ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 84. С. 113–118
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 84. P. 113–118

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ДВОМА НЕВІДОМИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Микола ІВАНЧОВ

Львівський національний університет ім. І. Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: mykola.ivanchov@lnu.edu.ua

Розглянуто обернену задачу для рівняння теплопровідності у прямокутнику з двома невідомими старшими коефіцієнтами, залежними від часової та однієї з просторових змінних. Задача зводиться до двох обернених задач для рівняння теплопровідності з одним із невідомих коефіцієнтів. Встановлено умови існування гладкого розв'язку задачі.

Ключові слова: обернена задача, двовимірне рівняння теплопровідності, два невідомих старших коефіцієнти.

1. Вступ. Для двовимірних обернених задач для рівняння теплопровідності з одним чи двома невідомими коефіцієнтами, які залежать від часової та просторової змінних, вже встановлено умови їхньої однозначної розв'язності [1]-[4]. Ми пропонуємо "каскадний" підхід до дослідження оберненої задачі з двома невідомими старшими коефіцієнтами. Він полягає у послідовному розв'язанні спочатку однієї оберненої задачі для рівняння теплопровідності з одним з невідомих коефіцієнтів, а потім іншої задачі для рівняння теплопровідності з іншим невідомим коефіцієнтом. Такий підхід може бути цікавим при чисельному розв'язанні конкретних задач такого типу.

2. Формулювання задачі та основні припущення. В області $Q_T := \{(x,y,t) : 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу для рівняння теплопровідності з невідомими коефіцієнтами $a(y,t), b(x,t)$:

(1) $$u_t = a(y,t)u_{xx} + b(x,t)u_{yy} + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T,$$

(2) $$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D},$$

(3) $$u(0,y,t) = \mu_{11}(y,t), \quad u(h,y,t) = \mu_{12}(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T],$$

(4) $$u(x,0,t) = \mu_{21}(x,t), \quad u(x,l,t) = \mu_{22}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T],$$

(5) $$a(y,t)u_x(0,y,t) = \mu_{31}(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T],$$

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30

$$(6)\qquad b(x,t)u_y(x,0,t) = \mu_{32}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T],$$

де $D := \{(x,y) : 0 < x < h, 0 < y < l\}$. Під розв'язком задачі (1)-(6) будемо розуміти трійку функцій $(a(y,t), b(x,t), u(x,y,t))$ з класу $(C^{\gamma,0}([0,l] \times [0,T]) \times C^{\gamma,0}([0,h] \times [0,T]) \times C^{2+\gamma,2+\gamma,1}(\overline{Q}_T))$ [5, с. 75], яка задовольняє умови (1)-(6) у звичайному розумінні. Крім того, $a(y,t) > 0, (y,t) \in [0,l] \times [0,T], b(x,t) > 0, (x,t) \in [0,h] \times [0,T]$.

Будемо вважати виконаними такі припущення:

(A1) $\varphi \in C^{2+\gamma}(\overline{D})$, $\mu_{1k} \in C^{2+\gamma,1}([0,l]\times[0,T])$, $\mu_{2k} \in C^{2+\gamma,1}([0,h]\times[0,T])$, $k \in \{1,2\}$, $\mu_{31} \in C^{\gamma,0}([0,l] \times [0,T])$, $\mu_{32} \in C^{\gamma,0}([0,] \times [0,T])$, $f \in C^{1+\gamma,1+\gamma,0}(\overline{Q}_T)$;

(A2) $\varphi_x(x,y) > 0$, $\varphi_y(x,y) > 0$, $(x,y) \in \overline{D}$; $\mu_{11_t}(y,t) - \mu_{11_{yy}}(y,t) - f(0,y,t) \le 0$, $\mu_{12_t}(y,t) - \mu_{12_{yy}}(y,t) - f(h,y,t) \ge 0$, $\mu_{31}(y,t) > 0$, $(y,t) \in [0,l] \times [0,T]$; $\mu_{2k_x}(x,t) > 0$, $k \in \{1,2\}$, $\mu_{32}(y,t) > 0$, $(x,t) \in [0,h] \times [0,T]$; $f_x(x,y,t) \ge 0$, $(x,y,t) \in \overline{Q}_T$;

(A3) умови узгодження нульового порядку [5, с. 468].

3. Існування розв'язку задачі (7)-(11). Розіб'ємо задачу (1)-(6) на дві, покладаючи $u(x,y,t) = u_1(x,y,t) + u_2(x,y,t)$, де $(u_1(x,y,t), a(y,t))$ є розв'язком задачі

$$(7)\qquad u_{1_t} = a(y,t)u_{1_{xx}} + u_{1_{yy}} + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T,$$

$$(8)\qquad u_1|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D},$$

$$(9)\qquad u_1|_{x=0} = \mu_{11}(y,t), \quad u_1|_{x=h} = \mu_{12}(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T],$$

$$(10)\qquad u_1|_{y=0} = \mu_{21}(x,t), \quad u_1|_{y=l} = \mu_{22}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T],$$

$$(11)\qquad a(y,t)u_{1_x}(0,y,t) = \mu_{31}(y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T],$$

а $(u_2(x,y,t), b(x,t))$ – розв'язком задачі

$$u_{2_t} = u_{2_{xx}} + b(x,t)u_{2_{yy}} + (a(y,t)-1)u_{2_{xx}}(x,y,t) + (b(x,t)-1)u_{1_{yy}}(x,y,t),$$

$$(12)\qquad (x,y,t) \in Q_T,$$

$$(13)\qquad u_2|_{t=0} = 0, \quad (x,y) \in \overline{D},$$

$$(14)\qquad u_2|_{x=0} = u_2|_{x=h} = 0, \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T],$$

$$(15)\qquad u_2|_{y=0} = u_2|_{y=l} = 0, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T],$$

$$(16)\qquad b(x,t)u_{2_y}(x,0,t) = \mu_{32}(x,t) - b(x,t)u_{1_y}(x,0,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T].$$

Існування та єдиність розв'язку задачі (7)-(11) встановлені у праці [2] і забезпечуються припущеннями **(A1)-(A3)**. Тому перейдемо до дослідження задачі (12)-(16).

Позначимо через $G(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ функцію Гріна задачі (13)-(15) для рівняння

$$u_{2_t} = u_{2_{xx}} + b(x,t)u_{2_{yy}}.$$

Для довільної функції $b(x,t) > 0$ з класу $C^{\gamma,0}([0,h] \times [0,T])$ задачу (12)-(15) зведемо до інтегро-диференціального рівняння

$$u_2(x,y,t) = \int_0^t \iint_D G(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\big((a(\eta,\tau)-1)u_{2_{\xi\xi}}(\xi,\eta,\tau) +$$

$$(17)\qquad + (b(\xi,\tau)-1)u_{1_{\eta\eta}}(\xi,\eta,\tau)\big)d\xi d\eta d\tau, \quad (x,y,t) \in \overline{Q}_T.$$

Диференціюючи його двічі за змінною x, отримуємо інтегральне рівняння стосовно функції $u_{2_{xx}}(x,y,t)$

$$u_{2_{xx}}(x,y,t)=\int\limits_0^t d\tau\iint\limits_D G_{xx}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\big((a(\eta,\tau)-1)u_{2_{\xi\xi}}(\xi,\eta,\tau)+$$

$$+(b(\xi,\tau)-1)u_{1_{\eta\eta}}(\xi,\eta,\tau)\big)d\xi d\eta,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{18}$$

Оскільки для його ядра справджується оцінка [6]

$$\left|\iint\limits_D G_{xx}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta\right|\le\frac{C_1}{(t-\tau)^{1-\gamma/2}}$$

з деякою сталою $C_1>0$, то для довільної функції $b(x,t)>0$ з класу $C^{\gamma,0}([0,h]\times[0,T])$ рівняння (18) має неперервний в області $\overline{Q}_T$ розв'язок $u_{2_{xx}}(x,y,t)$.

Для оцінки $b(x,t)$ подамо умову (16) у вигляді

$$b(x,t)u_y(x,0,t)=\mu_{32}(x,t),\quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T]. \tag{19}$$

Заміною $u(x,y,t)=v(x,y,t)+\varphi(x,y)+\psi(x,y,t)$, де

$$\psi(x,y,t):=\mu_1(y,t)-\mu_1(y,0)+\frac{x}{h}(\mu_2(y,t)-\mu_2(y,0)-\mu_1(y,t)+\mu_1(y,0))+\mu_3(x,t)-$$
$$-\mu_3(x,0)-[\mu_1(0,t)-\mu_1(0,0)+\frac{x}{h}(\mu_2(0,t)-\mu_2(0,0)-\mu_1(0,t)+\mu_1(0,0))]+$$
$$+\frac{y}{l}[\mu_4(x,t)-\mu_4(x,0)-\mu_1(l,t)+\mu_1(l,0)-\frac{x}{h}(\mu_2(l,t)-\mu_2(l,0)-\mu_1(l,t)+\mu_1(l,0))-$$
$$-\mu_3(x,t)+\mu_3(x,0)+\mu_1(0,t)-\mu_1(0,0)+\frac{x}{h}(\mu_2(0,t)-\mu_2(0,0)-\mu_1(0,t)-\mu_1(0,0))],$$

задачу (1)-(4) зведемо до задачі стосовно v :

$$v_t=a(y,t)v_{xx}+b(x,t)v_{yy}+F(x,y,t)+a(y,t)(\varphi_{xx}(x,y)+\psi_{xx}(x,y,t))+$$

$$+b(x,t)(\varphi_{yy}(x,y)+\psi_{yy}(x,y,t)),\quad (x,y,t)\in Q_T, \tag{20}$$

$$v(x,y,0)=0,\quad (x,y)\in\overline{D}, \tag{21}$$

$$v(0,y,t)=v(h,y,t)=0,\quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T], \tag{22}$$

$$v(x,0,t)=v(x,l,t)=0,\quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T], \tag{23}$$

де $F(x,y,t):=f(x,y,t)-\psi_t(x,y,t)$.

Вважаючи тимчасово, що коефіцієнти $a(y,t),b(x,t)$ відомі, знаходимо розв'язок задачі (20)-(23)

$$v(x,y,t)=\int\limits_0^t\iint\limits_D\tilde{G}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(F(\xi,\eta,\tau)+a(\eta,\tau)(\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)+\psi_{\xi\xi}(\xi,\eta,\tau))+$$

$$+b(\xi,\tau)(\varphi_{\eta\eta}(\xi,\eta)+\psi_{\eta\eta}(\xi,\eta,\tau))d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{24}$$

де $\tilde{G}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ – функція Гріна задачі (20)-(23). Тоді розв'язок задачі (1)-(4) визначається формулою

$$u(x,y,t)=\varphi(x,y)+\psi(x,y,t)+\int_0^t\iint_D \tilde{G}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(F(\xi,\eta,\tau)+a(\eta,\tau)(\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)$$

$$+\psi_{\xi\xi}(\xi,\eta,\tau))+b(\xi,\tau)(\varphi_{\eta\eta}(\xi,\eta)+\psi_{\eta\eta}(\xi,\eta,\tau))d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{25}$$

З (25) знаходимо

$$u_y(x,y,t)=\varphi_y(x,y)+\psi_y(x,y,t)+\int_0^t\iint_D \tilde{G}_y(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(F(\xi,\eta,\tau)+a(\eta,\tau)(\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)+$$

$$+\psi_{\xi\xi}(\xi,\eta,\tau))+b(\xi,\tau)(\varphi_{\eta\eta}(\xi,\eta)+\psi_{\eta\eta}(\xi,\eta,\tau)))d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T, \tag{26}$$

З припущення **(A2)** випливає, що $\varphi_y(x,y)\ge M_1>0,(x,y)\in\overline{D}$. Оскільки решта доданків у правій частині (26) дорівнює нулю при $t=0$, то існує таке число $t_1\in(0,T]$ що справджується нерівність,

$$\Big|\psi_y(x,y,t)+\int_0^t\iint_D \tilde{G}_y(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(F(\xi,\eta,\tau)+a(\eta,\tau)(\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)+\psi_{\xi\xi}(\xi,\eta,\tau))+$$

$$+b(\xi,\tau)(\varphi_{\eta\eta}(\xi,\eta)+\psi_{\eta\eta}(\xi,\eta,\tau))d\xi d\eta d\tau\Big|\le\frac{M_1}{2},\quad (x,t)\in\overline{Q}_{t_1}. \tag{27}$$

Тоді з (26), (27), (19) випливають оцінки

$$0<\frac{M_1}{2}\le u_y(x,y,t)\le\max_{\overline{D}}\varphi_y(x,y)+\frac{M_1}{2},\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_{t_1}, \tag{28}$$

$$0<B_0\le b(x,t)\le B_1<\infty,\quad (y,t)\in[0,h]\times[0,t_1], \tag{29}$$

де

$$B_0:=\frac{\min\limits_{[0,h]\times[0,T]}\mu_{32}(x,t)}{\max\limits_{\overline{D}}\varphi_y(x,y)+M_1/2},\quad B_1:=\frac{\max\limits_{[0,h]\times[0,T]}\mu_{32}(x,t)}{M_1/2},\quad (x,t)\in[0,h]\times[0,t_1].$$

Визначимо з (25) похідну u_{xy}

$$u_{xy}(x,y,t)=\varphi_{xy}(x,y)+\psi_{x,y}(x,y,t)+\int_0^t\iint_D \tilde{G}_{xy}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(F(\xi,\eta,\tau)+a(\eta,\tau)\times$$

$$\times(\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)+\psi_{\xi\xi}(\xi,\eta,\tau))+b(\xi,\tau)(\varphi_{\eta\eta}(\xi,\eta)+\psi_{\eta\eta}(\xi,\eta,\tau)))d\xi d\eta d\tau,\ (x,y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{30}$$

Аналогічно до попереднього, існує таке число $t_2\in(0,T]$, що виконується нерівність

$$\Big|\psi_{xy}(x,y,t)+\int_0^t\iint_D \tilde{G}_{xy}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(F(\xi,\eta,\tau)+a(\eta,\tau)(\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)+$$

$$+\psi_{\xi\xi}(\xi,\eta,\tau))+b(\xi,\tau)(\varphi_{\eta\eta}(\xi,\eta)+\psi_{\eta\eta}(\xi,\eta,\tau)))d\xi d\eta d\tau\Big|\le M_3/2,\ (x,y,t)\in\overline{Q}_{t_2}. \tag{31}$$

де $M_3 := \max_{\overline{D}} |\varphi_{xy}(x,y)|$. Тоді справджується оцінка

$$|u_{xy}(x,y,t)| \le M_3, \quad (x,y,t) \in \overline{Q}_{t_2}. \tag{32}$$

З (28), (32) випливає

$$\|b\|_{C^{\gamma,0}([0,h]\times[0,T_0])} \le B_2 < \infty, \tag{33}$$

де $T_0 := \min\{t_1, t_2\}$, а стала B_2 визначається відомими величинами.

Подамо рівняння (19) у вигляді

$$b(x,t) = Pb(x,t), \tag{34}$$

де

$$Pb(x,t) := \frac{\mu_{32}(x,t)}{u_y(x,0,t)}.$$

Оператор P розглянемо на множині $\mathcal{N} := \{b \in C^{\gamma,0}([0,h]\times[0,T_0]) : B_0 \le b(x,t) \le B_1, \|b\|_{C^{\gamma,0}([0,h]\times[0,T_0])} \le B_2\}$. З оцінок (29), (33) випливає, що оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ в себе. Щоб переконатись, що оператор P є цілком неперервним, достатньо для довільних $\varepsilon > 0, b \in \mathcal{N}$ встановити оцінки

$$|Pb(x_1,t) - Pb(x_2,t)| < \varepsilon, \quad |Pb(x,t_1) - Pb(x,t_2)| < \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in [0,h], t_1, t_2 \in [0,T_0].$$

Перша з нерівностей отримується з (32) та припущень **(A1)**, а друга встановлюється як в одновимірному випадку [7]. Отже, за теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора на множині $\mathcal{N}$ існує нерухома точка оператора P. Тим самим доведено існування розв'язку рівняння (34), задачі (12)-(16), і отже, і задачі (1)-(4).

Теорема. *Припустимо, що виконуються умови* **(A1)-(A3)**. *Тоді можна вказати таке число* $T_0 \in (0,T]$, *що розв'язок* $(a(y,t), b(x,t), u(x,y,t))$ *задачі* (1)-(4) *існує для* $x \in [0,h]$, $y \in [0,l]$, $t \in [0,T_0]$ *і належить* $C^{\gamma,0}([0,l]\times[0,T_0]) \times C^{\gamma,0}([0,h]\times[0,T_0]) \times C^{2+\gamma,2+\gamma,1}(\overline{Q}_{T_0})$, *причому* $a(y,t) > 0$, $(y,t) \in [0,l]\times[0,T_0]$, $b(x,t) > 0$, $(x,t) \in [0,h]\times[0,T_0]$.

Єдиність розв'язку задачі (1)-(4) доведено в [3].

Список використаної літератури

1. М. І. Іванчов, Н. Є. Кінаш, *Обернена задача для рівняння теплопровідності у прямокутній області*, Укр. мат. журн. **69** (2017), no. 12, 1605–1614.
2. М. І. Іванчов, Н. Є. Кінаш, *Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності з невідомими коефіцієнттами, залежними від часової та просторових змінних*, Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь. Збірник наукових праць, присвячений 80-річчю Б. Й. Пташника. Львів, 2017, С. 54–67.
3. M. S. Hussein, D. Lesnic, and M. I. Ivanchov, *Identification of a geterogeneous orthotropic conductivity in a rectangular domain*, International Journals of Novel Ideas: Mathematics **1** (2017), 1–11.
4. M. Ivanchov and N. Kinash, *Inverse problem for 2D heat equation*, IV-th Conf. of Math. Soc. of the Republic of Moldova. June 28–July 2, 2017. Chisinau, 2017. Proceedings of CMSM4, P. 293–296.

5. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, Москва, 1967.
6. А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, Мир, Москва, 1968.
7. M. Ivanchov, *Inverse problems for equations of parabolic type*, Math. Studies, Monograph Series, Vol. **10**, VNTL Publishers, Lviv, 2003.

Стаття: надійшла до редколегії 23.02.2018
прийнята до друку 24.04.2018

INVERSE PROBLEM FOR TWO-DIMENSIONAL HEAT EQUATION WITH TWO UNKNOWN COEFFICIENTS

Mykola IVANCHOV

Ivan Franko Lviv National University,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine
e-mail: mykola.ivanchov@lnu.edu.ua

An inverse problem for the heat equation in a rectangle with two unknown leading coefficients depending on time and space variables is considered. The problem is reduced to two inverse problems for the heat equation with one of unknown coefficients. Conditions of existence of smooth solution are established.

Key words: inverse problem, two-dimensional heat equation, two unknown leading coefficients .