ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 84. С. 5–14
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 84. P. 5–14

УДК 512.53

МОНОЇД СИЛЬНИХ ЕНДОТОПІЗМІВ СИМЕТРИЧНОГО ВІДНОШЕННЯ

Олена ТОІЧКІНА

Луганський національний університет імені Тараса Шевченка,
м. Старобільськ, 92703, пл. Гоголя, 1
e-mail: toichkina.e@gmail.com

Визначено клас симетричних відношень і доведено, що моноїд усіх сильних ендотопізмів довільного симетричного відношення такого класу є ізоморфним вінцевому добутку моноїда сильних ендоморфіз- мів канонічної сильної фактор-системи з деякою малою категорією.

Ключові слова: напівгрупа, моноїд, симетричне відношення, ендотопізм, сильний ендотопізм, вінцевий добуток, узагальнений лексикографічний добуток.

1. Вступ. Напівгрупа ендоморфізмів —найважливіша похідна структура будь-якої алгебричної системи. Її абстрактні властивості дають змогу ефективно вивчати будову вихідної системи. У дослідженні напівгруп ендоморфізмів реляційних систем певну увагу приділяють визначеності бінарних відношень своєю напівгрупою ендоморфізмів [1, 2], вивченню їхньої регулярності [3, 4] та комбінаторних властивостей [5], опису будови напівгруп ендоморфізмів бінарних відношень з точністю до ізоморфізму [6, 7].

Одним із узагальнень ендоморфізму для реляційних систем є поняття ендотопізму, введене Б. В. Поповим в [8, с. 188], де за допомогою напівгрупи ендотопізмів з точністю до ізотопізму були схарактеризовані певні структури μ-арних відношень. Далі з'ясували, що напівгрупа ендотопізмів довільного бінарного відношення, визначеного на деякій множині, є відповідністю (у сенсі О. Г. Куроша [9, с. 110]) симетричної напівгрупи на тій самій множині. Доведено, що напівгрупа всіх ендотопізмів довільного відношення еквівалентності є відповідністю напівгрупи ендоморфізмів тієї самої еквівалентності [10]. Отримано точні зображення деяких відповідностей напівгрупи ендоморфізмів довільного відношення еквівалентності й вивчено їхні властивості [10, 11]. У [12] вирішена проблема визначеності ефективних і зв'язних бінарних відношень своєю напівгрупою ендотопізмів.

Запропонована В. Флейшером [7] конструкція вінцевого добутку моноїда з малою категорією (як узагальнення вінцевого добутку моноїдів) дала змогу з точністю

2010 Mathematics Subject Classification: 20M10, 20M30 до ізоморфізму описати будову напівгруп ендоморфізмів різних алгебричних систем. Наприклад, у [13] цю конструкцію застосували для опису точного зображення моноїда ендоморфізмів довільної дії. В [14] доведено, що будь-яка напівгрупа ендоморфізмів вільного добутку напівгруп максимального w-класу ізоморфна вінцевому добутку напівгрупи перетворень і малої категорії.

Ми вивчаємо напівгрупи сильних ендотопізмів симетричних відношень заданого класу. Зазначимо, що поняття сильного ендоморфізму для графів ввів К. Чулік [15, с. 136]. У [16, с. 610] У. Кнауер і М. Ніпорте довели теорему про точне зображення моноїда сильних ендоморфізмів скінченного неорієнтованого графа без кратних ребер у вигляді вінцевого добутку групи та категорії. В [17, с. 748] доведено, що моноїд всіх сильних ендоморфізмів будь-якого нескінченного неорієнтованого графа заданого класу може бути точно зображений як вінцевий добуток відповідного моноїда перетворень і деякої малої категорії.

2. Основні поняття та допоміжні леми. Нехай A, B, A', B' – довільні непорожні множини.

Упорядкована пара (f, g) відображень $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ називається *гомотопізмом* відношення $\rho \subseteq A \times B$ в $\rho' \subseteq A' \times B'$, якщо з $(x, y) \in \rho$ випливає, що $(xf, yg) \in \rho'$ для будь-яких $x \in A, y \in B$.

Гомотопізм (f, g) бінарного відношення ρ в ρ' називається *сильним гомотопізмом*, якщо з $(xf, yg) \in \rho'$ випливає, що $(x, y) \in \rho$ для будь-яких $x \in A, y \in B$.

Гомотопізм відношення $\rho \subseteq X \times X$ в себе називається *ендотопізмом*.

Множина всіх ендотопізмів відношення ρ стосовно операції покомпонентного множення утворює напівгрупу, яку будемо позначати через $\mathbf{Et}(\rho)$.

Ендотопізм (φ, ψ) відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *сильним ендотопізмом*, якщо з $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ випливає, що $(x, y) \in \rho$ для будь-яких $x, y \in X$.

Множина всіх сильних ендотопізмів відношення ρ стосовно операції покомпонентного множення утворює моноїд, який позначимо як $\mathbf{SEt}(\rho)$.

Ендотопізм відношення ρ, в якому кожна компонента бієктивна, називається *автотопізмом*.

Множина всіх автотопізмів відношення ρ стососвно операції покомпонентного множення утворює групу, яку будемо позначати через $\mathbf{At}(\rho)$.

Зазначимо, що ендотопізм (φ, ψ), де $\varphi = \psi$, визначає ендоморфізм відношення ρ. Отож, напівгрупа ендоморфізмів $\mathbf{End}(\rho)$ з точністю до ізоморфізму міститься в напівгрупі ендотопізмів $\mathbf{Et}(\rho)$.

Якщо $\rho \subseteq X \times X$ і $x \in X$, то покладемо $N(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in \rho\}$.

Виконується така лема.

Лема 1. *Нехай X – довільна непорожня множина, $\rho \subseteq X \times X$ – симетричне відношення, $a, b \in X$. Існує сильний ендотопізм (τ, σ) відношення ρ такий, що $\tau \in \mathbf{End}(\rho), \sigma \in \mathbf{End}(\rho)$, і $a\tau = b\sigma$ тоді й тільки тоді, коли $N(a) = N(b)$.*

Доведення. Нехай $(\tau, \sigma) \in \mathbf{SEt}(\rho)$ задовольняє умову леми. Позаяк $\tau \in \mathbf{End}(\rho)$, то $c\tau \in N(a\tau)$ для будь-якого $c \in N(a)$. Враховуючи, що $a\tau = b\sigma$, отримуємо $c\tau \in N(b\sigma)$. Оскільки $(\tau, \sigma) \in \mathbf{SEt}(\rho)$, то $c \in N(b)$. На підставі довільності вибору $c \in X$ маємо $N(a) \subseteq N(b)$. Доведення оберненого включення є аналогічним.

Візьмемо тепер $a, b \in X$ такі, що $N(a) = N(b)$, визначимо перетворення τ і σ множини X так:

$$x\tau = x, \qquad x\sigma = \begin{cases} a, & \text{якщо } x = b, \\ b, & \text{якщо } x = a, \\ x & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $x \in X$.

Зрозуміло, що $\tau \in \mathbf{End}(\rho)$. Також цілком очевидно, що з $(x, y) \in \rho$ випливає $(x\sigma, y\sigma) \in \rho$ для таких x, y, що 1) $x \neq y, x, y \in \{a, b\}$ або 2) $x \in X \backslash \{a, b\}, y \in X \backslash \{a, b\}$. Нехай тепер $x, y \in \{a, b\}, x = y$. Тоді

$$(x, x) \in \rho \Rightarrow x \in N(x) \text{ і } N(x\sigma) = N(x) \Rightarrow x\sigma \in N(x) = N(x\sigma) \Rightarrow (x\sigma, x\sigma) \in \rho.$$

Якщо $x \in \{a, b\}, y \in X \backslash \{a, b\}$, то

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow y \in N(x) \Rightarrow y\sigma \in N(x\sigma) \Rightarrow (x\sigma, y\sigma) \in \rho.$$

Випадок $x \in X \backslash \{a, b\}, y \in \{a, b\}$ розглядають аналогічно. У підсумку отримуємо, що $\sigma \in \mathbf{End}(\rho)$.

Зауважимо, що $(\tau, \sigma) = (\tau^{-1}, \sigma^{-1})$. Тому для доведення того, що $(\tau, \sigma) \in \mathbf{SEt}(\rho)$, достатньо довести, що $(\tau, \sigma) \in \mathbf{Et}(\rho)$. Доведемо це. Справді, з $(x, y) \in \rho$ випливає $(x\tau, y\sigma) \in \rho$, що є цілком очевидним, якщо $y \notin \{a, b\}$. Розглянемо всі можливі випадки.

1. Якщо $x, y \in \{a, b\}$, то

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow x \in N(y) \Rightarrow x \in N(x) \Rightarrow x \in N(y\sigma) \Rightarrow (x\tau, y\sigma) \in \rho.$$

2. Нехай $x \in X \backslash \{a, b\}, y \in \{a, b\}$. Тоді

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow x \in N(y) \Rightarrow x \in N(y\sigma) \Rightarrow x\tau \in N(y\sigma) \Rightarrow (x\tau, y\sigma) \in \rho.$$

3. Якщо ж $x, y \notin \{a, b\}$, то $(x\tau, y\sigma) = (x, y) \in \rho$.

Отож, $(\tau, \sigma) \in \mathbf{SEt}(\rho)$. □

Зауважимо, що ендоморфізми τ, σ з леми 1 є сильними. Справді, нехай умова леми 1 виконується, $\tau \in \mathbf{End}(\rho)$ і $(a\tau, c\tau) \in \rho$ для деяких $a, c \in X$. Тоді $c\tau \in N(a\tau)$, і врахувавши $a\tau = b\sigma$, отримуємо $c\tau \in N(b\sigma)$. Оскільки $(\tau, \sigma) \in \mathbf{SEt}(\rho)$, то $c \in N(b)$. Але $N(b) = N(a)$, тоді $c \in N(a)$ і $(a, c) \in \rho$. Отже, $\tau \in \mathbf{SEnd}(\rho)$. Аналогічно можна довести, що $\sigma \in \mathbf{SEnd}(\rho)$.

З леми 1 випливає, що на множині X природно виникає відношення

$$\nu = \{(x, y) \in X \times X \mid N(x) = N(y)\},$$

яке очевидно є відношенням еквівалентності. Далі, на фактор-множині X/ν визначимо відношення δ, прийнявши

$$\delta = \{(x_\nu, y_\nu) \in X/\nu \times X/\nu \mid (x, y) \in \rho\},$$

де x_ν є класом еквівалентності, який містить $x \in X$.

Природне відображення $\gamma\colon X \to X/\nu, x \mapsto x_\nu$ визначає сильний гомотопізм (γ, γ) відношень $\rho \subseteq X \times X$ і $\delta \subseteq X/\nu \times X/\nu$, який, відповідно до леми 1 і зауваження до неї, задає сильний гомоморфізм γ цих відношень. Реляційна система $(X/\nu, \delta)$ називаєтся *канонічною сильною фактор-системою*.

Нехай (U, ζ), $(Y_u, \rho_u)_{u\in U}$ – довільні реляційні системи.

Означення 1. *Узагальненим лексикографічним добутком* $U((Y_u)_{u\in U})$ реляційних систем (U, ζ) і $(Y_u, \rho_u)_{u\in U}$ називається модель $(U((Y_u)_{u\in U}), \omega)$, де

$$U((Y_u)_{u\in U}) = \{(u, a_u) \mid u \in U, a_u \in Y_u\}$$

і $((u, a_u), (v, b_v)) \in \omega$ тоді й тільки тоді, коли $(u, v) \in \zeta$ або $u = v$ і $(a_u, b_v) \in \rho_u$ (див. [16, с. 608]).

Твердження 1. *Нехай X – довільна непорожня множина, $\rho \subseteq X \times X$ – симетричне відношення, ν і δ – визначені раніше відношення еквівалентності на X і X/ν, відповідно, $U = X/\nu$ – канонічна сильна фактор-система. Візьмемо для кожного $u \in U$ множину Y_u таку, що $|Y_u| = |u|$, і взаємно однозначне відображення $\mu_u : u \to Y_u$. Тоді*

$$(X, \rho) \cong (U((Y_u)_{u\in U}), \omega),$$

де $\zeta = \delta$,

$$\rho_u = \{(y, y') \in Y_u \times Y_u \mid (y\mu_u^{-1}, y'\mu_u^{-1}) \in \rho\}$$

при $u \in U$, ω визначене в означенні 1.

Доведення. Визначимо відображення $\xi : X \to U((Y_u)_{u\in U})$, прийнявши $x\xi = (u, x_u)$, де $u = x_\nu$ і $x_u = x\mu_u$. Відображення ξ очевидно є бієктивним. Нехай $x, y \in X$ і $x\xi = (u, x_u)$, $y\xi = (v, y_v)$. Якщо $u \neq v$, то

$$(x, y) \in \rho \Longleftrightarrow (u, v) \in \delta \Longleftrightarrow (x\xi, y\xi) \in \omega.$$

Якщо $u = v$, тобто $N(x) = N(y)$, то

$$(x, y) \in \rho \Longleftrightarrow (x\xi, y\xi) \in \omega.$$

□

Далі елементи множини X будемо ототожнювати з відповідними їм елементами з узагальненого лексикографічного добутку $U((Y_u)_{u\in U})$.

Нехай $W \subseteq U((Y_u)_{u\in U})$. *Першою проекцією* множини W на фактор-систему X/ν називається множина

$$p_1(W) = \{u \in U \mid (u, x_u) \in W\}.$$

Позначимо $\overline{u} = \{(u, x_u) \mid x_u \in Y_u\}$.

Лема 2. *Нехай $V = U((Y_u)_{u\in U})$, $\omega \subseteq V \times V$, $U = X/\nu$ і $(\varphi, \psi) \in \mathbf{SEt}(\omega)$. Тоді*

$$p_1(\overline{u}\varphi) \cap p_1(\overline{v}\varphi) = \varnothing \qquad і \qquad p_1(\overline{u}\psi) \cap p_1(\overline{v}\psi) = \varnothing,$$

для довільних різних $u, v \in U$.

Доведення. Припустимо протилежне: існують різні $u, v \in U$ такі, що $p_1(\overline{u}\varphi) \cap p_1(\overline{v}\varphi) = p_1(\overline{r})$ для деякого $\overline{r} \subseteq V, \overline{r} \neq \varnothing$. Зі структури фактор-системи U і множини V випливає, що $N(u, x_u) = N(u, y_u)$ для будь-якого $u \in U$ і будь-яких $x_u, y_u \in Y_u$. Оскільки $(\varphi, \psi) \in \mathbf{SEt}(\omega)$, для будь-яких $(u, y_u), (v, y_v) \in \overline{r}\varphi^{-1}$, то $N(u, y_u) = N(v, y_v)$, а це можливо тільки у випадку, коли $u = v$. Міркування для перетворення ψ є аналогічними. З отриманого протиріччя випливає твердження леми. □

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 84

Наслідок 1. *Нехай* $V = U((Y_u)_{u \in U})$, $\omega \subseteq V \times V$, $U = X/\nu$, $|U| < \infty$ *і* $(\varphi, \psi) \in \mathbf{SEt}(\omega)$. *Тоді* $|p_1(\overline{u}\varphi)| = |p_1(\overline{u}\psi)| = 1$ *для будь-якого* $u \in U$.

Приклад 1. Нехай $X = \mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\rho = (\rho_1 \cup \rho_1^{-1}) \backslash (\rho_2 \cup \rho_2^{-1})$, де $\rho_1 = \{(x, x+1) \mid x \in X\}$ і

$$\rho_2 = \{(3,4)\} \cup \{(x_i, x_i + 1) \mid x_0 = 3, x_i = x_{i-1} + 4, i \in \mathbb{N}\}.$$

Фактор-система X/ν складається з класу $1_\nu = \{1, 3\}$ і класів вигляду $x_\nu = \{x\}$, $x \in X \backslash \{1, 3\}$. Тоді

$$V = X/\nu((x_\nu)_{x_\nu \in X/\nu}) = \{(1_\nu, 1), (1_\nu, 3)\} \cup \{(x_\nu, x) \mid x \in X \backslash \{1, 3\}\}.$$

Визначимо перетворення φ і ψ множини X, прийнявши

$$x\varphi = x + 4 \quad \text{для будь-якого } x \in X,$$

$$x\psi = \begin{cases} 7, & \text{якщо } x = 1, \\ 5, & \text{якщо } x = 3, \\ x + 4 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

що можна записати так:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & x & \dots \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \dots & x+4 & \dots \end{pmatrix},$$

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & x & \dots \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 10 & 11 & \dots & x+4 & \dots \end{pmatrix}.$$

Неважко переконатися, що $(\varphi, \psi) \in \mathbf{SEt}(\rho)$, де для класу $1_\nu = \{1, 3\}$ маємо $1\varphi = 5 \in 5_\nu$, $3\varphi = 7 \in 7_\nu$. Аналогічно $1\psi = 7 \in 7_\nu$, $3\psi = 5 \in 5_\nu$. Визначимо перетворення $\varphi' \colon V \to V$ і $\psi' \colon V \to V$, прийнявши $(x_\nu, x)\varphi' = ((x\varphi)_\nu, x\varphi)$, $(x_\nu, x)\psi' = ((x\psi)_\nu, x\psi)$ для будь-якого $(x_\nu, x) \in V$. Очевидно (φ', ψ') – сильний ендотопізм відношення $\omega \subseteq V \times V$ і $p_1(\overline{x_\nu}\varphi) \cap p_1(\overline{y_\nu}\varphi) = \varnothing$, $p_1(\overline{x_\nu}\psi) \cap p_1(\overline{y_\nu}\psi) = \varnothing$ для будь-яких $x_\nu \neq y_\nu \in X/\nu$, але на підставі нескінченності множини X маємо $|p_1(\overline{1_\nu}\varphi)| = |\{5_\nu, 7_\nu\}| \neq 1$ і $|p_1(\overline{1_\nu}\psi)| \neq 1$.

Нехай X – довільна непорожня множина. Позначимо через $\mathfrak{G}$ клас усіх симетричних відношень ρ, визначених на множині X, для яких за будь-якого $(\varphi, \psi) \in \mathbf{SEt}(\rho)$ виконується умова:

(1) $$\forall x_\nu \in X/\nu \quad \exists y_\nu \in X/\nu : \; x_\nu\varphi \subseteq y_\nu, \; x_\nu\psi \subseteq y_\nu$$

Зауважимо таке: якщо $\rho \in \mathfrak{G}$, то при різних $x_\nu, y_\nu \in X/\nu$ випадок $x_\nu\varphi \subseteq z_\nu$ і $y_\nu\psi \subseteq z_\nu$ для деякого $z_\nu \in X/\nu$ є неможливим. Доведемо спочатку, що φ і ψ – ендоморфізми відношення $\rho \in \mathfrak{G}$, де $(\varphi, \psi) \in \mathbf{Et}(\rho)$. Справді, нехай $a, b \in X$ такі, що $(a, b) \in \rho$. Нехай $a \in a_\nu$ і $b \in b_\nu$. Оскільки $(\varphi, \psi) \in \mathbf{Et}(\rho)$, то $(a\varphi, b\psi) \in \rho$ і $a\varphi \in a_\nu\varphi$, $b\psi \in b_\nu\psi$. Враховуючи, що $\rho \in \mathfrak{G}$, одержуємо $b_\nu\psi \subseteq c_\nu$, $b_\nu\varphi \subseteq c_\nu$ для деякого $c_\nu \in X/\nu$. Але тоді $(a\varphi, b') \in \rho$ для будь-якого $b' \in c_\nu$, а також і для $b' = b\varphi$, звідки отримуємо $(a\varphi, b\varphi) \in \rho$ і $\varphi \in \mathbf{End}(\rho)$. Доведення того, що $\psi \in \mathbf{End}(\rho)$, є аналогічним. Нехай тепер $x, y \in X$ такі, що $x_\nu \neq y_\nu$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, шо існує такий $a \in N(x)$, що $a \notin N(y)$. Оскільки $\varphi \in \mathbf{End}(\rho)$, то $a\varphi \in N(x\varphi) = N(z)$. Враховуючи, що $(\varphi, \psi) \in \mathbf{SEt}(\rho)$, отримуємо $a \in N(z\psi^{-1}) = N(y)$, що суперечить нашому припущенню. Отож, умова (1) для будь-якого $\rho \in \mathfrak{G}$ задовольняє умову наслідку 1.

Нехай $(\tau, \sigma) \in \mathbf{Et}(\rho)$. Визначимо перетворення τ^* фактор-системи X/ν так: $x_\nu \tau^* = (x\tau)_\nu$ для всіх $x_\nu \in X/\nu$. З означення класу $\mathfrak{G}$ й останнього зауваження випливає таке твердження.

Твердження 2. *Для будь-якого $(\varphi, \psi) \in \mathbf{SEt}(\rho)$, $\rho \in \mathfrak{G}$ виконується рівність $\varphi^* = \psi^*$ і φ^* – сильний ін'єктивний гомоморфізм відношення $\delta \subseteq X/\nu \times X/\nu$.*

Наслідок 2. *Нехай X – скінченна множина та $\rho \in \mathfrak{G}$. Для кожної канонічної сильної фактор-системи $(X/\nu, \delta)$ виконується рівність*

$$\mathbf{SEnd}(\delta) = \mathbf{Aut}(\delta).$$

3. Сильні ендотопізми симетричних відношень. Нехай $\mathbf{K}$ – мала категорія, S – моноїд з одиницею 1, який діє справа на множині $X = \mathrm{Ob}\mathbf{K}$ об'єктів категорії $\mathbf{K}$. Приймемо

$$M = \bigcup_{a,b \in X} \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(a, b)$$

і позначимо через $\mathrm{Map}(X, M)$ множину всіх відображень з X в M.

Нехай

$$W = \{(s, f) \mid s \in S,\ f \in \mathrm{Map}(X, M), xf \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{K}}(x, xs)\ \forall x \in X\}.$$

Для всіх $(r, f), (p, q) \in W$ визначимо операцію

$$(r, f)(p, q) = (rp, fq_r),$$

де $x(fq_r) = (xf)((xr)q)$ для всіх $x \in X$ і $(xf)(xr)q$ – композиція морфізмів у категорії K. Зазначимо, що композиція морфізмів у цій конструкції визначається зліва направо.

Множина W з таким множенням є моноїдом з одиницею $(1, e)$, де відображення $e \in \mathrm{Map}(X, M)$ таке, що $xe \in \mathrm{Mor}(x, x)$, – тотожний морфізм для кожного об'єкта x в $\mathbf{K}$.

Моноїд W називается *вінцевим добутком моноїда S з малою категорією* $\mathbf{K}$ [16, с. 609] і позначається через $S\mathrm{wr}\mathbf{K}$.

Нехай задана довільна сукупність категорій $\mathbf{C}_i, i \in \mathcal{I}$. Визначимо нову категорію $\prod_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{C}_i$, прийнявши

$$\mathrm{Ob}\Big(\prod_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{C}_i\Big) = \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathrm{Ob}\mathbf{C}_i, \qquad \text{і} \qquad \mathrm{Mor}\Big(\prod_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{C}_i\Big) = \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathrm{Mor}\mathbf{C}_i.$$

Добуток морфізмів у цій категорії визначається покомпонентно. Отримана категорія називається *добутком категорій* $\mathbf{C}_i, i \in \mathcal{I}$.

Нехай тепер $P = U(Y_u)_{u \in U}$, $\omega \subseteq P \times P$ – довільне відношення класу $\mathfrak{G}$. Визначимо малу категорію $\mathbf{K}_{\mathfrak{G}}$, прийнявши

$$\mathrm{Ob}\mathbf{K}_{\mathfrak{G}} = \{Y_u \mid u \in U\}, \qquad \mathrm{Mor}\mathbf{K}_{\mathfrak{G}} = \bigcup_{u,v \in U} \mathrm{Map}(Y_u, Y_v),$$

де $\mathrm{Map}(Y_u, Y_v)$ – множина всіх відображень з Y_u в Y_v. Позначимо через $\mathbf{K}^2_{\mathfrak{G}}$ добуток категорії $\mathbf{K}_{\mathfrak{G}}$ на себе, а через $\mathbf{K}$ – повну підкатегорію категорії $\mathbf{K}^2_{\mathfrak{G}}$, яка розглядається на множині об'єктів

$$\mathrm{Ob}\mathbf{K} = \{(Y_u, Y_u) \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}_{\mathfrak{G}} \times \mathrm{Ob}\mathbf{K}_{\mathfrak{G}} \mid u \in U\}.$$

Моноїд $\mathbf{SEnd}(\delta)$ природно діє справа на Ob$\mathbf{K}$

$$(Y_u, Y_u)\tau^* = (Y_{u\tau^*}, Y_{u\tau^*}),$$

де $\tau^* \in \mathbf{SEnd}(\delta)$. Отже, отримуємо вінцевий добуток $\mathbf{SEnd}(\delta)\mathrm{wr}\mathbf{K}$ моноїда $\mathbf{SEnd}(\delta)$ і малої категорії $\mathbf{K}$.

Нехай $(\tau^*, h_{f,g}) \in \mathbf{SEnd}(\delta)\mathrm{wr}\mathbf{K}$, де $\tau^* \in \mathbf{SEnd}(\delta)$, $h_{f,g} \in \mathrm{Map}(\mathrm{Ob}\mathbf{K}, \mathrm{Mor}\mathbf{K})$. Тоді $(Y_u, Y_u)h_{f,g} \in \mathrm{Map}((Y_u, Y_u), (Y_{u\tau^*}, Y_{u\tau^*}))$ для всіх $(Y_u, Y_u) \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}$. Позначимо $(Y_u, Y_u)h_{f,g} = (f_u, g_u)$, де $(y_u, y_u)(f_u, g_u) = (y_u f_u, y_u g_u) \in (Y_{u\tau^*}, Y_{u\tau^*})$ для всіх $y_u \in Y_u$.

Виконується така теорема.

Теорема 1. *Нехай $P = U((Y_u)_{u\in U})$, $\omega \subseteq P \times P$ – довільне відношення класу $\mathfrak{S}$ і $\mathbf{K}$ – мала категорія, визначена раніше. Тоді*

$$\mathbf{SEt}(\omega) \cong \mathbf{SEnd}(\delta)\mathrm{wr}\mathbf{K}.$$

Доведення. Нехай ω – довільне відношення класу $\mathfrak{S}$, $(\varphi, \psi) \in \mathbf{SEt}(\omega)$. Згідно з твердженням 2, $\varphi^* \in \mathbf{SEnd}(\delta)$. Означимо відображення $h_{\varphi,\psi} \colon \mathrm{Ob}\mathbf{K} \to \mathrm{Mor}\mathbf{K}$ так:

$$(Y_u, Y_u)h_{\varphi,\psi} = (\varphi_u, \psi_u),$$

де для кожного $u \in U$ матимемо

$$(\varphi_u, \psi_u) \colon (Y_u, Y_u) \to (Y_{u\varphi^*}, Y_{u\varphi^*})$$

і

$$(a_u, b_u)(\varphi_u, \psi_u) = (a_u\varphi_u, b_u\psi_u) = (a_{u'}, b_{u'}),$$

якщо $((u, a_u), (u, b_u))(\varphi, \psi) = ((u', a_{u'}), (u', b_{u'}))$ для будь-яких $(a_u, b_u) \in Y_u \times Y_u$.

Отже, $((u, a_u), (u, b_u))(\varphi, \psi) = ((u\varphi^*, a_u\varphi_u), (u\varphi^*, b_u\psi_u))$ і коректно заданим є відображення

$$\theta \colon \mathbf{SEt}(\omega) \to \mathbf{SEnd}(\delta)\mathrm{wr}\mathbf{K}, \ (\varphi, \psi) \mapsto (\varphi^*, h_{\varphi,\psi}).$$

Нехай тепер $(\varphi, \psi), (\tau, \sigma) \in \mathbf{SEt}(\omega)$ – такі ендотопізми, що

$$(\varphi, \psi)\theta = (\varphi^*, f_{\varphi,\psi}), \quad (\tau, \sigma)\theta = (\tau^*, g_{\tau,\sigma})$$

і $((\varphi, \psi)(\tau, \sigma))\theta = ((\varphi\tau)^* h_{\varphi\tau,\psi\sigma})$.

Тоді для будь-яких $(u, a_u), (v, b_v) \in P$

$$\begin{aligned}((u(\varphi\tau)^*, a_u(\varphi\tau)_u), (v(\varphi\tau)^*, b_v(\psi\sigma)_v)) &= ((u, a_u), (v, b_v))(\varphi\tau, \psi\sigma) = \\ &= ((u, a_u)\varphi\tau, (v, b_v)\psi\sigma) = \\ &= (((u, a_u)\varphi)\tau, ((v, b_v)\psi)\sigma) = \\ &= ((u\varphi^*, a_u\varphi_u)\tau, (v\varphi^*, b_v\psi_v)\sigma) = \\ &= (((u\varphi^*)\tau^*, (a_u\varphi_u)\tau_{u\varphi^*}), ((v\varphi^*)\tau^*, (b_v\psi_v)\sigma_{v\psi^*})) = \\ &= ((u(\varphi^*\tau^*), a_u(\varphi_u\tau_{u\varphi^*})), (v(\varphi^*\tau^*), b_v(\psi_v\sigma_{v\varphi^*}))).\end{aligned}$$

Отож, отримали, що $(\varphi\tau)^* = \varphi^*\tau^*$, $(\varphi\tau)_u = \varphi_u\tau_{u\varphi^*}$ і $(\varphi\tau)_v = \psi_v\sigma_{v\varphi^*}$.

Тепер для будь-якого $(Y_u, Y_u) \in \mathrm{Ob}\mathbf{K}$ маємо

$$\begin{aligned}(Y_u, Y_u)h_{\varphi\tau,\psi\sigma} &= ((\varphi\tau)_u, (\psi\sigma)_u) = \\ &= (\varphi_u\tau_{u\varphi^*}, \psi_u\sigma_{u\varphi^*}) = \\ &= ((\varphi_u, \psi_u)(\tau_{u\varphi^*}, \sigma_{u\varphi^*})) = \\ &= (Y_u, Y_u)(f_{\varphi,\psi}(g_{\tau,\sigma})_{\varphi^*,\varphi^*}).\end{aligned}$$

Отже, $h_{\varphi\tau,\psi\sigma} = f_{\varphi,\psi}(g_{\tau,\sigma})_{\varphi^*,\varphi^*}$.

Отож,

$$\begin{aligned}((\varphi, \psi)(\tau, \sigma))\theta &= (\varphi\tau, \psi\sigma)\theta = \\ &= ((\varphi\tau)^*, h_{\varphi\tau,\psi\sigma}) = \\ &= (\varphi^*\tau^*, f_{\varphi,\psi}(g_{\tau,\sigma})_{\varphi^*,\varphi^*}) = \\ &= (\varphi^*, f_{\varphi,\psi})(\tau^*, g_{\tau,\sigma}) = \\ &= (\varphi, \psi)\theta(\tau, \sigma)\theta.\end{aligned}$$

Нехай тепер (φ, ψ), $(\tau, \sigma) \in \mathbf{SEt}(\omega)$ такі, що $(\varphi, \psi) \neq (\tau, \sigma)$. Тоді для будь-яких $((u, a_u), (u, b_u)) \in P \times P$ матимемо

$$\begin{gathered}((u, a_u), (u, b_u))(\varphi, \psi) \neq ((u, a_u), (u, b_u))(\tau, \sigma) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow ((u, a_u)\varphi, (u, b_u)\psi) \neq ((u, a_u)\tau, (u, b_u)\sigma) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow (u, a_u)\varphi \neq (u, a_u)\tau \quad \text{або} \quad (u, b_v)\psi \neq (v, b_v)\sigma \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow (u\varphi^*, a_u\varphi_u) \neq (u\tau^*, a_u\tau_u) \quad \text{або} \quad (v\varphi^*, b_v\psi_u) \neq (v\tau^*, b_v\sigma_u).\end{gathered}$$

Тоді $u\varphi^* \neq u\tau^*$ або $a_u\varphi_u \neq a_u\tau_u$, що випливає з першої нерівності, або $v\psi^* \neq v\sigma^*$ або $b_v\varphi_u \neq b_v\tau_v$, що випливає з другої нерівності. У підсумку, $(\varphi, \psi)\theta \neq (\tau, \sigma)\theta$ у будь-якому випадку. Отже, відображення θ є ін'єктивним. Сюр'єктивність θ випливає з його структури. Теорема доведена. $\square$

Зауважимо, що всі симетричні відношення, визначені на скінченній множині X, задовольняють умову (1). Справді, нехай X – скінченна множина, $\rho \subseteq X \times X$ – симетричне відношення, (τ, σ) – його сильний ендотопізм. Доведемо, що τ^*, σ^* – бієктивні перетворення фактор-системи X/ν, визначеної, як у пункті 2. Справді, нехай $x_\nu \neq y_\nu$, тоді існує такий $a \in N(x)$, що $a \notin N(y)$. Оскільки, згідно з лемою 1 і зауваженням до неї, $\tau \in \mathbf{SEnd}(\rho)$, то $a\tau \in N(x\varphi)$ і $a\tau \notin N(y\varphi)$, звідки $(x\tau)_\nu \neq (y\tau)_\nu$ і τ^* є ін'єктивним перетворенням. Сюр'єктивність τ^* є очевидною. Міркування щодо перетворення σ^* аналогічні. Отже, на підставі скінченності X в образі кожного перетворення τ, σ множини X будь-якого сильного ендотопізму (τ, σ) цього відношення завжди є хоча б один представник кожного класу еквівалентності ν.

Припустимо тепер, що існують такі $x, y \in X$, що $(x, y) \in \nu$, але $(x\tau, y\sigma) \notin \nu$. Тоді знайдеться такий $z \in N(x\tau)$, що $z \notin N(y\sigma)$. Через те, що $(\tau, \sigma) \in \mathbf{SEt}(\rho)$, одержуємо $z\sigma^{-1} \in N(x) = N(y)$. Оскільки $\sigma \in \mathbf{End}(\rho)$, то $z \in N(y\sigma)$, що суперечить нашому припущенню.

Отож, наслідком з теореми 1 є такий результат.

Теорема 2. *Нехай X – скінченна множина, $P = U((Y_u)_{u\in U})$, $\omega \subseteq P\times P$ – довільне симетричне відношення, $\mathbf{K}$ – мала категорія, визначена вище. Тоді*

$$\mathbf{SEt}(\omega) \cong \mathbf{Aut}(\delta)\mathrm{wr}\mathbf{K}.$$

Наслідок 3. *Нехай X – скінченна множина, $P = U((Y_u)_{u\in U})$, $\omega \subseteq P\times P$ – довільне симетричне відношення. Тоді*

$$|\mathbf{SEt}(\omega)| = \sum_{\varphi\in\mathbf{Aut}(\delta)} \Big(\prod_{u\in U} |Y_{u\varphi}|^{|Y_u|}\Big)^2.$$

Список використаної літератури

1. Л. М. Глускин, *Полугруппа изотонных преобразований*, УМН **16** (1961), no. 5(101), 157–162.
2. J. Araujo and J. Konieczny, *Dense relations are determined by their endomorphisms monoids*, Semigroup Forum **70** (2005), no. 2, 302–306.
3. В. И. Ким, И. Б. Кожухов, *Условия регулярности полугрупп изотонных преобразований счетных цепей*, Фундамент. и прикл. матем. **12** (2006), no. 8, 97–104; **English version:** V. I. Kim and I. B. Kozhukhov, *Regularity conditions for semigroups of isotone transformations of countable chains*, J. Math. Sci. **152** (2008), no. 2, 203–208.
4. И. Б. Кожухов, В. А. Ярошевич, *Полугруппы отображений, сохраняющих бинарное отношение*, Фундамент. и прикл. матем. **14** (2008), no. 7, 129–135; **English version:** I. B. Kozhukhov and V. A. Yaroshevich, *Transformation semigroups preserving a binary relation*, J. Math. Sci. **164** (2010), no. 2, 240–244.
5. A. Laradji and A. Umar, *Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations*, J. Algebra **278** (2004), no. 1, 342–359.
6. Ю. В. Жучок, *Ендоморфізми відношень еквівалентності*, Вісник Київ. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки **3** (2007), 22–26.
7. В. Флейшер, *О сплетении моноидов с категориями*, Труды Акад. Наук Эст. ССР **35** (1986), 237–243.
8. Б. В. Попов, *Полугруппы эндотопизмов μ-арных отношений*, Ученые записки ЛГПИ им. А. И. Герцена **274** (1965), 184–201.
9. А. Г. Курош, *Общая алгебра (лекции 1969-70 учебного года)*, Наука, Москва, 1974.
10. Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина, *Соответствия полугруппы эндоморфизмов отношения эквивалентности*, Матем. заметки **97** (2015), no. 2, 217–230; **English version:** Yu. V. Zhuchok and E. A. Toichkina, *Correspondences of the semigroup of endomorphisms of an equivalence relation*, Math. Notes **97** (2015), no. 2, 201–212.
11. Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина, *Полугруппы эндотопизмов отношения эквивалентности*, Матем. сб. **205** (2014), no. 5, 37–54; **English version:** Yu. V. Zhuchok and E. A. Toichkina, *The endotopism semigroups of an equivalence relation*, Sb. Math. **205** (2014), no. 5, 646–662.
12. Е. А. Тоичкина, *Полугруппы эндотопизмов эффективных связных отношений*, Укр. мат. журн. **68** (2016), no. 3, 377–387; **English version:** E. A. Toichkina, *Semigroups of endotopisms of the efficient connected relations*, Ukr. Math. J. **68** (2016), no. 2, 422–432.
13. V. Fleischer and U. Knauer, *Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories*, Semigroups. Theory and Applications, Proc. Conf. Oberwolfach, 1986. Springer, Berlin, Lect. Notes Math. **1320** (1988), 84–96.

14. Ю. В. Жучок, *Полугруппы эндоморфизмов некоторых свободных произведений*, Фундамент. и прикл. матем. **17** (2012), no. 3, 51–60; **English version:** Yu. V. Zhuchok, *Endomorphism semigroups of some free products*, J. Math. Sci. **187** (2012), no. 2, 146–152.
15. K. Čulík, *Zur Theorie der Graphen*, Čas. Pěstování Mat. **83** (1958), no. 2, 133–155.
16. U. Knauer and M. Nieporte, *Endomorphisms of graphs I. The monoid of strong endomorphisms*, Arch. Math. **52** (1989), no. 6, 607–614.
17. Е. А. Бондарь, Ю. В. Жучок, *Полугруппы сильных эндоморфизмов бесконечных графов и гиперграфов*, Укр. мат. журнал **65** (2013), no. 6, 743–754; **English version:** E. A. Bondar' and Yu. V. Zhuchok, *Semigroups of strong endomorphisms of infinite graphs and hypergraphs*, Ukr. Math. J. **65** (2013), no. 6, 823–834.

Стаття: надійшла до редколегії 07.10.2017
доопрацьована 21.04.2018
прийнята до друку 24.04.2018

THE MONOID OF STRONG ENDOTOPISMS OF A SYMMETRIC RELATION

Olena TOICHKINA

Luhansk Taras Shevchenko National University,
Gogol Square, 1, 92703, Starobilsk, Ukraine
e-mail: toichkina.e@gmail.com

In this paper we define a class of symmetric relations on an arbitrary set and prove that the monoid of all strong endotopisms of an arbitrary symmetric relation from a certain class is isomorphic to the wreath product of a monoid of all strong endomorphisms of a canonical strong quotient and a small category.

Key words: semigroup, monoid, symmetric relation, endotopism, strong endotopism, wreath product, generalized lexicographic product.