ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 72–81
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 72–81

УДК 517.53

ПРО КЛАСИ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ КРАТНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Тетяна САЛО[1], Олег СКАСКІВ[2], Ольга ТАРНОВЕЦЬКА[3]

[1]*Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С.Бандери, 12, 79013, Львів
e-mail: tetyan.salo@gmail.com
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка*
вул. Університетська, 1, 79001, Львів
e-mail: olskask@gmail.com
[3] *Чернівецький факультет НТУ "Харківський політехнічний інститут"*
вул. Головна, 203-а, 58018, Чернівці
e-mail: savinskaolga@gmail.com

Досліджуємо класи збіжності кратних рядів Діріхле.

Ключові слова: цілі функції, кратні ряди Діріхле, максимальний член, клас збіжності.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{R}^p$ і $\mathbb{C}^p$ – дійсний і комплексний векторні простори, відповідно; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $p \in \mathbb{N}$. Для $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, $b = (b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^p$ писатимемо $a < b$, відповідно $a \leqslant b$, якщо $(\forall j, 1 \leqslant j \leqslant p)\colon a_j < b_j$, відповідно $(\forall j, 1 \leqslant j \leqslant p)\colon a_j \leqslant b_j$. Для $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p$, $w = (w_1, \ldots, w_p) \in \mathbb{C}^p$ позначимо $\langle z, w\rangle = z_1 w_1 + \ldots + z_p w_p$, $\|z\| = z_1 + \ldots + z_p$, $\mathrm{Re}\, z = (\mathrm{Re}\, z_1, \ldots, \mathrm{Re}\, z_p)$, а для $R = (r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{R}^p$ позначимо $\Pi_R = \{z \in \mathbb{C}^p \colon \mathrm{Re}\, z < R\}$.

i) Область $G \subset \mathbb{C}^p$ слідом за [1, с.294] називатимемо *полілінійною областю*, якщо $z = (z_1, \ldots, z_p) \in G \iff z + iy = (z_1 + iy_1, \ldots, z_p + iy_p) \in G$ для кожного $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$.
ii) Полілінійна область G належить до класу σ (див. [1, с.299]), якщо існують $R_*, R^* \in \mathbb{R}^p$ такі, що $R_* < R^*$ і $\Pi_{R_*} \subset G \subset \Pi_{R^*}$.
iii) Нарешті, для $A = (A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^p$, $A_j > 0$ $(1 \leq j \leq p)$, A-подібною системою областей ([1, с.301]) називаємо систему областей $\{G_+(r, A)\}_{r \geqslant 0}$, де $G_+(r, A) = G + rA$ (тобто, паралельне перенесення G на вектор rA), а G – полілінійна область.

Умова "$(\forall j)\colon\ A_j > 0$" у наведеному щойно означенні з [1] забезпечує рівність $\mathbb{C}^p = \bigcup_{r \geq 0} G_+(r, A)$, тобто, що система областей $\{G_+(r, A)\}$ є вичерпанням простору $\mathbb{C}^p$ таким, що $G_+(r^{(1)}, A) \subset G_+(r^{(2)}, A)$ для всіх $r^{(1)} < r^{(2)}$.

2010 Mathematics Subject Classification: 30D10, 32A15, 11F68

Через Σ_+^p позначатимемо клас вичерпань $\mathbb{G}_+ = \{G_+(r,A)\}$ простору $\mathbb{C}^p$, які мають властивості i)-iii). Прикладами вичерпань з класу Σ_+^p є такі системи областей

$$\mathbb{G}_1 = \{G(r,A)\}, \quad G(r,A) = \{z \in \mathbb{C}^p\colon \ \mathrm{Re}\ z < rA\},$$

$$\mathbb{G}_2 = \{G(r,A)\}, \quad G(r,A) = \{z \in \mathbb{C}^p\colon \ (\mathrm{Re}\ z - rA) < B\}, \ B \in \mathbb{R}^p,$$

$$\mathbb{G}_3 = \{G(r,A)\}, \quad G(r,A) = \{z \in \mathbb{C}^p\colon \ \|\mathrm{Re}\ z\| < r\|A\|\}, \quad A = (A_1, \ldots, A_p) \in \mathbb{R}_+^p.$$

Нехай H^p клас цілих в $\mathbb{C}^p$, обмежених у довільній полінійній області

$$\Pi_R = \{z \in \mathbb{C}^p : \ \mathrm{Re}\ z_1 < R_1, \ldots, \mathrm{Re}\ z_p < R_p\},$$

$R = (R_1, \ldots, R_p) \in \mathbb{R}_+^p$, функцій. Для функції $F \in H^p$ і $x \in \mathbb{R}^p$ очевидно, що

$$M(x,F) \equiv \sup\{|F(x+iy)| : \ y \in \mathbb{R}^p\} < +\infty.$$

Для функції $F \in H^p$ і $r > 0$ позначимо

$$S_F(r,A) = \sup\{|F(z)| : \ z \in G(r,A)\}.$$

Нехай $\Lambda^p = (\lambda_n)$, $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \ldots, \lambda_{n_p}^{(p)})$, $n = (n_1, \ldots, n_p)$ і $0 = \lambda_0^{(j)} < \lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant k \uparrow +\infty)$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Через $H^p(\Lambda^p)$ позначимо клас цілих (абсолютно збіжних скрізь в $\mathbb{C}^p$) рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{\langle z, \lambda_n \rangle}, \quad z \in \mathbb{C}^p$$

таких, що $(\forall j)\colon \ \#\{n_j \colon a_{(n_1,\ldots,n_j,\ldots,n_p)} \neq 0\} = +\infty$.

Очевидно, що $H^p(\Lambda^p) \subset H^p$.

Для $x \in \mathbb{R}_+^p$ нехай $\mu(x,F) = \max\{|a_n|e^{\langle x, \lambda_n \rangle} \colon n \in \mathbb{Z}_+^p\}$ – максимальний член ряду Діріхле $F \in H^p(\Lambda^p)$.

Нехай $G_1(r,A)$ – образ $G(r,A)$ в $\mathbb{R}^p$ при відображенні $w = \mathrm{Re}\ z \colon \mathbb{C}^p \to \mathbb{R}^p$,

$$\mu_F(r,A) \stackrel{def}{=} \max\{d_m(G)|a_m|\exp\bigl(r\langle A, \lambda_m \rangle\bigr) \colon m \in \mathbb{Z}_+^p\},$$

$$d_m(G) \stackrel{def}{=} \exp\Bigl(\sup\Bigl\{\langle \sigma, \lambda_m \rangle : \ \sigma \in G_1(0,A)\Bigr\}\Bigr).$$

Сліюом за [2] (див. також [5]) скажемо, що цілий ряд Діріхле $F \in H^1(\Lambda^1)$ *належить до класу збіжності*, якщо виконується умова

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln M(r,F)dr < +\infty, \tag{1}$$

де $0 < \rho < +\infty$. За нерівністю Коші $\mu(r,F) \leq M(r,F)$ $(r \geqslant 0)$ з умови (1) випливає, що

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln \mu(r,F)dr < +\infty. \tag{2}$$

У [4] зазначено таке: якщо для цілого ряду Діріхле $F \in H^1(\Lambda^1)$

$$\ln n = O(\lambda_n) \quad (n \to +\infty), \tag{3}$$

то з умови (2) випливає, що виконується умова (1). У працях [3, 4] знаходимо таку теорему.

Теорема А (О. М. Мулява [3, 4])**.** *Нехай показники* Λ^1 *задовольняють умову* (3), *а* $\rho \in (0, +\infty)$. *Тоді для того, щоб виконувалась умова* (1), *необхідно, а у випадку, коли послідовність* $(\varkappa_n(F))$ *неспадна,* $\varkappa_n(F) \overset{def}{=} \frac{\ln|a_{n-1}| - \ln|a_n|}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$, *і достатньо, щоб*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) |a_k|^{\rho/\lambda_k} < +\infty. \tag{4}$$

На Львівському регіональному семінарі з математичного аналізу (1999) проф. М. М. Шеремета сформулював таку проблему: *знайти необхідну і достатню умову на показники* Λ^1, *за якої умови* (1) *і* (2) *були би еквівалентними для кожного ряду Діріхле* $F \in H^1(\Lambda^1)$. У [5] доведено таку теорему, яка дає повний розв'язок сформульованої проблеми.

Теорема Б (П. В. Філевич, С. І. Фединяк [5])**.** *Нехай* $\rho \in (0; +\infty)$. *Для того, щоб для кожного ряду Діріхле* $F \in H^1(\Lambda^1)$ *з умови* (2) *випливала умова* (1) *необхідно і достатньо, щоб для послідовності* Λ^1 *виконувалась умова* (3).

2. Основні результати. У випадку цілих кратних рядів Діріхле з класу $H^p(\Lambda^p)$, $p \geqslant 2$, природно розглянути такі класи збіжності:

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln S_F(r, A) dr < +\infty, \quad \rho \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

$$\int_{\mathbb{R}^p_+} e^{-\langle x, \rho \rangle} \ln M(x, F) dx < +\infty, \quad \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_p) \in \mathbb{R}^p_+, \tag{6}$$

та

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln \mu_F(r, A) dr < +\infty, \tag{7}$$

$$\int_{\mathbb{R}^p_+} e^{-\langle x, \rho \rangle} \ln \mu(x, F) dx < +\infty, \quad \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_p) \in \mathbb{R}^p_+. \tag{8}$$

Нескладно доводиться таке твердження (див. також [6]).

Твердження 1. *Нехай* $F \in H^p(\Lambda^p)$. *Якщо для послідовності* Λ^p *виконується умова*

$$(\forall j,\ 1 \leqslant j \leqslant p): \quad \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k^{(j)}} \overset{def}{=} \tau_j < +\infty, \tag{9}$$

то існує стала $C = C(\varepsilon, \Lambda^p) > 0$ *така, що для кожного* $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$ *і для всіх* $x \in \mathbb{R}^p$ *виконується нерівність*

$$M(x, F) \leqslant C \mu(x + \tau + \varepsilon, F), \quad \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_p) \in \mathbb{R}^p. \tag{10}$$

Справді,

$$M(x, F) \leqslant \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} e^{-(\tau+\varepsilon, \lambda_n)} |a_n| e^{(x+\tau+\varepsilon, \lambda_n)} \leqslant C\mu(x + \tau + \varepsilon, F), \quad C = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} e^{-(\tau+\varepsilon, \lambda_n)}.$$

Але з умови (9) для кожного j випливає, що $\lambda_k^{(j)} > \ln k/(\tau_j + \varepsilon_j/2)$ $(k \geqslant k_0)$, де $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \ldots, \varepsilon_p)$. Звідки

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(\tau_j+\varepsilon_j)\lambda_k^{(j)}} \leqslant \sum_{k=k_0}^{+\infty} e^{-\frac{\tau_j+\varepsilon_j}{\tau_j+\varepsilon_j/2}\ln k} + \sum_{k=0}^{k_0-1} e^{-(\tau_j+\varepsilon_j)\lambda_k^{(j)}} \stackrel{def}{=} C_j < +\infty.$$

Тому $C \leqslant C_1 + \ldots + C_p < +\infty$.

З твердження 1 і нерівності Коші $\mu(x, F) \leqslant M(x, F)$ $(x \in \mathbb{R})$ негайно отримуємо таке твердження.

Твердження 2. *Якщо для послідовності показників Λ^p виконується умова* (9)*, то для кожного ряду Діріхле $F \in H^p(\Lambda^p)$ умова* (6) *виконується тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (8)*.*

Нескладно доводиться також таке твердження, з якого випливає аналог теореми Б.

Твердження 3. *Для будь-якої послідовності показників Λ^p такої, що умова* (9) *не виконується, і для кожного $\rho \in \mathbb{R}_+^p$ існує ряд Діріхле $F \in H^p(\Lambda^p)$, для якого умова* (8) *виконується з ρ, а умова* (6) *не виконується з ρ.*

Доведення. Не зменшуючи загальності міркувань припустимо, що умова (9) не виконується при $j = 1$. За теоремою Б існує цілий ряд Діріхле $f_1 \in H^1(\Lambda^1)$, $\Lambda^1 = (\lambda_k^{(1)})$ такий, що

$$f_1(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{(1)} e^{r\lambda_k^{(1)}}, \quad a_k^{(1)} \geqslant 0 \geqslant (k \geqslant 0), \tag{11}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln M(r, f_1) dr = +\infty, \quad \int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln \mu(r, f_1) dr < +\infty.$$

Виберемо тепер цілі ряди Діріхле $f_j \in H^1(\Lambda^j)$, $\Lambda^j = (\lambda_k^{(j)})$, $2 \leqslant j \leqslant p$ такі, що $\ln\ln \mu(r, f_j) \leqslant r\rho_j/2$, $\ln M(r, f_j) \geqslant 1$, $(r > 0)$ і розглянемо $F(x) = \prod_{j=1}^{p} f_j(x_j)$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$. Тоді, оскільки $M(x, F) = \prod_{j=1}^{p} M(x_j, f_j)$ $(x \geqslant (1, \ldots, 1))$, а $\mu(x, F) = \prod_{j=1}^{p} \mu(x_j, f_j)$, то для $x' = (x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}_+^{p-1}$, $\rho' = (\rho_2, \ldots, \rho_p) \in \mathbb{R}_+^{p-1}$ маємо

$$\int_{\mathbb{R}_+^p} e^{-\langle x,\rho\rangle} \ln M(x, F) dx \geqslant \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+^{p-1}} e^{-\langle x,\rho\rangle} \Big(\ln M(x_1, f_1) + \ln \prod_{j=2}^{p} M(x_j, f_j)\Big) dx \geqslant$$
$$\geqslant \int_{\mathbb{R}_+^{p-1}} e^{-\langle x',\rho'\rangle} \Big(\int_0^{+\infty} e^{-x_1\rho_1} \ln M(x_1, f_1) dx_1\Big) dx' = +\infty,$$

$$\int_{\mathbb{R}^p_+} e^{-\langle x,\rho\rangle}\ln\mu(x,F)dx \leqslant \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{p-1}_+} e^{-\langle x,\rho\rangle}\Big(\ln\mu(x_1,f_1)+\ln\prod_{j=2}^p\mu(x_j,f_j)\Big)dx =$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-x_1\rho_1}\ln\mu(x_1,f_1)dx_1\int_{\mathbb{R}^{p-1}_+} e^{-\langle x',\rho'\rangle}dx' +$$
$$+ \int_0^{+\infty} e^{-x_1\rho_1}dx_1\int_{\mathbb{R}^{p-1}_+}\Big(e^{-\langle x',\rho'\rangle}\ln\prod_{j=2}^p\mu(x_j,f_j)\Big)dx' \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\rho_2\cdots\rho_p}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-x_1\rho_1}\ln\mu(x_1,f_1)dx_1 + \frac{1}{\rho_1}\cdot\int_{\mathbb{R}^{p-1}_+} e^{-\langle x',\rho'\rangle}\sum_{j=2}^p e^{x_j\rho_j/2}dx' < +\infty.$$

Переконаємось, що вибір таких функцій f_j $(2\leqslant j\leqslant p)$ можливий. Справді, нехай $f_j(x_j) = e + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(j)} e^{x_j\lambda_k^{(j)}}$ $(2\leqslant j\leqslant p)$, тобто, $a_0^{(j)} = e$, а $\ln a_k^{(j)} = \min\{-k\lambda_k^{(j)}, b_k^{(j)}\}$, $b_k^{(j)} = \min\{\exp(t\rho_j/2) - t\lambda_k^{(j)}\colon\ t\geqslant 0\}$ $(k\geqslant 1)$. Тоді за нерівністю Коші $\ln M(x_j,f_j) = \ln f_j(x_j) \geqslant \ln a_0^{(j)} = 1$ $(x_j\geqslant 0)$, а

$$\ln\mu(t,f_j) = \ln\max\{\ln a_k^{(j)} + t\lambda_k^{(j)}\colon\ k\geqslant 1\} \leqslant \ln\max\{b_k^{(j)} + t\lambda_k^{(j)}\colon\ k\geqslant 1\} \leqslant e^{t\rho_j/2}.$$

□

Подібно до твердження 1 доводиться таке твердження.

Лема 1. *Нехай $F\in H^p(\Lambda^p)$. Якщо для послідовності Λ^p виконується умова*

$$\varlimsup_{\|n\|\to+\infty}\frac{\ln\|n\|}{\langle A,\lambda_n\rangle} \stackrel{def}{=} \tau < +\infty, \tag{12}$$

то існує стала $C = C(\varepsilon,\Lambda^p) > 0$ така, що для кожного $\varepsilon\in(0,+\infty)$ і для всіх $x\in\mathbb{R}^p$ виконується нерівність

$$M(x,F) \leqslant C\mu(x + A((p+1)\tau+\varepsilon), F). \tag{13}$$

Доведення. Справді,

$$M(x,F) \leqslant \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} e^{-((p+1)\tau+\varepsilon)\langle A,\lambda_n\rangle}|a_n|e^{\langle x+((p+1)\tau+\varepsilon)A,\lambda_n\rangle} \leqslant C\mu(x+((p+1)\tau+\varepsilon)A, F),$$

$C = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} e^{-((p+1)\tau+\varepsilon)\langle A,\lambda_n\rangle}$. З умови (12) випливає, що $\langle A,\lambda_n\rangle > \ln\|n\|/(\tau+\varepsilon/(2p)$ $(\|n\|\geqslant k_0)$. Звідки,

$$C = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} e^{-((p+1)\tau+\varepsilon)\langle A,\lambda_n\rangle} \leqslant \sum_{k=k_0}^{+\infty}(k+1)^p e^{-\frac{\tau(p+1)+\varepsilon}{\tau+\varepsilon/(3p)}\ln k} + \sum_{\|n\|=0}^{k_0-1} e^{-(\tau(p+1)+\varepsilon)\langle A,\lambda_n\rangle} \leqslant$$
$$\leqslant 2^p\sum_{k=k_0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\tau(p+1)+\varepsilon}{\tau+\varepsilon/(3p)}-p\right)\ln k} + \sum_{\|n\|=0}^{k_0-1} e^{-(\tau(p+1)+\varepsilon)\lambda_n} \stackrel{def}{=} C^*.$$

Але,

$$\frac{\tau(p+1)+\varepsilon}{\tau+\varepsilon/(3p)} - p \geqslant \frac{\tau+2\varepsilon/3}{\tau+\varepsilon/3} > 1.$$

Тому $C\leqslant C^* < +\infty$. □

Лема 2 (нерівність Коші). *Нехай $F \in H^p(\Lambda^p)$. Тоді для кожного $r > 0$ і для всіх $m \in \mathbb{Z}_+^p$*

$$\mu_F(r, A) \overset{def}{=} \max\{d_m(G)|a_m|\exp\big(r\langle A, \lambda_m\rangle\big) : m \geqslant 0\} \leq$$
$$\leq \sup\Big\{\mu(\sigma, F) : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} \leq S_F(r, A).$$

Доведення. Зауважимо, що ([1, c.353])

$$\sup\Big\{\exp(\langle\sigma, \lambda_m\rangle) : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} = d_m(G)\exp\{r\langle A, \lambda_m\rangle\}. \tag{14}$$

Тому за нерівністю Коші $\mu(x, F) \leq M(x, F)$ $(x \in \mathbb{R}^p)$ для фіксованого $m \in \mathbb{Z}_+^p$ матимемо

$$d_m(G)|a_m|\exp\{r\langle A, \lambda_m\rangle\} \leq \sup\Big\{\mu(\sigma, F) : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} \leq$$
$$\leq \sup\Big\{M(\sigma, F) : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} =$$
$$= \sup\bigg\{\sup\Big\{|F(\sigma + iy) : \ y \in \mathbb{R}^p\Big\} : \ \sigma \in G_1(r, A)\bigg\} =$$
$$= \sup\Big\{|F(z)| : \ z \in G(r, A)\Big\} = S_F(r, A).$$

□

Лема 3. *Нехай $F \in H^p(\Lambda^p)$. Якщо виконується умова* (12)*, то для кожного $r > 0$ і довільного $\varepsilon > 0$*

$$S_F(r, A) = \sup\Big\{|F(z)| : \ z \in G(r, A)\Big\} = \sup\Big\{M(\sigma, F) : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\}, \tag{15}$$
$$S_F(r, A) \leqslant C\mu_F(r + (p+1)\tau + \varepsilon, A),$$

де стала $C > 0$ з леми 1

Доведення. Рівність (15) встановлено у доведенні леми 2. Для кожного $r > 0$, спочатку послідовно скористаємось нерівністю (13)

$$S_F(r, A) = \sup\Big\{|F(z)| : \ z \in G(r, A)\Big\} = \sup\Big\{M(\sigma, F) : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant C\sup\Big\{\mu(\sigma + ((p+1)\tau + \varepsilon)A, F) : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} \overset{def}{=} CS_1(r),$$

далі означенням вичерпання полілінійними A-подібними областями

$$S_1(r) = \sup\bigg\{\max\Big\{|a_n|e^{\langle\sigma + ((p+1)\tau + \varepsilon)A, \lambda_n\rangle} : n \geqslant 0\Big\} : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\bigg\} =$$
$$= \sup\bigg\{\sup\Big\{|a_n|e^{\langle\sigma + ((p+1)\tau + \varepsilon)A, \lambda_n\rangle} : \ \sigma \in \partial G_1(r, A)\Big\} : \ n \geqslant 0\bigg\} =$$
$$= \sup\bigg\{|a_n|e^{(r + (p+1)\tau + \varepsilon)\langle A, \lambda_n\rangle}\sup\Big\{e^{\langle\sigma, \lambda_n\rangle} : \ \sigma \in \partial G_1(0, A)\Big\} : \ n \geqslant 0\bigg\} \overset{\text{def}}{=} S_2(r),$$

а потім рівністю (14)

$$S_2(r) = \max\{d_n(G)|a_n|e^{(r + (p+1)\tau + \varepsilon)\langle A, \lambda_n\rangle} : \ n \geqslant 0\} = \mu_F(r + (p+1)\tau + \varepsilon, A).$$

Тепер остаточно отримуємо

$$S_F(r, A) \leqslant CS_1(r) = CS_2(r) = C\mu_F(r + (p+1)\tau + \varepsilon, A).$$

□

За допомогою лем 2 і 3 нескладно тепер отримати таке твердження.

Теорема 1. *Якщо для послідовності показників* Λ^p *виконується умова* (12), *то для кожного ряду Діріхле* $F \in H^p(\Lambda^p)$ *умова* (5) *виконується тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (7).

Зауваження 1. Умова (12) виконується тоді і лише тоді, коли виконується умова (9).

Доведемо такий аналог цитованої теореми Б.

Теорема 2. *Для будь-якої послідовності показників* Λ^p *такої, що умова* (12) *не виконується, і для кожного* $\rho > 0$ *існує ряд Діріхле* $F \in H^p(\Lambda^p)$, *для якого умова* (7) *виконується з* ρ, *а умова* (5) *не виконується з* ρ *для* $S_F(r, A)$ *і* $\mu_F(r, A)$ *означених за вичерпанням* $\mathbb{G}_1 = \{G_1(r, A)\}, \quad G_1(r, A) = \{z \in \mathbb{C}^p\colon\ Re\ z < rA\}$.

Доведення. З невеликими змінами повторюємо доведення твердження 3. У відповідності зі зауваженням 1, припущення, що умова (9) не виконується при $j = 1$, не зменшує загальності міркувань. Тоді нехай $f_j \in H^1(\Lambda^j)$ цілі ряди Діріхле з доведення твердження 3 такі, що $\rho_j < 2\rho$ $(2 \leqslant j \leqslant p)$. Виберемо тепер $F(z_1, z_2, \dots, z_p) = \prod_{j=1} p f_j(z_j/A_j)$, $A = (A_j, \dots, A_p)$.

Тоді

$$\ln S_F(r, A) = \sum_{j=1}^{p} \ln\sup\{|f_j(z_j/A_j)|\colon\ \mathrm{Re}\ z_j < rA_j\} = \ln M(r, f_1) + \sum_{j=2}^{p} \ln M(r, f_j) \geqslant$$

$$\geqslant \ln M(r, f_1) + p - 1,$$

$$\ln \mu_F(r, A) = \sum_{j=1}^{+\infty} \ln\sup\{\max\{a_k^{(j)} e^{\mathrm{Re}\ z_j\lambda_k^{(j)}}\colon\ k \geqslant 0\}\colon\ \mathrm{Re}\ z \in \partial G_1(r, A)\}.$$

Звідси остаточно отримуємо

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln S_F(r, A) \geqslant \int_0^{+\infty} e^{-r\rho}\Big(\ln M(r, f_1) + p - 1\Big)dr = +\infty,$$

$$\ln \mu_F(r, A)dr = \sum_{j=1}^{p} \ln\sup\{\max\{a_k^{(j)} e^{\mathrm{Re}\ z_j\lambda_k^{(j)}/A_j}\colon\ k \geqslant 0\}\colon\ \mathrm{Re}\ z \in \partial G_1(r, A)\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{p} \ln \mu(r, f_j) \leqslant \ln \mu(r, f_1) + \sum_{j=2}^{p} e^{r\rho_j/2} \quad (r > 0) \Longrightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln \mu_F(r, A)dr \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-r\rho}\Big(\ln \mu(r, f_1) + \sum_{j=2}^{p} e^{r\rho_j/2}\Big)dr < +\infty.$$

□

2.1. Умови належності до класів збіжності, які визначаються умовами (5) *та* (7). Зауважимо спочатку, що у випадку, коли $A \in \mathbb{R}_+^p$ послідовність невід'ємних чисел $\{\langle A, \lambda_n\rangle\}$ допускає впорядкування за неспаданням, тобто її можна подати у вигляді $\{\langle A, \lambda_n\rangle\colon n \in \mathbb{Z}_+^p\} = \{\alpha_k\colon k \in \mathbb{Z}_+\}$, при цьому для кожного $n_0 \in \mathbb{Z}_+^p$ існує

$k = k(n_0) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $\alpha_k = \langle A, \lambda_{n_0}\rangle$, а також для кожного $k \geqslant 0$: $\alpha_{k+1} \geqslant \alpha_k$; якщо ж $\#\{n\colon \langle A, \lambda_n\rangle = \langle A, \lambda_{n_0}\rangle\} = p$, то вважаємо, що

$$\alpha_{k-1} < \alpha_k = \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_{k+p-1} < \alpha_{k+p}.$$

Нехай для кожного $k \geqslant 0$

$$b_k = d_n(G)|a_n|e^{r\langle A,\lambda_n\rangle - r\alpha_k} = d_n(G)|a_n|,$$

де $k = k(n)$ таке як і вище.

Тепер ми можемо сформулювати таку теорему.

Теорема 3. *Нехай $F \in H^p(\Lambda^p)$, а вектор $A \in \mathbb{R}^p_+$ такий, що послідовність невід'ємних чисел $\{\langle A, \lambda_n\rangle\}$ допускає впорядкування $\{\alpha_k\}$ за зростанням. Для того, щоб виконувалась умова* (7)*, необхідно, а у випадку, коли*

$$\varkappa_k \stackrel{def}{=} (\ln b_{k-1} - \ln b_k)/(\alpha_k - \alpha_{k-1}) \nearrow +\infty, \qquad (1 \leqslant k \uparrow +\infty)$$

і достатньо, щоб

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) b_k^{\rho/\alpha_k} < +\infty.$$

Для доведення теореми 3 достатньо з певними видозмінами повторити доведення теореми 2 з [4].

2.2. Умови належності до класів збіжності, які визначаються умовами (6) *і* (8). Розглянемо тут умови належності рядів Діріхле з класу $H^1(\Lambda^1)$ до класу збіжності інтеграла (8), тобто

$$\int_0^{+\infty} e^{-r\rho} \ln \mu(r, F)dr < +\infty, \quad \rho \in (0, +\infty). \tag{16}$$

Спочатку для $F \in H^1(\Lambda^1)$ і $r > 0$ позначимо $\mu_k^* = -\ln a_k^*$, $\ln b_k^* = \lambda_k$, $t = -1/r$, де a_k^* – коефіцієнти мажоранти Ньютона F_N ряду Діріхле F. За побудовою мажоранти Ньютона

$$1)\ a_k^* \geqslant |a_k|\ (k \geqslant 0);\ 2)\ r_k \stackrel{def}{=} (\ln a_{k-1}^* - \ln a_k^*)/(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \nearrow +\infty (1 \leqslant k \uparrow +\infty);$$
$$3)\ \mu(r, F) = \max\{a_k^* e^{r\lambda_k}\colon k \geqslant 0\} = a_\nu^* e^{r\lambda_\nu}\ (\forall r \in [r_\nu, r_{\nu+1}],\ \forall \nu \geqslant 1).$$

Зауважимо, що для існування формальної мажоранти Ньютона (без гарантії збіжності відповідного формального ряду Діріхле) є умова

$$-\frac{\ln |a_k|}{\lambda_k} \to +\infty \quad (k \to +\infty),$$

яка випливає з того, що відповідний ряд Діріхле є збіжним у всій комплексній площині (а необхідна і достатня умова $(\forall r \in \mathbb{R})\colon\ \mu(r, F) < +\infty$). Тоді

$$\ln \mu(r, F) = \max\{\ln a_k^* + r\lambda_k\colon k \geqslant 0\} = \frac{1}{|t|} \max\{\ln b_k^* + t\mu_k^*\colon k \geqslant 0\} = \frac{1}{|t|} \ln \mu(t, \psi),$$

де $\mu(t,\psi)$ – максимальний член формального ряду Діріхле $\psi(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} b_k^* e^{t\mu_k^*}$. Застосовуючи заміну змінної інтегрування $r=-1/t$, маємо

$$\int_1^{+\infty} e^{-r\rho}\ln\mu(r,F)dr=\int_{-1}^{0} e^{-\rho/|t|}\frac{\ln\mu(t,\psi)}{|t|^3}dt. \tag{17}$$

Далі нам потрібний один варіант теореми 1 з [4], який ми сформулюємо у такому вигляді.

Твердження 4. *Розглянемо формальний ряд Діріхле* $g(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} b_k e^{t\mu_k}$, *де* $\mu_k\leqslant\mu_{k+1}\to+\infty$ $(0\leqslant k\to+\infty)$, $b_k\geqslant 0$ $(k\geqslant 0)$. *Припустимо, що* $\mu(t,g)=\max\{b_k e^{t\mu_k}\colon k\geqslant 0\}<+\infty$ *для всіх* $t<0$ *і існує така послідовність* $\varkappa_k\nearrow 0$ $(k\uparrow+\infty)$, *що* $b_k e^{t\mu_k}=\mu(t,g)$ *для кожного* $t\in[\varkappa_k,\varkappa_{k+1}]$ *і кожного* $k\geqslant 1$.

Тоді для того, щоб

$$\int_{-1}^{0}\frac{\ln\mu(t,g)}{\beta(t)}dt<+\infty,$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\mu_k-\mu_{k-1})B\Big(\frac{1}{\mu_k}\ln\frac{1}{b_k}\Big)<+\infty,\quad B(x)=\int_x^0\frac{t-x}{\beta(t)}dt. \tag{18}$$

Відмінність твердження 4 від теореми 1 з [4] полягає у тому, що ми, з одного боку, замість збіжності ряду Діріхле припускаємо лише скінченність його максимального члена, а з іншого — відразу припускаємо, що хоча ряд і є формальним рядом Діріхле, але має структуру мажоранти Ньютона. Іншого у доведенні теореми 1 з [4] не використовується, тому ми тут не наводимо доведення нашого твердження 4 і відсилаємо читача до [4].

Нехай тепер $\mu_k=\mu_k^*$, $b_k=b_k^*$. Зауважимо, що $\mu_{k+1}>\mu_k$ $(k\geqslant k_0)$. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $k_0=0$. Тоді $\varkappa_k=-1/r_k\nearrow 0$ $(1\leqslant k\uparrow+\infty)$. Але $\mu(t,g)=(\mu(r,F))^{1/r}$, $b_k e^{t\mu_k}=(a_k^* e^{r\lambda_k})^{1/r}$ для $t=-1/r$. Тому $b_k e^{t\mu_k}=\mu(t,g)$ для кожного $t\in[\varkappa_k,\varkappa_{k+1}]$ і кожного $k\geqslant 1$.

Застосуємо твердження 4 до правої частини в (17) з функцією $\beta(t)=|t|^3e^{\rho/|t|}$ і формальним рядом Діріхле $g(t)=\psi(t)$. Нескладними обчисленнями переконуємося, що $B(x)=|x|\rho^{-2}e^{-\rho/|x|}$. Тоді умову (18) перепишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\mu_k^*-\mu_{k-1}^*)\Big|\frac{1}{\mu_k^*}\ln\frac{1}{b_k^*}\Big|\exp\Big\{-\rho\Big|\frac{1}{\mu_k^*}\ln\frac{1}{b_k^*}\Big|^{-1}\Big\}<+\infty. \tag{19}$$

З огляду на введені на початку цього підрозділу позначення, умову (19) запишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\ln a_{k-1}^*-\ln a_k^*)\Big|\frac{\lambda_k}{-\ln a_k^*}\Big|\exp\Big\{-\rho\Big|\frac{-\ln a_k^*}{\lambda_k}\Big|\Big\}<+\infty. \tag{20}$$

Отже, отримуємо таке твердження.

Твердження 5. *Нехай* $F\in H^1(\Lambda^1)$. *Для того, щоб виконувалась умова* (16) *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова* (20), *де* a_k^* *– коефіцієнти мажоранти Ньютона функції* F.

Список використаної літератури

1. Ш. И. Стрелиц, *Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений*, Минтис, Вильнюс, 1972.
2. P. K. Kamthan A theorem on step functions. II, Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, Ser. A **28** (1963), 65–69.
3. О. М. Мулява, *Класи збіжності в теорії рядів Діріхле*, Доп. НАН Укр. (1999), no. 3, 35–39.
4. О. М. Мулява, *Про класи збіжності рядів Діріхле*, Укр. матем. ж. **51** (1999), no. 11, 1485–1494.
5. P. V. Filevych and S. I. Fedynyak, *On belonging of entire Dirichlet series to convergence class*, Mat. Stud. **16** (2001), no 1, 57–60.
6. О. Б. Скасків, О. М. Трусевич, О. Г. Орищин, *Аналоги нерівності Валірона для деяких додатних рядів*, Вісник НУ "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. **540** (2005), 41–44.

ON THE CONVERGENCE CLASSES FOR MULTIPLE DIRICHLET SERIES

Tetyana SALO[1], Oleh SKASKIV[2], Olga TARNOVECKA[3]

[1]*National University "Lvivs'ka Polytehnika"*
Stepan Bandera Str., 12, 79013, Lviv, Ukraine
e-mail: tetyan.salo@gmail.com
[2]*Ivan Franko National University of Lviv*
1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: olskask@gmail.com
[3]*Chernivtsi Dept. Nat. Tech. Univ. "Kharkiv Polytechnic Institute",*
203-a, Holovna Str.,58018, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: savinskaolga@gmail.com

The classes of convergence of multiple Dirichlet series are studied.

Key words: entire functions, multiple Dirichlet series, maximum term, class of convergence.

Стаття: надійшла до редколегії 27.11.2017
доопрацьована 05.12.2017
прийнята до друку 13.12.2017