, що правильна інтегральна тотожність*

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=0}^{n} g_i\partial_i\psi\varphi - v\psi\varphi'\Big\}\,dxdt = 0, \quad \varphi\in C_c^1(0,T), \psi\in\widetilde{W}^1_{p(\cdot),\,c}(\Omega),\ supp\,\psi\subset\overline{\Omega}_R, \tag{12}$$

для деяких функцій $g_j\in L_{p_j'(\cdot),\,loc}(\overline{Q})$ $(j=\overline{0,n})$.

Тоді $v\in C([0,T];L_2(\Omega_{R'}))$ *для кожного* $R'\in(0,R)$. *Крім того, для довільних функцій* $\theta\in C^1([0,T])$, $w\in C^1(\overline{\Omega})$, $supp\,w\subset\overline{\Omega}_R$, $w\geqslant 0$, *і будь-яких чисел* t_1,t_2 *таких, що* $0\le t_1<t_2\le T$, *виконується рівність*

$$\theta(t)\int\limits_{\Omega_R}|v(x,t)|^2 w(x)dx\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_R}|v|^2 w\theta'\,dxdt + 2\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=0}^{n} g_i\partial_i(vw)\Big\}\theta\,dxdt = 0. \tag{13}$$

Доведення. Це твердження доводиться аналогічно, як лема 3 [12]. □

Лема 2. *Нехай* $(a_0,a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{A}_p^*$, $f\in\mathbb{F}_{p',loc}$, $u_0\in\mathbb{H}_{loc}$, $u_1,u_2\in\mathbb{U}_{p,loc}$ *і* $R\geqslant 1$ *– яке-небудь фіксоване число. Припустимо, що для кожного* $l\in\{1,2\}$

$$u_l(x,0) = u_0(x) \quad \text{для м.в.} \quad x\in\Omega_R \tag{14}$$

і виконується рівність

$$\iint\limits_{Q_R}\Big\{\sum_{i=0}^{n} a_i(u_l)\partial_i\psi\varphi - u_l\psi\varphi'\Big\}\,dxdt = \iint\limits_{Q_R} f\psi\varphi\,dxdt \tag{15}$$

для будь-яких $\varphi \in C_c^1(0,T)$ *і* $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$, *supp* $\psi \subset \overline{\Omega}_R$.

Тоді для довільного числа $R_0 \in (0, R/2]$ *правильна нерівність*

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2\, dx + \tag{16}$$

$$+ \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{i=0}^{n} \big(a_i(u_1) - a_i(u_2)\big)\big(\partial_i u_1 - \partial_i u_2\big) + |u_1 - u_2|^{q(x)} \Big]\, dxdt \leqslant C_2 R^{\alpha-\omega},$$

де α, ω *– такі самі як в теоремі 1, а* $C_2 > 0$ *– стала, яка залежить тільки від* K_1, K_3, c_1, r_i^+ $(i = \overline{1,k})$, q^-.

Доведення. Введемо таку зрізаючу функцію:

$$\zeta(x) = \begin{cases} (R^2 - |x'|^2)/R, & |x'| < R, \\ 0, & |x'| \geqslant R, \end{cases}$$

де $x = (x', x''), x' = (x_1, \ldots, x_k), x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n), |x'| = (|x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2)^{1/2}$.

Для $\varphi \in C_c^1(0,T)$, $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$ такої, що supp $\psi \subset \overline{\Omega}_R$, розглянемо рівність (15) при $u = u_1$ й цю сваму рівність при $u = u_2$ і віднімемо ці рівності. У підсумку, прийнявши

$$u_{12}(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

$$a_{i,12}(x,t) := a_i(u_1)(x,t) - a_i(u_2)(x,t),\ (x,t) \in Q,\ i = \overline{0,n},$$

отримаємо рівність, до якої застосуємо лему 1 з $g_i = a_{i,12}$ $(i = \overline{0,n})$, $w = \zeta^s$, $\theta = 1$, де $s := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} r_i^+$, $t_1 = 0$, $t_2 = \tau \in (0,T]$ – довільне число. Внаслідок простих перетворень отримаємо рівність

$$\int\limits_{\Omega_R} |u_{12}(x,\tau)|^2 \zeta^s(x)\, dx + 2 \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_{i,12} \partial_i u_{12} \Big\} \zeta^s\, dxdt =$$

$$= -2s \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big(\sum_{i=1}^{k} a_{i,12}\, \partial_i \zeta \Big)\, u_{12}\, \zeta^{s-1}\, dxdt, \tag{17}$$

де $Q_R^\tau := \Omega_R \times (0,\tau]$ при $\tau \in (0,T]$, $R > 0$.

Зробимо відповідні оцінки інтегралів рівності (17). З умови $(\mathcal{A}_3)$ матимемо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_{i,12} \partial_i u_{12} \Big\} \zeta^s dxdt \geqslant K_1 \iint\limits_{Q_R^\tau} |u_{12}|^{q(x)}\, \zeta^s dxdt. \tag{18}$$

На підставі нерівності (11), врахувавши оцінку $|\partial_i \zeta(x)| \leqslant 2$ $(i = \overline{1,n})$ при $x \in \mathbb{R}^n$ та вибравши $a = |a_{i,12}|\zeta^{s/\mu_1}$, $b = |u_{12}|\zeta^{s/\mu_2}$, $c = \zeta^{s/\mu_3 - 1}$, $\mu_1 = p_i'(x)$, $\mu_2 = q(x)$, $\mu_3 = r_i(x)$ (для кожного $i = \overline{1,n}$ і майже всіх $x \in \Omega$), отримаємо оцінку

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^{k} |a_{i,12}|\, |\partial_j \zeta|\, |u_{12}|\, \zeta^{s-1}\, dxdt \leqslant 2\varepsilon_1 \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big[\sum_{i=1}^{k} |a_{i,12}|^{p'_i(x)} \Big] \zeta^s\, dxdt +$$

$$+2\varepsilon_1 k \iint\limits_{Q_R^\tau} |u_{12}|^{q(x)}\zeta^s\, dxdt + 2\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_1^{1-r_i^+}\zeta^{\,s-r_i(x)}\, dxdt, \tag{19}$$

де $\varepsilon_1 \in (0,1)$ – довільне число.

Згідно з умовою $(\mathcal{A}_5)$ матимемо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \Big[\sum_{i=1}^{k} |a_{i,12}|^{p'_i(x)}\Big]\zeta^s\, dxdt \leqslant K_3 \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big[\sum_{i=0}^{n} a_{i,12}\,\partial_i u_{12}\Big]\,\zeta^s\, dxdt. \tag{20}$$

З (17) на підставі (18)–(20) за достатньо малого значення ε отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} |u_{12}(x,\tau)|^2\zeta^s(x)dx + \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big\{\sum_{i=0}^{n} a_{i,12}\partial_i u_{12} + |u_{12}|^{q(x)}\Big\}\zeta^s\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^{k} \zeta^{\,s-r_i(x)}\, dxdt, \tag{21}$$

де C_3 – додатна стала, яка залежить тільки від K_1, K_3, r_i^+ $(i=\overline{1,k})$, а $\tau \in (0,T]$ – довільне число.

Зауважимо, що $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant R$, коли $x \in \mathbb{R}^k$, $\zeta(x') \geqslant R - R_0$ при $|x'| \leqslant R_0$, де $R_0 \in (0, R/2]$ – яке-небудь число. Враховуючи це, нерівність $R/(R-R_0) = 1 + R_0/(R-R_0) \leqslant 2$, а також нерівність (7) і те, що $R \geqslant 1$, з (21) отримаємо потрібне твердження. □

Лема 3. *Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_p^*$ і функції $\widetilde{u} \in \mathbb{U}_{p,loc}$, $f \in \mathbb{F}_{p',loc}$, $u_0 \in \mathbb{H}_{loc}$ такі, що для деякого числа $R \geqslant 1$ виконується рівність* (6) *з $u = \widetilde{u}$ для будь-яких $\varphi \in C_c^1(0,T)$, $\widetilde{\psi} \in W^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$, $supp\,\psi \subset \overline{\Omega_R}$. Тоді для будь-якого числа $R_0 \in (0, R/2]$ правильна нерівність* (9) *з $u = \widetilde{u}$.*

Доведення. Доведення цього твердження повторює доведення леми 2, якщо прийняти $u_1 := \widetilde{u}$, $u_2 := 0$. Але в цьому випадку треба використати умову $(\mathcal{A}_4)$ та нерівність

$$\Big|\iint\limits_{Q_R^\tau} f\widetilde{u}\zeta^s dxdt\Big| \leqslant \varepsilon_2 \iint\limits_{Q_R^\tau} |\widetilde{u}|^{p_0(x)}\zeta^s dxdt + \varepsilon_2^{-1/(p_0^- -1)} \iint\limits_{Q_R^\tau} |f|^{p'_0(x)}\zeta^s dxdt,$$

де $\varepsilon_2 \in (0,1)$ – довільне число. □

5. Обґрунтування основного результату.

Доведення теореми 1. Перший етап (*доведення єдиності розв'язку*). Доведемо, що задача (1)—(3) має не більше одного узагальненого розв'язку. Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 — (різні) узагальнені розв'язки задачі (1)—(3). З леми 2 одержуємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^{q(x)}\,dxdt \leqslant C_2 R^{\alpha-\omega}, \tag{22}$$

де $R_0 > 0$, $R \geqslant 1$ – довільні числа такі, що $R_0 \leqslant R/2$.

Зафіксуємо R_0 і перейдемо в (22) до границі при $R \to +\infty$. У підсумку отримаємо, що $u_1 = u_2$ на Q_{R_0}. Оскільки R_0 – довільне число, то звідси одержуємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди на Q.

Другий етап (*побудова наближень розв'язку*). Нехай $R > 0$ – довільне число. Позначимо $\Gamma_{0,R} := \overline{\partial\Omega_R \setminus \Gamma_1}$, $\Gamma_{1,R} := \partial\Omega_R \setminus \Gamma_{0,R}$. Під $\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega_R)$ розумітимемо замикання $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega_R}) := \{v \in C^1(\overline{\Omega_R}) \mid v|_{\Gamma_{0,R}} = 0\}$ в просторі $W^1_{p(\cdot)}(\Omega_R)$. Нехай а $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_R)$ – підпростір простору $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_R)$, складений з функцій w таких, що $w(\cdot,t) \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega_R)$ для майже всіх $t \in (0,T)$.

Введемо також простір

$$\mathbb{U}_{p,R} := \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_R) \cap C([0,T]; L_2(\Omega_R))$$

з нормою

$$\|w\|_{\mathbb{U}_{p,R}} := \|w\|_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q_R)} + \max_{t\in[0,T]} \|w(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega_R)}.$$

Для кожного $l \in \mathbb{N}$ розглянемо задачу: знайти функцію $u_l \in \mathbb{U}_{p,l}$, яка задовольняє початкову умову

$$u_l(\cdot,0) = u_0(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2(\Omega_l), \tag{23}$$

та інтегральну рівність

$$\iint\limits_{Q_l} \Big\{\sum_{i=0}^{n} a_i(u_l)\partial_i\psi\varphi - u_l\psi\varphi'\Big\}\,dxdt = \iint\limits_{Q_l} f\psi\varphi\,dxdt \tag{24}$$

для будь-яких $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega_l)$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$.

Існування узагальненого розв'язку $u_l \in \mathbb{U}_{p,l}$ цієї задачі доводимо методом Гальоркіна (див., наприклад, [13, 10, 17]). Єдиність u_l випливає з умови $(\mathcal{A}_3)$.

Третій етап (*доведення збіжності послідовності наближень розв'язку*). Для кожного $l \in \mathbb{N}$ функцію u_l продовжимо нулем на Q, залишивши за цим продовженням позначення u_l. Очевидно, що $u_l \in \mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}$. Доведемо, що послідовність $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ містить підпослідовність, яка збігається в певному сенсі до узагальненого розв'язку задачі (1)—(3).

Нехай l і m — довільні натуральні числа, причому $1 < l < m$, $R_0 > 0, R \geqslant 1$ — будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 \leqslant R/2 < R \leqslant l-1$. Тоді з леми 2 отримаємо

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u_l(x,t) - u_m(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} |u_l(x,t) - u_m(x,t)|^{q(x)}\,dxdt \leqslant C_2 R^{\alpha-\omega}. \tag{25}$$

Нехай $\varepsilon > 0$ – яке-небудь число. Зафіксуємо довільно вибране значення $R_0 > 0$ і виберемо $R \geqslant \max\{1; 2R_0\}$ настільки великим, щоби права частина нерівності (25) була меншою за ε. Це можна зробити, оскільки показник степеня R у правій частині нерівності (25) від'ємний. Тоді для будь-яких $l \geqslant R+1$ і $m > l$ ліва частина нерівності (25) менша за ε. Це означає, що послідовність $\{u_l\big|_{Q_{R_0}}\}_{l=1}^{\infty}$ є фундаментальною, відповідно, в $L_{q(\cdot)}(Q_{R_0})$ і $C([0,T];L_2(\Omega_{R_0}))$. Оскільки R_0 – довільне число, то звідси випливає існування функції $u \in L_{q(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такої, що $u \in C([0,T];L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$ і

$$u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в} \quad L_{q(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \tag{26}$$

$$u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad C([0,T];L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})). \tag{27}$$

Доведемо обмеженість послідовностей $\{\partial_i u_l\}_{l=1}^{\infty}$ $(i=\overline{0,n})$, $\{a_j(u_l)\}_{l=1}^{\infty}$ $(j=\overline{0,n})$, відповідно, в $L_{p_i(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i=\overline{0,n})$, $L_{p'_j(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(j=\overline{0,n})$. Справді, нехай R_0 – будь-яке дійсне число, а $R := 2R_0$. На підставі леми 3 для довільного натурального числа $l \geqslant R+1$ отримаємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} \sum_{i=0}^{n} |\partial_i u_l(x,t)|^{p_i(x)} dxdt \leqslant C_4(R_0), \tag{28}$$

де $C_4(R_0) > 0$ – стала, яка від l не залежить, але може залежати від R_0.

Згідно з умовою $(\mathcal{A}_2)$ й оцінкою (28) для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ отримаємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} |a_i(u_l)|^{p'_i(x)}\,dxdt \leqslant C_5 \iint\limits_{Q_{R_0}} \sum_{j=0}^{n} |\partial_j u_l(x,t)|^{p_j(x)}\,dxdt +$$

$$+C_6 \iint\limits_{Q_{R_0}} |h_{2,i}(x,t)|^{p'_i(x)}\,dxdt < C_7(R_0), \tag{29}$$

де C_5, C_6, C_7 – додатні сталі, які від l не залежать.

З (26), (28), (29), використовуючи рефлексивність просторів $L_{p_i(\cdot)}(Q_{R_0})$ і $L_{p'_i(\cdot)}(Q_{R_0})$ $(i=\overline{0,n})$ для довільного $R_0 > 0$, отримаємо існування підпослідовності послідовності $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ (за якою залишимо те саме позначення, що і послідовності) та функцій $\chi_i \in L_{p_i(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i=\overline{0,n})$ таких, що

$$\partial_i u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \partial_i u \text{ слабко в } \ L_{p_i(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\ \ i=\overline{0,n}, \tag{30}$$

$$a_i(u_l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i \text{ слабко в } \ L_{p_i(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\ \ i=\overline{0,n}. \tag{31}$$

Використовуючи (30) і (31), з (24) отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=0}^n \chi_i \partial_i \psi\varphi - u\psi\varphi'\Big\}\,dxdt = \iint\limits_Q f\psi\varphi\,dxdt \tag{32}$$

для будь-яких $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$.

Зауважимо таке: коли

$$\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n \chi_i(x,t)\partial_i\psi(x)\Big\}\,dx = \int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n a_j(u)(x,t)\partial_i\psi(x)\Big\}\,dx \tag{33}$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ і будь-яких $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$, то звідси і (32) отримаємо інтегральну тотожність (6) для функції u. Звідси, зокрема, на підставі леми 1 отримаємо, що $u \in C([0,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$. Отже, функція u належить до простору $\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}$. З (23) і (27) випливає, що u задовольняє початкову умову (3). Отож, ми доведемо, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), якщо встановимо правильність рівності (33).

Четвертий етап (*доведення правильності рівностей* (*33*)). Використаємо метод монотонності ([17], розділ 2). Нехай $v \in W^{1,0}_{p(\cdot),\,loc}(\overline{Q})$ – яка-небудь функція, а $w(x')$, $x' = (x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k$, – довільна невід'ємна неперервно диференційовна функція з обмеженим носієм, $\theta \in C^1_c(0,T), \theta \geqslant 0$.

На підставі умови $(\mathcal{A}_3)$ для будь-якого $l \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^n (a_i(u_l) - a_i(v))(\partial_i u_l - \partial_i v)\Big] w\theta\,dxdt \geqslant 0. \tag{34}$$

Нерівність (34) можна переписати у такому вигляді:

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^n a_i(u_l)\partial_i u_l\Big] w\theta\,dxdt - \iint\limits_Q \Bigg[\sum_{i=0}^n \big(a_i(u_l)\partial_i v + a_i(v)(\partial_i u_l - \partial_i v)\big)\Bigg] w\theta\,dxdt \geqslant 0 \tag{35}$$

для всіх $l \in \mathbb{N}$.

За означенням функції u_l матимемо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^n a_i(u_l)\partial_i\psi\varphi - f\psi\varphi - u_l\psi\varphi'\Big]\,dxdt = 0 \tag{36}$$

для довільних $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega}_l$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$. Нехай m таке, що $\operatorname{supp} w \subset \{x' \,|\, |x'| \leqslant m\}$. На підставі леми 1 з тотожності (36) при $l > m$ отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^n a_i(u_l)\partial_i u_l\Big] w\theta\,dxdt = \frac{1}{2}\iint\limits_Q |u_l|^2 w\theta'\,dxdt -$$

$$- \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^k a_i(u_l)u_l\partial_i w - f u_l w\Big]\theta\,dxdt. \tag{37}$$

З (35) і (37) одержимо

$$\frac{1}{2}\iint\limits_Q |u_l|^2 w\theta'\,dxdt - \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^k a_i(u_l)u_l\partial_i w - fu_l w\Big]\theta\,dxdt -$$

$$(38)\qquad - \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^n \big(a_i(u_l)\partial_i v + a_i(v)(\partial_i u_l - \partial_i v)\big)\Big] w\theta\,dxdt \geqslant 0.$$

Перейдемо в (38) до границі при $l \to \infty$. На підставі (26), (30), (31) і того, що $L_{q(\cdot)}(G) \subset L_2(G) \subset L_{p_i(\cdot)}(G)$ для будь-яких $i \in \{1,\ldots,k\}$ та довільної обмеженої області G в $\mathbb{R}^{n+1}$, отримаємо

$$\frac{1}{2}\iint\limits_Q |u|^2 w\theta'\,dxdt - \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^k \chi_i u\partial_i w - fuw\Big]\,dxdt -$$

$$(39)\qquad - \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^n \big(\chi_i\partial_i v + a_i(v)(\partial_i u - \partial_i v)\big)\Big] w\theta\,dxdt \geqslant 0.$$

Тепер в (36) перейдемо до границі при $l \to \infty$. На підставі (30), (31) отримаємо

$$(40)\qquad \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^n \chi_i\partial_i\psi\varphi - f\psi\varphi - u\psi\varphi'\Big]\,dxdt = 0$$

для довільних $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$. Звідси на підставі леми 1 одержуємо

$$(41)\qquad \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^n \chi_i\partial_i u\Big]\,w\theta\,dxdt = \frac{1}{2}\iint\limits_Q |u|^2 w\theta'\,dxdt - \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^k \chi_i u\partial_i w - fuw\Big]\theta\,dxdt.$$

З (39) та (41) отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^n \chi_i\,\partial_i u\Big] w\theta\,dxdt - \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^n \big(\chi_i\partial_i v + a_i(v)(\partial_i u - \partial_i v)\big)\Big] w\theta\,dxdt \geqslant 0,$$

тобто

$$(42)\qquad \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^n \big(\chi_i - a_i(v)\big)\big(\partial_i u - \partial_i v\big)\Big]\,w\theta\,dxdt \geqslant 0.$$

Візьмемо в (42) $v = u - \lambda\psi\varphi$, де $\lambda > 0$ – довільне число, $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$ – будь-які функції. Після ділення на λ і врахування довільності функцій $\psi \in \widetilde{W}^1_{p(\cdot),c}(\Omega)$, $\varphi \in C^1_c(0,T)$ одержуємо

$$(43)\qquad \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=0}^n \big(\chi_i - a_i(u - \lambda g)\big)\partial_i\psi\Big]\varphi\,dxdt = 0.$$

В цій рівності спрямуємо λ до 0, використовуючи теорему Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла. У підсумку одержимо

$$\iint\limits_{Q} \Big[\sum_{i=0}^{n} \big(a_i(u) - \chi_i\big)\partial_i \psi\Big] \varphi \, dxdt = 0, \tag{44}$$

звідки випливає рівність (33). □

6. Висновки. Ми дослідили мішані задачі без обмежень на нескінченності для одного класу нелінійних анізотропних параболічних рівнянь зі змінними показиками нелінійності. Ввели поняття узагальненого розв'язку мішаної задачі для розглядуваних рівнянь, використавши узагальнені простори Лебега і Соболєва. Визначили умови існування та єдиності узагальнених розв'язків досліджуваних задач. Під час доведення існування розв'язку використано метод вичерпування необмеженої області та метод монотонності.

Список використаної літератури

1. H. Brézis, *Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity*, Appl. Math. Optim. **12** (1984), no. 3, 271–282.
2. F. Bernis, *Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity*, Arch. Rational Mech. Anal. **106** (1989), no. 3, 217–241.
3. А. Е. Шишков, *Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности*, Укр. мат. журн. **47** (1995), no. 2, 277–289.
4. Н. М. Бокало, *Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений*, Дифференц. уравнения **8** (1994), no. 8, 1325–1334.
5. A. Gladkov and M. Guedda, *Diffusion-absorption equation without growth restridtions on the data at infinity*, J. Math. Anal. Appl. **269** (2002), no. 1, 16–37.
6. І. Медвідь, *Задачі для нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь в анізотропних просторах*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **64** (2005), 149–166.
7. О. М. Бугрій, *Задача з початковою умовою для нелінійної параболічної варіаційної нерівності в необмеженій за просторовими змінними області*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **67** (2007), 30–52.
8. О. М. Бугрій, *Про єдиність розв'язку деякої нелінійної параболічної варіаційної нерівності в необмеженій області*, Математичний вісник НТШ. **3** (2006), 5–16.
9. O. Kováčik and J. Rákosníc, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$*, Czech. Math. J. **41** (1991), no. 4, 592–618.
10. В. Н. Самохин, *Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации,* Дифференц. уравнения **32** (1996), no. 5, 643–651.
11. M. Růžička, *Electroreological fluids: modeling and mathematical theory,* Springer, Berlin, 2000.
12. М. М. Бокало, І. Б. Паучок, *Про коректність задачі Фур'е для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності,* Мат. студії **24** (2006), no. 1, 25–48.

13. О. М. Бугрій, С. П. Лавренюк, *Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації,* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **56** (2000), 33–43.
14. M. Bokalo, O. Domanska, *On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces,* Mat. Stud. **28** (2007), no. 1, 77–91.
15. О. В. Доманська, *Нелінійні еліптичні рівняння в квазіциліндричних областях*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **67** (2007), 104–118.
16. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, Москва, 1964.
17. Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач,* Мир, Москва, 1972.

Стаття: надійшла до редколегії 20.12.2017
доопрацьована 26.12.2017
прийнята до друку 27.12.2017

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR SECOND ORDER PARABOLIC EQUATIONS WITH THE VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY IN UNBOUNDED DOMAINS WITHOUT CONDITIONS AT INFINITY

Mykola BOKALO, Nikolyetta HRYADIL

Ivan Franko National University of Lviv
1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: mm.bokalo@gmail.com, nikolyetta@gmail.com

This paper is devoted to the results of investigation of initial-boundary value problems for nonlinear parabolic equations with the variable exponents of nonlinearity in unbounded domains. We consider weak solutions which belong to the generalized Sobolev and Lebesgue spaces. Under certain conditions on data-in the uniqueness and existence of the solutions are proved. Also estimates of the solutions are obtained.

Key words: parabolic equation, variable exponent of nonlinearity, unbounded domain, monotone method.