ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 164–178
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 164–178

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА СЛАБКО НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Наталія ПРОЦАХ

Національний лісотехнічний університет України
вул. Генерала Чупринки, 103, 79057, Львів
e-mail: protsakh@ukr.net

Розглянуто обернену задачу визначення коефіцієнта, залежного від часової змінної, біля невідомої функції, яка є розв'язком мішаної задачі для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння. Знайдено достатні умови існування та єдиності розв'язку з просторів Соболєва цієї задачі.

Ключові слова: ультрапараболічне рівняння, обернена задача, інтегральна умова перевизначення, розв'язок майже всюди.

1. Вступ. Для моделювання багатьох явищ фізики, механіки, біології, економіки (чисельності популяцій, теорії бінарних електролітів, теорії азіатських, американських та європейських опціонів, процесів дифузії з інерцією тощо) використовують задачі для ультрапараболічних рівнянь (див. [12, 14, 15] і наведену там бібліографію). Обернені задачі пов'язані з пошуком причин явищ за їхніми відомими наслідками. З математичної точки зору це означає визначення невідомих коефіцієнтів чи правих частин рівнянь за додаткових умов на розв'язки цих рівнянь.

Обернені задачі визначення правих частин ультрапараболічних рівнянь, які містять одну чи декілька невідомих функцій, досліджено у працях [3, 8, 9, 20]. Умови однозначної розв'язності обернених задач відшукання коефіцієнтів лінійних параболічних і гіперболічних рівнянь знайдені, зокрема, у працях [1, 2, 7, 11, 13], [17]–[19], [21]–[23]. Для їхнього визначення використано: методи теорії оптимального контролю [23], продовження за параметром, нерухомої точки, зрізки та регуляризації [2, 11], напівгруп [19], чисельні методи [21], властивості функції Ґріна [13, 17, 18], теорію операторних рівнянь [1, 7].

У цій праці розглянуто обернену задачу з інтегральною умовою перевизначення знаходження коефіцієнта, залежного від часу, біля невідомої функції, яка є розв'язком мішаної задачі для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння. За допомогою методу послідовних наближень визначено достатні умови існування

2010 Mathematics Subject Classification: 35K70, 35R30
© Процах Н., 2017

та єдиності розв'язку задачі, який належить до просторів Соболєва. Прямі мішані задачі для нелінійних ультрапараболічних рівнянь було досліджено у працях [4, 5, 10, 16].

2. Основні позначення та функціональні простори. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ і $D \subset \mathbb{R}^l$ – обмежені області з межами $\partial\Omega \in C^2$ і $\partial D \in C^1$; $T \in (0,\infty)$, $x \in \Omega$, $y \in D$, $t \in (0,T)$, $G = \Omega \times D$, $Q_\tau = \Omega \times D \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times D \times (0,T)$, $S_T = \Omega \times \partial D \times (0,T)$, $n,l \in \mathbb{N}$, $G_\xi = \{(x,y,t) : (x,y) \in G,\ t = \xi\}$, $\xi \in [0,T]$.

Використовуватимемо такі простори:

$L^\infty(Q_T) := \{w : w$ — вимірна та існує така стала C, що $|w(x,y,t)| \le C$ майже всюди на $Q_T\}$, $\|w; L^\infty(Q_T)\| = \inf\{C : |w(x,y,t)| \le C$ майже всюди на $Q_T\}$;

$$L^2(G) := \left\{ w : w \text{ — вимірна, } \int\limits_G (w(x,y))^2\,dx\,dy < \infty \right\},$$

$$\|w; L^2(G)\| = \left(\int\limits_G (w(x,y))^2\,dx\,dy \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$L^2(Q_T) := \left\{ w : w \text{— вимірна, } \int\limits_{Q_T} (w(x,y,t))^2\,dx\,dy\,dt < \infty \right\},$$

$$\|w; L^2(Q_T)\| = \left(\int\limits_{Q_T} (w(x,y,t))^2\,dx\,dy\,dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

$W^{1,2}(\cdot)$ — множина всіх розподілів w, які разом зі своїми похідними першого порядку за всіма змінними належать до простору $L^2(\cdot)$,

$$\|w; W^{1,2}(0,T)\| = \left(\int\limits_0^T \left((w(t))^2 + (w'(t))^2\right) dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|w; W^{1,2}(G)\| = \left(\int\limits_G \left((w(x,y))^2 + \sum_{i=1}^n (w_{x_i}(x,y))^2 + \sum_{j=1}^l (w_{y_j}(x,y))^2 \right) dx\,dy \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|w; W^{1,2}(\Omega)\| = \left(\int\limits_\Omega \left((w(x))^2 + \sum_{i=1}^n (w_{x_i}(x))^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|w; W^{1,2}(Q_T)\| = \left(\int\limits_{Q_T} \left((w(x,y,t))^2 + (w_t(x,y,t))^2 + \sum_{i=1}^n (w_{x_i}(x,y,t))^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{j=1}^l (w_{y_j}(x,y,t))^2 \right) dx\,dy\,dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

$C^k(O)$ — простір k–раз неперервно диференційовних функцій на O;
$C([0,T]; L^2(G))$ — простір неперервних функцій $([0,T] \to L^2(G))$;
$C^1(D; C^1(\overline{\Omega}))$ — простір неперервно-диференційовних функцій $(D \to C^1(\overline{\Omega}))$.

3. Формулювання задачі. В області Q_T розглянемо задачу для рівняння

$$(1)\quad u_t+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j}+(c(t)+b(x,y))u+g(x,y,t,u)=f(x,y,t)$$

з початковою умовою

$$(2)\qquad u(x,y,0)=u_0(x,y),\quad (x,y)\in G,$$

крайовими умовами

$$(3)\qquad u|_{\Sigma_T}=0,\qquad u|_{S_T^1}=0$$

та умовою перевизначення

$$(4)\qquad \int_G K(x,y)u(x,y,t)\,dx\,dy=E(t),\qquad t\in[0,T],$$

де $u(x,y,t)$, $c(t)$ — невідомі функції, $S_T^1:=\Big\{(x,y,t)\in S_T:\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i)<0\Big\}$, ν — одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S_T.

Позначимо $S_T^2:=\Big\{(x,y,t)\in S_T:\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i)\geq 0\Big\}$. Припустимо, що

(S) існує така поверхня з додатною мірою Лебега $\Gamma_1\subset\partial D\subset\mathbb{R}^{l-1}$, що $S_T^1=\Omega\times\Gamma_1\times(0,T)$.

Нехай виконуються такі умови:

(A) $a_{ij}\in C([0,T];L^2(G))$, $i,j=1,\dots,n$, $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j\geq a_0|\xi|^2$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$ та для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$, a_0 — додатна стала;

(B) $b\in L^\infty(G)$, $b(x,y)\geq b_0$ для майже всіх $(x,y)\in G$, b_0 – стала;

(E) $E\in W^{1,2}(0,T)$, $E(0)=\int_G K(x,y)u_0(x,y)\,dx\,dy$;

(F) $f\in C([0,T];L^2(G))$;

(G) $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за змінними (x,y,t) в області Q_T для всіх $\xi\in\mathbb{R}^1$ і неперервна за ξ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$, причому така, що існує додатна стала g^0, що $|g(x,y,t,\xi)-g(x,y,t,\eta)|\leq g^0|\xi-\eta|$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$ та всіх ξ, $\eta\in\mathbb{R}^1$;

(K) $K\in C^1(D;C^1(\overline{\Omega}))$, $K\big|_{\partial\Omega\times D}=0$, $K|_{\Omega\times\Gamma_2}=0$, де $\Gamma_2=\partial D\setminus\Gamma_1$;

(L) $\lambda_i\in C(\overline{Q}_T)$, $\lambda_{iy_i}\in L^\infty(Q_T)$, $i=1,\dots,l$;

(U) $u_0,u_{0,y_j},u_{0,x_i}\in L^2(G)$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,l$, $u_0|_{\partial\Omega\times D}=0$, $u_0|_{\Omega\times\Gamma_1}=0$.

4. Існування та єдиність розв'язку прямої задачі. Припустимо спочатку, що в рівнянні (1) $c(t)=c^*(t)$, де $c^*\in C([0,T])$, – відома функція; розглянемо мішану задачу для рівняння (1) з початковою умовою (2) та крайовими умовами (3).

Запровадимо такі простори:

$V_1(Q_T):=\Big\{w:\ w,\,w_{x_i}\in L^2(Q_T),\ i=1,\dots,n,\ w\big|_{\Sigma_T}=0\Big\}$;

$V_2(G):=\Big\{w:\ w\in W^{1,2}(G),\ w\big|_{\partial\Omega\times D}=0, w\big|_{\Omega\times\Gamma_1}=0\Big\}$;

$V_3(Q_T):=\{w:\ w\in W^{1,2}(Q_T), w|_{S_T^1}=0, w\big|_{\Sigma_T}=0\}$;

$$V_4(Q_T) := \left\{ w : \ w \in V_3(Q_T), w_{x_i x_j} \in L^2(Q_T), \ i,j = 1,\dots,n \right\}.$$

Теорема 1. *Нехай справджуються умови* (A), (B), (G), (L), (F), (U), (S) *та:*

1) $a_{ijx_i}, a_{ijt} \in L^\infty(Q_T)$, $b_{y_k} \in L^\infty(Q_T)$, $f_{y_k} \in L^2(Q_T)$, $c^* \in C([0,T])$, $i,j = 1,\dots,n$, $k = 1,\dots,l$;
2) *існує така стала* g^1, *що для майже всіх* $(x,y,t) \in Q_T$ *та всіх* $\xi \in \mathbb{R}^1$ *виконуються нерівності* $|g_{y_i}(x,y,t,\xi)| \le g^1$, $i = 1,\dots,l$; $g(x,y,t,0)|_{S_T^1} = 0$;
3) $f|_{S_T^1} = 0$.

Тоді існує єдина функція $u^* \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, *яка задовольняє умову* (2) *та рівність*

$$\int\limits_{Q_T} \Bigg(u_t^* v + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i}^* v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i}^* v_{x_i} +$$

$$(5) \qquad + (c^*(t) + b(x,y)) u^* v + g(x,y,t,u^*) v \Bigg) \, dx\, dy\, dt = \int\limits_{Q_T} f(x,y,t) v \, dx\, dy\, dt$$

для всіх функцій $v \in V_1(Q_T)$. *Крім того,* $u^* \in V_4(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$ *та* u^* *є розв'язком майже всюди задачі* (1)—(3).

Доведення теореми проводимо за схемами доведення теорем 1, 2 і леми 1 із [4] та теореми 3 і леми 1 із [8].

Зауваження 1. Для похідних функції u^* виконуються оцінки

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} (u_{y_i}^*)^2 \, dx\, dy\, dt \le M, \qquad \int\limits_{Q_T} (u_t^*)^2 \, dx\, dy\, dt \le M,$$

де стала M залежить від функції u_0 та коефіцієнтів і правої частини рівняння (1).

5. Існування та єдиність розв'язку оберненої задачі.

Означення 1. Пару функцій $(u(x,y,t), c(t))$ назвемо *розв'язком задачі* (1)—(4), якщо $u \in V_4(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, $c \in ([0,T])$, причому ці функції для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ задовольняють рівняння (1) і, крім того, функція $u(x,y,t)$ задовольняє умови (2) та (4).

Позначимо

$$A(t) := -E'(t) + \int\limits_G K(x,y) f(x,y,t) \, dx\, dy,$$

$$B(x,y,t) := \sum_{i=1}^{l} (\lambda_i(x,y,t) K(x,y))_{y_i} + \sum_{i,j=1}^{l} (K_{x_j}(x,y) a_{ij}(x,y,t))_{x_i} - K(x,y) b(x,y).$$

Із (1) та (4) випливає, що розв'язок задачі (1) – (4) задовольняє таку рівність:

$$(6) \quad E(t)c(t) = A(t) + \int\limits_{G_t} B(x,y,t) u \, dx\, dy - \int\limits_{G_t} K(x,y) g(x,y,t,u) \, dx\, dy, \ t \in [0,T].$$

Лема 1. *Нехай виконуються умови теореми 1 та умови* (K), (E). *Для того, щоб пара функцій* $(u(x,y,t),c(t))$, *де* $u \in V_4(Q_T) \cap C([0,T];L^2(G))$, $c \in C([0,T])$, *була розв'язком задачі* (1)–(4) *необхідно і достатньо, щоб ця пара задовольняла рівняння* (1) *для майже всіх* $(x,y,t) \in Q_T$, *а також* (2) *і* (6).

Доведення. Необхідність. Нехай $(u^*(x,y,t),c^*(t))$ є розв'язком задачі (1)–(4). Продиференціюємо умову (4) один раз по t

$$\int\limits_G K(x,y)u_t^*(x,y,t)\,dx\,dy = E'(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{7}$$

На підставі (1) і (7) отримуємо

$$\int\limits_{G_t} K(x,y)\Big(f(x,y,t) - \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}^* + \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}^*)_{x_j} -$$
$$-b(x,y)u^* - c^*(t)u^* - g(x,y,t,u^*)\Big)\,dx\,dy = E'(t), \quad t \in [0,T]. \tag{8}$$

Проінтегруємо частинами в (8), врахувавши умову (K)

$$-E(t)c^*(t) + \int\limits_{G_t}\Big(K(x,y)f(x,y,t) +$$
$$+B(x,y,t)u^* - K(x,y)g(x,y,t,u^*)\Big)\,dx\,dy = E'(t), \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

З (9) випливає, що $(u^*(x,y,t),c^*(t))$ задовольняє рівність (6). Крім того, u^* задовольняє умову (2), а також рівняння (1) при $c(t) = c^*(t)$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$.

Достатність. Нехай $c^* \in C([0,T])$, $u^* \in V_4(Q_T) \cap C([0,T];L^2(G))$ і для них виконуються (2), (6) та (1) для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$. Тоді u^* є розв'язком майже всюди задачі (1)–(3) з функцією c^* замість c в рівнянні (1).

Приймемо $E^*(t) = \int\limits_{G_t} K(x,y)u^*(x,y,t)\,dx\,dy$, $t \in [0,T]$. Так само, як у доведенні необхідності, знаходимо, що

$$E^*(t)c^*(t) = -(E^*(t))' + \int\limits_{G_t}\Big(K(x,y)f(x,y,t) + B(x,y,t)u^* -$$
$$-K(x,y)g(x,y,t,u^*)\Big)\,dx\,dy, \quad t \in [0,T]. \tag{10}$$

З іншого боку, $c^*(t)$ та $u^*(x,y,t)$ задовольняють рівність

$$E(t)c^*(t) = -(E(t))' + \int\limits_{G_t}\Big(K(x,y)f(x,y,t) + B(x,y,t)u^* -$$
$$-K(x,y)g(x,y,t,u^*)\Big)\,dx\,dy, \quad t \in [0,T]. \tag{11}$$

Із (10), (11) випливає

$$(E^*(t) - E(t))c^*(t) = -(E^*(t) - E(t))', \ t \in [0,T]. \tag{12}$$

Проінтегруємо (12) і врахувавши, що $E^*(0) = E(0) = \int\limits_G K(x,y)u_0(x,y)\,dx\,dy$, отримаємо $E^*(t) = E(t)$, $t \in [0,T]$, а отже, для $u^*(x,y,t)$ виконується умова перевизначення (4). Лему доведено. $\square$

Позначимо $\lambda^1 = \max\limits_i \operatorname*{esssup}\limits_{Q_T} |\lambda_{iy_i}(x,y,t)|$;

$\gamma_0 = \gamma_0(\Omega)$ – коефіцієнт із нерівності Фрідріхса

$$\int\limits_\Omega |v(x)|^2\,dx \le \gamma_0 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |v_{x_i}(x)|^2\,dx, \tag{13}$$

яка виконується для функцій $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$;

$$\begin{aligned} C_1 &:= \frac{3}{\min\limits_{[0;T]}(E(t))^2} \max_{[0;T]} \bigg((A(t))^2 + 2\int\limits_G (g(x,y,t,0))^2\,dx\,dy + \\ &+ \bigg(\int\limits_G (B(x,y,t))^2\,dx\,dy + 2\int\limits_G (K(x,y)g^0)^2\,dx\,dy \bigg) \int\limits_G |u_0(x,y)|^2\,dx\,dy \bigg); \\ C_2 &:= \frac{3}{\min\limits_{[0;T]}(E(t))^2} \max_{[0;T]} \bigg(\int\limits_G (B(x,y,t))^2\,dx\,dy + 2\int\limits_G (K(x,y)g^0)^2\,dx\,dy \bigg) \times \\ &\times \int\limits_{Q_T} \big((f(x,y,t))^2 + (g(x,y,t,0))^2 \big)\,dx\,dy\,dt, \\ C_3 &:= C_1 - \frac{a_0}{\gamma_0} + \frac{\lambda^1 l}{2} - b_0 + g^0. \end{aligned}$$

Припустимо, що виконується умова

$$\text{існує таке } \delta_1 > 0, \text{ що } \ C_3 + \frac{C_2}{\delta_1} + \delta_1 \le 0. \tag{14}$$

Зауважимо, що умова (14) виконується, зокрема, коли $C_3 < 0$, $\ 4C_2 < C_3^2$.

Позначимо:

$\delta > 0$ – найбільше з чисел δ_1, для яких виконується (14);

$$\begin{aligned} M_1 &:= \frac{1}{\delta} \int\limits_{Q_T} \big((f(x,y,t))^2 + (g(x,y,t,0))^2 \big)\,dx\,dy\,dt + \int\limits_G (u_0(x,y))^2\,dx\,dy; \\ M_2 &:= C_1 + \frac{C_2}{\delta} = \frac{3}{\min\limits_{[0;T]}(E(t))^2} \max_{[0;T]} \bigg((A(t))^2 + 2\int\limits_G (g(x,y,t,0))^2\,dx\,dy + \\ &+ \bigg(\int\limits_G (B(x,y,t))^2\,dx\,dy + 2\int\limits_G (K(x,y)g^0)^2\,dx\,dy \bigg) M_1 \bigg); \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_3 &:= \frac{2}{\min\limits_{[0,T]}(E(t))^2}\int\limits_{Q_T}(B(x,y,t))^2\,dx\,dy\,dt+(g^0)^2T\int\limits_G(K(x,y))^2\,dx\,dy;\\
M_4 &:= \min\left\{T;\frac{1}{-2C_3-\frac{2C_2}{\delta}-\delta}\right\}\frac{M_1}{\delta};\\
M_5 &:= M_3M_4;\\
M_6 &:= \frac{2}{\min\limits_{[0,T]}(E(t))^2}\sup_{[0,T]}\int\limits_G(B(x,y,t))^2\,dx\,dy+g^0\int\limits_G(K(x,y))^2\,dx\,dy;\\
M_7 &:= \sqrt{\frac{M_6M_1}{\delta}}.
\end{aligned}
$$

Теорема 2. *Нехай* $E(t)\neq 0$ *для всіх* $t\in[0,T]$, *виконуються умови* (A), (B), (L), (U), (G), (E), (K), (F), (S), (14) *і* $a_{ijx_i}\in L^\infty(Q_T)$, $b_{y_k}\in L^\infty(Q_T)$, $f_{y_k}\in L^2(Q_T)$, $i,j=1,\dots,n$, $k=1,\dots,l$, $f|_{S_T^1}=0$ *та* $M_5<1$. *Тоді існує розв'язок задачі* (1)–(4).

Доведення. Використаємо метод послідовних наближень. Побудуємо наближення $(u^m(x,y,t),c^m(t))$ розв'язку задачі (1)–(4), де функції $c^m(t)$, $m\in\mathbb{N}$, визначаються так, що вони задовольняють рівності

$$c^1(t):=0,$$

$$c^m(t)=\frac{1}{E(t)}\left(A(t)+\int\limits_{G_t}\left(B(x,y,t)u^{m-1}-K(x,y)g(x,y,t,u^{m-1})\right)dx\,dy\right),$$

$$t\in[0;T],\ m\geq 2, \tag{15}$$

а u^m задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big(u_t^mv+\sum_{i=1}^l\lambda_i(x,y,t)u^m_{y_i}v+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t)u^m_{x_i}v_{x_j}+(c^m(t)+b(x,y))u^mv+$$

$$+g(x,y,t,u^m)v\Big)\,dx\,dy\,dt=\int\limits_{Q_\tau}f(x,y,t)v\,dx\,dy\,dt,\quad m\geq 1,\ \tau\in(0;T], \tag{16}$$

$$u^m(x,y,0)=u_0(x,y),\quad (x,y)\in G, \tag{17}$$

причому (16) виконується для всіх $v\in V_1(Q_T)$.

На підставі теореми 1 для кожного $m\in\mathbb{N}$ існує єдина функція $u^m\in V_3(Q_T)\cap C([0,T];L^2(G))$, для якої виконуються (16), (17).

Доведемо, що $c^m(t)\geq -M_2$ для всіх $m\in\mathbb{N}$, $t\in[0;T]$. Нехай $c^m(t)\geq c_{0m}$ для всіх $t\in[0,T]$, де $c_{0m}\in\mathbb{R}$. Знайдемо оцінку для $\int\limits_G|u^m(x,y,\tau)|^2\,dx\,dy$. Виберемо в (16) $v=u^m$

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big(u_t^mu^m+\sum_{i=1}^l\lambda_i(x,y,t)u^m_{y_i}u^m+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t)u^m_{x_i}u^m_{x_j}+(c^m(t)+b(x,y))(u^m)^2+$$

$$+g(x,y,t,u^m)u^m\Big)\,dx\,dy\,dt=\int\limits_{Q_\tau} f(x,y,t)u^m\,dx\,dy\,dt,\ \tau\in(0;T],\quad m\ge 1. \tag{18}$$

Врахувавши умови (A), (B), (L), (U), (G), (F), з (18) отримуємо нерівність

$$\int\limits_G (u^m(x,y,\tau))^2\,dx\,dy+\int\limits_{S_\tau^2}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)(u^m)^2\cos(\nu,y_i)\,d\sigma+2a_0\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}(u^m_{x_i})^2\,dx\,dy\,dt+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}(-\lambda^1 l+2c_{0m}+2b_0-2g^0-2\delta)(u^m)^2\,dx\,dy\,dt\le\frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_\tau}\Big((f(x,y,t))^2+$$
$$+(g(x,y,t,0))^2\Big)\,dx\,dy\,dt+\int\limits_G(u_0(x,y))^2\,dx\,dy,\ \tau\in(0;T],\quad m\ge 1. \tag{19}$$

Застосувавши до третього доданку з (19) нерівність (13), отримуємо

$$\int\limits_G (u^m(x,y,\tau))^2\,dx\,dy+\int\limits_{S_\tau^2}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)(u^m)^2\cos(\nu,y_i)\,d\sigma+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau}\left(\frac{2a_0}{\gamma_0}-\lambda^1 l+2c_{0m}+2b_0-2g^0-2\delta\right)(u^m)^2\,dx\,dy\,dt\le\frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_\tau}\Big((f(x,y,t))^2+$$
$$+(g(x,y,t,0))^2\Big)\,dx\,dy\,dt+\int\limits_G(u_0(x,y))^2\,dx\,dy,\ \tau\in(0;T],\quad m\ge 1. \tag{20}$$

За умови, що $\dfrac{2a_0}{\gamma_0}-\lambda^1 l+2c_{0m}+2b_0-2g^0-2\delta\ge 0$, з (20) одержуємо оцінку

$$\int\limits_G (u^m(x,y,\tau))^2\,dx\,dy\le M_1,\ \tau\in(0;T],\qquad m\ge 1. \tag{21}$$

Піднісши обидві частини рівності (15) до квадрата та використавши нерівність Гельдера, отримуємо оцінку

$$(c^m(t))^2\le\frac{3}{(E(t))^2}\Bigg((A(t))^2+\Bigg(\int\limits_G(B(x,y,t))^2\,dx\,dy+2\int\limits_G(K(x,y)g^0)^2\,dx\,dy\Bigg)\times$$
$$\times\int\limits_G(u^{m-1})^2\,dx\,dy+2\int\limits_G(g(x,y,t,0))^2\,dx\,dy\Bigg),\qquad t\in[0;T],\ m\ge 2. \tag{22}$$

З (21) і (22) випливає, що $|c^m(t)|\le M_2,\ t\in[0;T],\ m\in\mathbb{N}$. Зауважимо, що якщо замість c_{0m} вибрати $-M_2$, то врахувавши умову (14), отримуємо

$$\frac{2a_0}{\gamma_0}-\lambda^1 l+2c_{0m}+2b_0-2g^0-2\delta=\frac{2a_0}{\gamma_0}-\lambda^1 l-2M_2+2b_0-2g^0-2\delta=-2C_3-\frac{2C_2}{\delta}-\delta\ge 0.$$

Отже, для всіх $m\in\mathbb{N}$

$$c^m(t)\ge -M_2,$$

і можна обрати $c_{0m}:=-M_2$ для всіх $m\in\mathbb{N}$.

Доведемо, що послідовність $\{(u^m(x,y,t), c^m(t))\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до розв'язку задачі (1)–(4). Позначимо

$$z^m := z^m(x,y,t) = u^m(x,y,t) - u^{m-1}(x,y,t),$$
$$r^m(t) := c^m(t) - c^{m-1}(t), \qquad m \geq 2.$$

З (15) випливають рівності

$$r^m(t) = \frac{1}{E(t)} \int\limits_G \left(B(x,y,t) z^{m-1} - K(x,y) \left((g(x,y,t,u^{m-1}) - g(x,y,t,u^{m-2}) \right) \right) dx\,dy,$$

$$t \in [0,T],\ m \geq 2. \tag{23}$$

Піднісши обидві частини цих рівностей до квадрата, проінтегрувавши за змінною t та врахувавши, що на підставі умови (G)

$$\int\limits_{Q_\tau} \left(g(x,y,t,u^m) - g(x,y,t,u^{m-1}) \right) z^m\,dx\,dy\,dt \leq g^0 \int\limits_{Q_\tau} (z^m)^2\,dx\,dy\,dt,\ \ \tau \in (0;T],\ \ m \geq 2,$$

отримаємо

$$\int\limits_0^T (r^m(t))^2\,dt \leq M_3 \int\limits_{Q_T} (z^{m-1})^2\,dx\,dy\,dt, \qquad m \geq 2. \tag{24}$$

Оскільки з (17) випливає, що $z^m(x,y,0) = 0$, $(x,y) \in G$, $m \geq 2$, то з (16), знаходимо, що для всіх функцій $v \in V_1(Q_T)$ справджуються рівності

$$\frac{1}{2} \int\limits_G (z^m(x,y,\tau))^2\,dx\,dy + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) z^m_{y_i} z^m + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) z^m_{x_i} z^m_{x_j} +$$
$$+ b(x,y)(z^m)^2 + (g(x,y,t,u^m) - g(x,y,t,u^{m-1}))z^m +$$
$$+ (c^m(t)u^m - c^{m-1}(t)u^{m-1})z^m \Bigg) dx\,dy\,dt = 0, \qquad \tau \in (0;T],\ m \geq 2. \tag{25}$$

Зауважимо, що

$$(c^m(t)u^m - c^{m-1}(t)u^{m-1})z^m = c^m(t)(z^m)^2 + r^m(t)u^{m-1}z^m,$$

а тому

$$\int\limits_{Q_\tau} (c^m(t)u^m - c^{m-1}(t)u^{m-1})z^m\,dx\,dy\,dt \geq \left(-M_2 - \frac{\delta}{2} \right) \int\limits_{Q_\tau} (z^m)^2\,dx\,dy\,dt -$$
$$- \frac{1}{2\delta} \int\limits_0^\tau (r^m(t))^2 \left(\int\limits_{G_t} (u^{m-1})^2\,dx\,dy \right) dt \geq \left(-M_2 - \frac{\delta}{2} \right) \int\limits_{Q_\tau} (z^m)^2\,dx\,dy\,dt -$$
$$- \frac{M_1}{2\delta} \int\limits_0^\tau (r^m(t))^2\,dt, \qquad \tau \in (0,T],\ m \geq 2. \tag{26}$$

Тоді, враховуючи умови (A), (B), (L), (U), (G), (F) та (26), з (25) отримуємо нерівність

$$\int\limits_G (z^m(x,y,\tau))^2\,dx\,dy + \int\limits_{S^2_\tau} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)(z^m)^2 \cos(\nu, y_i)\,d\sigma +$$

$$+2a_0 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} (z^m_{x_i})^2\,dx\,dy\,dt + \int\limits_{Q_\tau} \big(2b_0 - \lambda^1 l - 2g^0 - 2M_2 - \delta\big)(z^m)^2\,dx\,dy\,dt \le$$

$$\le \frac{M_1}{\delta} \int\limits_0^T (r^m(t))^2\,dt, \qquad \tau \in (0;T],\ m \ge 2. \tag{27}$$

Застосувавши до третього доданка з (27) нерівність (13), отримаємо оцінку

$$\int\limits_G (z^m(x,y,\tau))^2\,dx\,dy + \int\limits_{S^2_\tau} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)(z^m)^2 \cos(\nu, y_i)\,d\sigma + \int\limits_{Q_\tau} \big(2b_0 - l\lambda^1 - 2g^0 +$$

$$+\frac{2a_0}{\gamma_0} - 2M_2 - \delta\big)(z^m)^2\,dx\,dy\,dt \le \frac{M_1}{\delta} \int\limits_0^T (r^m(t))^2\,dt,\ \tau \in (0;T],\ m \ge 2. \tag{28}$$

Оскільки виконується умова (14), то з (28) знаходимо оцінки

$$\int\limits_G (z^m(x,y,\tau))^2\,dx\,dy \le \frac{M_1}{\delta} \int\limits_0^T (r^m(t))^2\,dt, \qquad \tau \in (0;T],\ m \ge 2 \tag{29}$$

та

$$\int\limits_{Q_T} (z^m)^2\,dx\,dy\,dt \le M_4 \int\limits_0^T (r^m(t))^2\,dt, \qquad m \ge 2. \tag{30}$$

З (24) та (30) випливає, що

$$\int\limits_0^T (r^m(t))^2\,dt \le M_5 \int\limits_0^T (r^{m-1}(t))^2\,dt \le (M_5)^{m-2} \int\limits_0^T (r^2(t))^2\,dt, \qquad m \ge 2. \tag{31}$$

Із (23) легко отримати оцінку

$$(r^m(t))^2 \le M_6 \int\limits_G (z^{m-1}(x,y,t))^2\,dx\,dy, \qquad t \in [0,T],\, m \ge 2. \tag{32}$$

Врахувавши (29), з (32) знайдемо

$$|r^m(t)| \le M_7 \left(\int\limits_0^T (r^{m-1}(t))^2\,dt \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad t \in [0,T],\, m \ge 2. \tag{33}$$

Використавши (31), (33) та умову $M_5 < 1$, отримаємо, що для всіх $k, m \in \mathbb{N},\ m \geq 3$, справджується оцінка

$$|c^{m+k}(t) - c^m(t)| \leq \sum_{i=m+1}^{m+k} |r^i(t)| \leq M_7 \sum_{i=m+1}^{m+k} \left(\int_0^T (r^{i-1}(t))^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{i=m+1}^{m+k} M_7 (M_5)^{\frac{i-3}{2}} \left(\int_0^T (r^2(t))^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq M_7 \frac{(M_5)^{\frac{m-2}{2}} (1 - (M_5)^{\frac{k}{2}})}{1 - (M_5)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_0^T (r^2(t))^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq M_7 \frac{(M_5)^{\frac{m-2}{2}}}{1 - (M_5)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_0^T (r^2(t))^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m \geq 3. \tag{34}$$

Із (34) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке m_0, що для всіх $k,\ m \in \mathbb{N}$, $m > m_0$, виконуються нерівності $\|c^{m+k}(t) - c^m(t); C([0,T])\| \leq \varepsilon$. Отже, послідовність $\{c^m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $C([0,T])$.

Тоді з (30) та (27) випливає, що $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L^2(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$ і $\{u^m_{x_i}\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L^2(Q_T)$, а тому при $m \to \infty$

$$\begin{gathered} u^m \to u \text{ сильно в } L^2(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G)), \\ u^m_{x_i} \to u_{x_i} \text{ сильно в } L^2(Q_T),\ i = 1, \ldots, n, \\ c^m \to c \text{ сильно в } C([0,T]). \end{gathered} \tag{35}$$

Із зауваження 1 випливає, що

$$\int_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} (u^m_{y_i})^2 \, dx\, dy\, dt \leq M, \qquad \int_{Q_T} (u^m_t)^2 \, dx\, dy\, dt \leq M, \tag{36}$$

а оскільки $|c^m| \leq M_2$ для всіх $m \in \mathbb{N}$, то стала M не залежить від m і оцінки (36) виконуються для всіх $m \in \mathbb{N}$. Тому з (36) випливають такі збіжності при $m \to \infty$:

$$\begin{gathered} u^m_{y_i} \to u_{y_i} \text{ слабко в } L^2(Q_T),\ i = 1, \ldots, l, \\ u^m_t \to u_t \text{ слабко в } L^2(Q_T). \end{gathered} \tag{37}$$

Врахувавши (35), (37), з (16) та (15) отримаємо, що пара $(u(x,y,t), c(t))$ задовольняє рівність (6) та

$$\int_{Q_\tau} \Big(u_t v + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} v_{x_j} + (c(t) + b(x,y)) uv +$$

$$+ g(x,y,t,u) v \Big) \, dx\, dy\, dt = \int_{Q_\tau} f(x,y,t) v \, dx\, dy\, dt, \quad \tau \in (0;T], \tag{38}$$

для всіх $v \in V_1(Q_T)$. Із (38) випливає, що

$$\int_{\Omega} \Big(u_t w + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} w + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} w_{x_j} + (c(t) + b(x,y)) uw +$$

$$+g(x,y,t,u)w\Big)\,dx = \int\limits_{\Omega} f(x,y,t)w\,dx \tag{39}$$

для майже всіх $(y,t) \in D \times (0;T)$ та для всіх $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$. З (39) отримуємо, що u для майже всіх $(y,t) \in D \times (0;T)$ є узагальненим розв'язком задачі Діріхле для еліптичного рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} = F(x,y,t), \qquad x \in \Omega, \tag{40}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{41}$$

де $F(x,y,t) = f(x,y,t) - u_t - \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - (c(t)+b(x,y))u - g(x,y,t,u)$. Оскільки виконується умова (3) та $F(\cdot,y,t) \in L^2(\Omega)$ для майже всіх $(y,t) \in D \times (0;T)$, то, згідно з теоремою 7.3 [6, с. 130], існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (40)–(41), причому $u_{x_ix_j}(\cdot,y,t) \in L^2(\Omega)$, тому $u(\cdot,y,t) \in W_0^{2,2}(\Omega)$ для майже всіх $(y,t) \in D \times (0;T)$. Отже, $u \in V_4(Q_T) \cap C([0,T];L^2(G))$, пара $(u(x,y,t),c(t))$ задовольняє рівняння (1) для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$, тому на підставі леми 1 $(u(x,y,t),c(t))$ є розв'язком задачі (1)–(4) в області Q_T. Теорему доведено. □

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді задача* (1)—(4) *не може мати більше одного розв'язку.*

Доведення. Припустимо, що $\big(u^{(1)}(x,y,t),c^{(1)}(t)\big)$, $\big(u^{(2)}(x,y,t),c^{(2)}(t)\big)$ – два розв'язки задачі (1)–(4). Тоді пара функцій $(\tilde u(x,y,t),\tilde c(t))$, де

$$\tilde u(x,y,t) = u^{(1)}(x,y,t) - u^{(2)}(x,y,t), \qquad \tilde c(t) = c^{(1)}(t) - c^{(2)}(t),$$

задовольняє умову $\tilde u(x,y,0) \equiv 0$, рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(\tilde u_t v + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\tilde u_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\tilde u_{x_i} v_{x_j} + b(x,y)\tilde u v + (c^{(1)}(t)u^{(1)} -$$

$$-c^{(2)}(t)u^{(2)})v + (g(x,y,t,u^{(1)}) - g(x,y,t,u^{(2)}))v\Big)\,dx\,dy\,dt = 0,\ \tau \in [0,T], \tag{42}$$

для всіх $v \in V_1(Q_T)$ та

$$\tilde c(t) = \frac{1}{E(t)} \int\limits_{G_t} \Big(B(x,y,t)\tilde u + K(x,y)(g(x,y,t,u^{(1)}) - g(x,y,t,u^{(1)}))\Big),\ t \in [0,T]. \tag{43}$$

Вибравши в (42) $v = \tilde u$, матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(\tilde u_t \tilde u + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\tilde u_{y_i}\tilde u + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\tilde u_{x_i}\tilde u_{x_j} + (c^{(1)}(t)u^{(1)} - c^{(2)}(t)u^{(2)})\tilde u +$$

$$+b(x,y)(\tilde u)^2 + (g(x,y,t,u^{(1)}) - g(x,y,t,u^{(2)}))\tilde u\Big)\,dx\,dy\,dt = 0,\ \tau \in (0;T].$$

Звідси, аналогічними перетвореннями, як з (25) було отримано (30), знаходимо оцінку

$$\int\limits_{Q_T} (\tilde{u})^2\,dx\,dy\,dt \le M_4 \int\limits_0^T (\tilde{c}(t))^2\,dt. \tag{44}$$

З (43) легко отримати нерівність

$$\int\limits_0^T (\tilde{c}(t))^2\,dt \le M_3 \int\limits_{Q_T} (\tilde{u})^2\,dx\,dy\,dt,$$

а врахувавши оцінку (44), знайдемо

$$(1 - M_5) \int\limits_0^T (\tilde{c}(t))^2\,dt \le 0.$$

Оскільки $M_5 < 1$, то $\tilde{c}(t) \equiv 0$, а тому $c^{(1)}(t) \equiv c^{(2)}(t)$. Тоді з (44) випливає: $\int\limits_{Q_T} (\tilde{u})^2\,dx\,dy\,dt \le 0$, а тому $u^{(1)} = u^{(2)}$ в Q_T. Теорему доведено. □

Список використаної літератури

1. В. Л. Камынин, *Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения*, Матем. заметки **94** (2013), no. 2, 207–217.
2. А. И. Кожанов, *Задача об определении коэффициентов при младших членах в слабо связанной параболической системе*, Мат. заметки ЯГУ **7** (2000), no. 2, 49–61.
3. Ю. А. Кошелева, *Ультрапараболические уравнения с неизвестной правой частью*, Мат. заметки ЯГУ **19** (2012), no. 2, 73–93.
4. С. П. Лавренюк, Н. П. Процах, *Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією*, Укр. мат. журн. **58** (2006), no. 9, 1192–1210.
5. С. П. Лавренюк, Н. П. Процах, *Мішана задача для ультрапараболічного рівняння в необмеженій області*, Укр. мат. журн. **54** (2002), no. 8, 1053–1066.
6. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, Москва, 1973.
7. А. И. Прилепко, А. Б. Костин, *Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении*, Сиб. мат. журн. **34** (1993), no. 5, 147–162.
8. Н. П. Процах, *Обернена задача для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння з трьома невідомими функціями різних аргументів у правій частині*, Нелінійні коливання **18** (2015), no. 2, 95–114.
9. Н. П. Процах, *Обернена задача для ультрапараболічного рівняння з невідомою функцією просторової змінної в правій частині*, Мат. методи та фіз.-мех. поля **56** (2013), no. 2, 20–36.
10. Н. П. Процах, Б. И. Пташник, *Смешанная задача для нелинейного ультрапараболического уравнения с интегральным слагаемым*, Математический журнал **12** (2012), no. 4, 95–114.

11. Р. Р. Сафиуллова, *Обратная задача для гиперболического уравнения второго порядка с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени*, Вестник ЮУрГУ, Сер. Мат. моделир. и програм. **6** (2013), no. 4, 73–86.
12. S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, and A. N. Kochubei, *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*, Birkhäuser–Springer, Basel, 2004.
13. M. Ivanchov, *Inverse problems for equations of parabolic type*, Math. Studies, Monograph Ser., VNTL Publ., Lviv, 2003.
14. A. N. Kolmogorov, *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)*, Ann. Math. **35** (1934), no. 1, 116–117.
15. E. Lanconelli, A. Pascucci, and S. Polidoro, *Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance*, Nonlinear problems in mathematical physics and related topics II. In honour of Prof. O. A. Ladyzhenskaya. Kluwer Acad. Publ., New York, Int. Math. Ser., **2**, 2002, pp. 243–265.
16. S. Lavrenyuk and N. Protsakh, *Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain*, Tatra Mt. Math. Publ. **38** (2007), no. 4 131–146.
17. D. Lesnic and M. Ivanchov, *Determination of the time-dependent perfusion coefficient in the bio-heat equation*, Appl. Math. Lett. **39** (2015), 96–100.
18. H. P. Lopushanska, *Determination of a minor coefficient in a time fractional diffusion equation*, Mat. Stud. **45** (2016), no. 1, 57–66.
19. E. Ozbilge and A. Demir, *Identification of the unknown diffusion coefficient in a linear parabolic equation via semigroup approach*, Adv. Difference Equ. **2014** (2014), no. 47, 1–8.
20. N. Protsakh, *Inverse problem for semilinear ultraparabolic equation of higher order*, Math. Bohem. **140** (2015), no. 4, 335–404.
21. P. N. Vabishchevich and V. I. Vasil'ev, *Numerical solving the identification problem for the lower coefficient of parabolic equation*, arXiv: 1304.5923v1.
22. X. Wu and G. Wei, *Uniqueness for coefficient identification in one-dimensional parabolic equations*, Electron. J. Differ. Equ. **2017** (2017), no. 7, 1–7.
23. L. Yang, J.-N. Yu, and Z.-C. Deng, *An inverse problem of identifying the coefficient of parabolic equation*, Appl. Math. Modelling **32** (2008), no. 10, 1984–1995.

Стаття: надійшла до редколегії 06.04.2017
доопрацьована 15.05.2017
прийнята до друку 13.11.2017

INVERSE PROBLEM OF DETERMINING OF MINOR COEFFICIENT FOR SEMILINEAR ULTRAPARABOLIC EQUATION

Nataliya PROTSAKH

National Forestry Engineering University of Ukraine
103, Generala Chuprynky Str., 79057, Lviv, Ukraine
e-mail: protsakh@ukr.net

We consider the inverse problem of determining of the time depended coefficient near the unknown function that is a solution for the initial-boundary value problem for semilinear ultraparabolic equation. Conditions of the existence and the uniqueness of solution from Sobolev spaces for the problem are obtained.

Key words: ultraparabolic equation, inverse problem, integral overdetermination condition, solution almost everywhere.