ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 84. С. 38–46
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 84. P. 38–46

УДК 512.546

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗА МАРКОВИМ НАБОРІВ ТИХОНОВСЬКИХ ПРОСТОРІВ 1: ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ

Назар Пирч

Українська Академія Друкарства,
вул. Підголоско, 19, м. Львів, 79020
e-mail: pnazar@ukr.net

Розглянуто загальні властивості та методи побудови наборів тихоновських просторів, які з точністю до топологічних ізоморфізму не відрізняються деякими функторами топологічної алгебри.

Ключові слова: вільна топологічна група, ізоморфізм вільних груп, сім'я топологічних просторів, відносні топологічні властивості.

1. Вступ. Теорія M-еквівалентних просторів, або просторів з топологічно ізоморфними вільними топологічними групами, бере свій початок з праці М. І. Граєва [1]. Значний вклад у розвиток теорії М-еквівалентних просторів зробили такі математики: А. В. Архангельский, В. Г. Пєстов, В. В. Ткачук, Я. Баарс, О. Г. Окунєв. Зокрема, у праці О. Г. Окунєва [2] було введено поняття М-еквівалентних відображень. У [3] вивчали поняття М-еквівалентності пар. Ми розвиваємо та узагальнюємо поняття М-еквівалентності пар і вводимо поняття М-еквівалентності наборів тихоновських просторів, яке є також розвитком ідей О. Г. Окунєва (теорема 3.9 з [2]). Ми з'ясовуємо деякі загальні властивості цього відношення та методи побудови еквівалентних наборів.

Нехай X — тихоновський простір. Через $F(X)$ будемо позначати вільну топологічну групу простору X у сенсі Маркова, через $A(X)$ — вільну абелеву топологічну групу простору X у сенсі Маркова, через $L(X)$ — вільний локально-опуклий простір над X. Для топологічного простору X через X^+ позначатимемо простір отриманий з простору X додаванням однієї ізольованої точки. Через $\bigoplus\limits_{i\in I} X_i$ будемо позначати топологічну суму сім'ї підпросторів $(X_i)_{i\in I}$.

Означення 1 ([1]). *Топологічні простори X та Y називаються:*

- M-еквівалентними *(позначатимемо $X \overset{M}{\sim} Y$), якщо вільні топологічні групи $F(X)$ і $F(Y)$ є топологічно ізоморфними;*

2010 Mathematics Subject Classification: 22A05

- A-еквівалентними *(позначатимемо* $X \overset{A}{\sim} Y$*), якщо вільні абелеві топологічні групи* $A(X)$ *і* $A(Y)$ *є топологічно ізоморфними;*
- L-еквівалентними *(позначатимемо* $X \overset{L}{\sim} Y$*), якщо вільні локально опуклі простори* $L(X)$ *і* $L(Y)$ *є лінійно гомеоморфними.*

Під *парою топологічних просторів* (X, Y) будемо розуміти топологічний простір X і його підпростір Y. Для підпростору Y топологічного простору X позначимо через $G(Y; X)$ (або скорочено $G(Y)$) групову оболонку множини Y у $F(X)$.

Означення 2 ([3])**.** Пара топологічних просторів (X, X_1) називається M-еквівалентною *парі топологічних просторів* (Y, Y_1)*, якщо існує топологічний ізоморфізм* $f\colon F(X) \to F(Y)$ *такий, що* $f(G(X, X_1)) = G(Y, Y_1)$.

Означення 3. Нехай $(X_i)_{i\in I}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $(Y_i)_{i\in I}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y. Скажемо, що сім'я $(X, (X_i)_{i\in I})$ є M-еквівалентною сім'ї $(Y, (Y_i)_{i\in I})$, якщо існує топологічний ізоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $h(X_i) \subseteq G(Y_i)$ і $h^{-1}(Y_i) \subseteq G(X_i)$ для всіх $i \in I$. Позначатимемо це так: $(X, (X_i)_{i\in I}) \overset{M}{\sim} (Y, (Y_i)_{i\in I})$.

Міняючи в цьому означенні функтор вільної топологічної групи на функтори вільної абелевої топологічної групи та вільного локально опуклого простору, отримаємо поняття A-еквівалентних і L-еквівалентних наборів.

2. M-еквівалентність наборів тихоновських просторів. Для підпростору A топологічного простору X позначимо через $\overline{A}$ замикання підпростору A в X.

Теорема 1. *Нехай* $(X, (X_i)_{i\in I}) \overset{M}{\sim} (Y, (Y_i)_{i\in I})$*. Тоді* $(X, (\overline{X_i})_{i\in I}) \overset{M}{\sim} (Y, (\overline{Y_i})_{i\in I})$.

Доведення. Оскільки множина $\overline{X_i}$ замкнена в X, то її групова оболонка $G(\overline{X_i})$ замкнена в $F(X)$ (див. твердження 7.14 з [5]). Множина $G(\overline{X_i})$ замкнена в $G = F(X) = F(Y)$ і містить Y_i, отже, вона містить $\overline{Y_i}$ і оскільки $G(\overline{X_i})$ є підгрупою, то вона містить $G(\overline{Y_i})$. Аналогічно доводимо, що $G(\overline{X_i}) \subseteq G(\overline{Y_i})$. Отже, $G(\overline{X_i}) = G(\overline{Y_i})$. Отож,

$$(X, (\overline{X_i})_{i\in I}) \overset{M}{\sim} (Y, (\overline{Y_i})_{i\in I}).$$

□

Твердження 1. *Нехай* $(X, (X_i)_{i\in I}) \overset{M}{\sim} (Y, (Y_i)_{i\in I})$, $J \subseteq I$, $A = \bigcap\limits_{i\in J} X_i$, $B = \bigcap\limits_{i\in J} Y_i$, $C = \bigcup\limits_{i\in J} X_i$, $D = \bigcup\limits_{i\in J} Y_i$*. Тоді:*

(1) $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$*;*

(2) $(X, C) \overset{M}{\sim} (Y, D)$.

Доведення. (1) Нехай $h\colon F(X) \to F(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $h(G(X_i)) = G(Y_i)$ для всіх $i \in I$. Нехай $x \in A$, тоді $x \in X_i$ для всіх $i \in J$, а тому $h(x) \in h(X_i) \subseteq G(Y_i)$ для всіх $i \in J$. Отже, $h(x) \in \bigcap\limits_{i\in J} G(Y_i) = G(B)$.

(2) Нехай $x \in C$, тоді існує $i \in J$ таке, що $x \in X_i$, а тому

$$h(x) \in h(X_i) \subseteq G(Y_i) \subseteq G(D).$$

Аналогічно доводиться, що $h^{-1}(y) \in G(C)$ для всіх $y \in D$. □

З теореми 1 і твердження 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай* $(X, X_1, X_2) \overset{M}{\sim} (Y, Y_1, Y_2)$ *і множини* X_1 *та* X_2 *мають диз'юнктні замикання. Тоді множини* Y_1 *та* Y_2 *мають також диз'юнктні замикання.*

Твердження 2. *Нехай*

$$(X, (X_i)_{i\in I}) \overset{M}{\sim} (Y, (Y_i)_{i\in I}) \qquad \text{та} \qquad (Z, \{Z_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (K, \{K_i : i \in I\}).$$

Тоді $(X \oplus Z, (X_i \oplus Z_i)_{i\in I}) \overset{M}{\sim} (Y \oplus K, (Y_i \oplus K_i)_{i\in I})$.

Доведення. Нехай $h_1 : F(X) \to F(Y)$, $h_2 : F(Z) \to F(K)$ — топологічні ізоморфізми. Розглянемо відображення $h : X\oplus Z \to F(Y\oplus K)$ означене як $h(v) = h_1(v)$, якщо $v \in X$ і $h(v) = h_2(v)$, якщо $v \in Z$. Підгрупа топологічної групи $F(Y \oplus K)$ породжена множиною Y є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі $F(Y_s)$, отже, відображення h є неперервним. Аналогічно розглянемо відображення $g : Y \oplus K \to F(X \oplus Z)$ означене як $g(v) = g_1(v)$, якщо $v \in Y$ і $g(v) = g_2(v)$, якщо $v \in P$. Тоді продовження $h^* : F(X \oplus Z) \to F(Y \oplus K)$, $g^* : F(Y \oplus K) \to F(X \oplus Z)$ є взаємно оберненими неперервними гомоморфізмами, тобто гомоморфізм i є топологічним ізоморфізмом. За побудовою $h(X_i) \subseteq G(Y_i)$, $h(Z_i) \subseteq G(P_i)$, звідки $h(X_i \oplus Z_i) \subseteq G(Y_i \oplus K_i)$, для всіх $i \in I$. Аналогічно $g(Y_i) \subseteq G(X_i)$, $g(K_i) \subseteq G(Z_i)$, звідки $h(Y_i \oplus K_i) \subseteq G(X_i \oplus Z_i)$, для всіх $i \in I$. Отже, $(X \oplus Z, (X_i \oplus Z_i)_{i\in I}) \overset{M}{\sim} (Y \oplus K, (Y_i \oplus K_i)_{i\in I})$. □

Твердження 2 легко переноситься на випадок довільної кількості доданків.

Теорема 2. *Нехай* $(X, (X_i)_{i\in I}) \overset{M}{\sim} (Y, (Y_i)_{i\in I})$*, а простір* Z *такий, що виконано принаймні одну з двох умов:*

(1) *простір* Z *є локально компактним;*
(2) *простір* $(X \oplus Y) \times Z$ *є* k*-простором.*

Тоді $(X \times Z, (X_i \times Z)_{i\in I}) \overset{M}{\sim} (Y \times Z, (Y_i \times Z)_{i\in I})$.

Доведення. Нехай $h : F(X) \to F(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $h(G(A_i)) \subseteq G(B_i)$. Означимо топологічний ізоморфізм $h_1 : F(X \times Z) \to F(Y \times Z)$ методом, описаним у твердженні 1.1 [2]. Нехай $x \in X$ і $h(x) = y_1^{\varepsilon_1} y_2^{\varepsilon_2} \dots y_n^{\varepsilon_n}$. Розглянемо відображення $t : X \times Z \to F(Y \times Z)$, прийнявши $t(x, z) = (y_1, z)^{\varepsilon_1} (y_2, z)^{\varepsilon_2} \dots (y_n, z)^{\varepsilon_n}$. Якщо виконано принаймні одну з двох умов (1) або (2), то відображення t буде неперервним. Продовжимо відображення t до неперервного гомоморфізму вільних топологічних груп $T : F(X \times Z) \to F(Y \times Z)$. Аналогічно можна побудувати неперервний гомоморфізм, обернений до T, тобто T — топологічний ізоморфізм [2]. За побудовою $T(X_i \times Z) \subseteq G(Y_i \times Z)$ і $T^{-1}(Y_i \times Z) \subseteq G(X_i \times Z)$. Отже, $(X \times Z, (X_i \times Z)_{i\in I}) \overset{M}{\sim} (Y \times Z, (Y_i \times Z)_{i\in I})$. □

Твердження 3. *Нехай* $(X, (X_i)_{i\in I}) \overset{M}{\sim} (Y, (Y_i)_{i\in I})$*, а простір* $(X \oplus Y)^n$ *є* k*-простором. Тоді* $((X^n, (X_i^n)_{i\in I}) \overset{M}{\sim} ((Y^n, Y_i^n)_{i\in I})$.

Доведення. З того, що $(X \oplus Y)^n$ є k-простором, випливає, що простір $X^m \times Y^{n-m}$ є k-простором для всіх $m = 0, \dots, n$. Тому за твердженням 2

$$(X^m \times Y^{n-m}, \{X_i^m \times Y_i^{n-m} : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (X^{m+1} \times Y^{n-m-1}, \{X_i^{m+1} \times Y_i^{n-m-1} : i \in I\})$$

для всіх $m = 0, \dots, n-1$. Тобто,

$$(X^n, (X_i^n)_{i\in I}) \overset{M}{\sim} (X^{n-1} \times Y, (X_i^{n-1} \times Y_i)_{i\in I}) \overset{M}{\sim}$$

$$(X^{n-2} \times Y^2, (X_i^{n-2} \times Y_i^2)_{i\in I}) \overset{M}{\sim} \dots \overset{M}{\sim} (Y^n, \{Y_i^n : i \in I\}).$$

□

Теорема 3. *Нехай $(X, \{A_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{B_i : i \in I\})$ і нехай $h\colon F(X) \to F(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $h(G(A_i)) = G(B_i)$. Припустимо, що існують неперервні відображення $f\colon X \to X_1$, $g\colon Y \to Y_1$ і топологічний ізоморфізм $j\colon F(X_1) \to F(Y_1)$ такий, що $j \circ f^* = g^* \circ h$, де $f^*\colon F(X) \to F(X_1)$ і $g^*\colon F(Y) \to F(Y_1)$ — гомоморфізми, що продовжують відображення f і g. Тоді*

$$(X_1, \{C_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y_1, \{D_i : i \in I\}),$$

де $C_i = f(A_1)$ і $D_i = g(Y_i)$.

Доведення. Щоб довести лему, достатньо з'ясувати, що $j(A_i) \subset G(B_i)$ для всіх $i \in I$. Нехай $x \in A_i$, $v \in f^{-1}(x)$. Тоді $j(x) = g^* \circ h(v)$. Оскільки $v \in A_i$, то $i(v) \in G(B_i)$, отже, $j(x) = g^* \circ i(v) \in G(B_i)$. Аналогічно доводиться, що $j^{-1}(B_i) \subset G(A_i)$. □

Відображення f і g розглянуті у теоремі 3 називають M-еквівалентними. Якщо замість функтора вільної топологічної групи розглянути функтор вільної абелевої топологічної групи, то отримаємо означення A-еквівалентних відображень.

Твердження 4. *Нехай $(X_s)_{s\in S}$, $(Y_s)_{s\in S}$ — дві сім'ї топологічних просторів таких, що $X_s \overset{M}{\sim} Y_s$ для всіх $s \in S$. Нехай також $(Q_i)_{i\in I}$ — довільна сім'я підмножин в S, $X = \bigoplus\limits_{s\in S} X_s$, $Y = \bigoplus\limits_{s\in S} Y_s$, $Z_i = \bigoplus\limits_{s\in Q_i} X_s$ і $P_i = \bigoplus\limits_{s\in Q_i} Y_s$. Тоді:*

1) $(X, \{X_s : i \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$;
2) $(X, \{Z_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{P_i : i \in I\})$.

Доведення. Нехай $h_s\colon F(X_s) \to F(Y_s)$ — топологічні ізоморфізми. Розглянемо відображення $h\colon \bigoplus\limits_{s\in S} X_s \to F(\bigoplus\limits_{s\in S} Y_s)$, означене як $h(x) = h_s(x)$, якщо $x \in X_s$. Оскільки підпростір Y_s є P-вкладеним у $\bigoplus\limits_{s\in S} Y_s$, то підгрупа топологічної групи $F(\bigoplus\limits_{s\in S} Y_s)$ породжена множиною Y_s є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі. Як з'ясовано у [5], продовження відображення h до гомоморфізму вільних топологічних груп є топологічним ізоморфізмом. Тому відображення h є неперервним. За побудовою $h(X_s) \subseteq G(Y_s)$, $h^{-1}(Y_s) \subseteq G(X_s)$, $h(Z_i) \subseteq G(P_i)$, $h^{-1}(P_i) \subseteq G(Z_i)$. □

Скажемо, що простори X та Y перебувають у відношенні M^*, якщо $(X, \{a\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{b\})$ для деяких $a \in X$, $b \in Y$. Очевидно, $(X, \{x_1\}) \overset{M}{\sim} (X, \{x_2\})$ для довільних

$x_1, x_2 \in X$ (відповідний ізоморфізм задається як продовження відображення $i(x) = x_1 x^{-1} x_2$). Нехай $a_1 \in X$, $b_1 \in Y$ — довільні точки. Тоді

$$(X, \{a_1\}) \overset{M}{\sim} (X, \{a\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{b\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{b_1\}).$$

Отож, відношення M^* є рефлексивним, симетричним і транзитивним відношенням на множині тихоновських просторів. Назвемо його відношенням M^*-еквівалентності. Аналогічно можемо означити відношення A^*-еквівалентності та L^*-еквівалентності. Відношення M^*-еквівалентності на множині тихоновських просторів є сильнішим за відношення M-еквівалентності. Зауважимо, що на підставі теореми 2.1 з [6] у випадку абелевих груп і вільних локальних опуклих просторів відношення A-еквівалентності збігається з відповідним відношенням A^*-еквівалентності, а відношення L-еквівалентності збігається з відповідним відношенням L^*-еквівалентності. Нехай $\{X_s\}_{s\in S}$ — сім'я просторів з відміченими точками $x_s \in X_s$. Тоді фактор-простір $\bigvee_{s\in S}(X_s, x_s) = \bigoplus_{s\in S} X_s / \bigoplus_{s\in S} x_s$ буде називатися букетом сім'ї (X_s, x_s).

Твердження 5. *Нехай $(X_s, x_s)_{s\in S}$, $(Y_s, y_s)_{s\in S}$ — дві сім'ї топологічних просторів такі, що $X_s \overset{M^*}{\sim} Y_s$ для всіх $s \in S$. Нехай також $\{Q_i : i \in I\}$ — довільна сім'я підмножин в S, $X = \bigvee\limits_{s\in S}(X_s, x_s)$, $Y = \bigvee\limits_{s\in S}(Y_s, y_s)$, $Z_i = \bigvee\limits_{s\in Q_i}(X_s, x_s)$ і $P_i = \bigvee\limits_{s\in Q_i}(Y_s, y_s)$. Тоді :*

1) $(X, \{X_s : i \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$;
2) $(X, \{Z_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{P_i : i \in I\})$.

Доведення. Нехай $h_s \colon F(X_s) \to F(Y_s)$ — топологічні ізоморфізми такі, що $h(x_s) = y_s$ для всіх $s \in S$. Розглянемо відображення $h \colon \bigvee\limits_{s\in S} X_s \to F(\bigvee\limits_{s\in S} Y_s)$ означене як $h(x) = h_s(x)$, якщо $x \in X_s$ та відображення $g \colon \bigvee\limits_{s\in S} Y_s \to F(\bigvee\limits_{s\in S} X_s)$ означене як $g(x) = h_s^{-1}(x)$, якщо $x \in X_s$. Оскільки підпростір Y_s є ретрактом у $\bigvee\limits_{s\in S} Y_s$, то підгрупа топологічної групи $F(\bigvee\limits_{s\in S} Y_s)$ породжена множиною Y_s є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі $F(Y_s)$, тому відображення h і g — коректно означені та неперервні. Продовжимо відображення h та g до неперервних гомоморфізмів $h^* \colon F(\bigvee\limits_{s\in S} X_s) \to F(\bigvee\limits_{s\in S} Y_s)$, $g^* \colon F(\bigvee\limits_{s\in S} Y_s) \to F(\bigvee\limits_{s\in S} X_s)$ Нехай $x \in X_s$. Тоді $g^* \circ h^*(x) = g^* \circ h_s(x) = g_s \circ h_s(x) = x$. Тобто, $g^* \circ h^*|_X = 1_X$. Отже, $g^* \circ h^* = 1_{F(X)}$. Аналогічно перевіряється, що $h^* \circ g^* = 1_{F(Y)}$, тобто, гомоморфізм h_* є топологічним ізоморфізмом. За побудовою $h(X_s) \subseteq G(Y_s)$, $h^{-1}(Y_s) \subseteq G(X_s)$, $h(Z_i) \subseteq G(P_i)$, $h^{-1}(P_i) \subseteq G(Z_i)$. □

Твердження 6. *З того, що $(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$ випливає*

$$(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{A}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\}),$$

а з $(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{A}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$ випливає $(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{L}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$.

Доведення. Нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $i(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$. Для топологічного ізоморфізму $i\colon F(X) \to F(Y)$ існує топологічний ізоморфізм $i_A\colon A(X) \to A(Y)$ такий, що $i_A \circ p_x = p_y \circ i$, де $p_x\colon F(X) \to A(X)$, $p_y\colon F(Y) \to A(Y)$ — гомоморфізми, що продовжують тотожні відображення задані, відповідно, на X та Y. Доведемо, що $i_A(G_a(X_s)) = G_a(Y_s)$, де через $G_a(X_s)$ позначимо групову оболонку множини X_s у вільній абелевій топологічній групі простору X, через $G_a(Y_s)$ — позначимо групову оболонку множини Y_s у вільній абелевій топологічній групі простору Y. Нехай $x \in X_s$, тоді $i_a(x) = p_x(i(x)) \in G_a(Y_s)$, оскільки $i(x) \in G(Y_s)$. Аналогічно доводиться, що $i_a^{-1}(Y_s) \in G_{X_s}(A)$, тобто $(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{A}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$. Нехай тепер $(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{A}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$, а $i\colon A(X) \to A(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $i(G_a(X_s)) = G_a(Y_s)$. Вільна абелева топологічна група $A(X)$ природно вкладається у вільний локально опуклий простір $L(X)$ у як підгрупа з цілими коефіцієнтами [7]. Позначимо через $t_x\colon A(X) \to L(X)$, $t_y\colon A(Y) \to L(Y)$ відповідні вкладення. Тоді існує лінійний гомеоморфізм $i_L\colon L(X) \to L(Y)$ такий, що $i_L \circ t_x = t_y \circ i$. Доведемо, що $i_L(G_L(X_s)) = G_L(Y_s)$, де через $G_L(A)$ позначимо лінійну оболонку множини A у вільному локально опуклому просторі топологічного простору X, через $G_L(Y_s)$ — позначимо лінійну оболонку множини B у вільному локально опуклому просторі топологічного простору Y. Нехай $x \in X_s$, тоді $i_L(x) = p_x(i(x)) \in G_L(Y_s)$, оскільки $i(x) \in G_a(Y_s)$. Аналогічно доводиться, що $i_L^{-1}(Y_s) \in G_L(X_s)$, тобто $(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{L}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$. □

Твердження 7. *Нехай* $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$ *і простір* $(X \oplus Y)^n$ *є* k*-простором. Тоді*

$$(X^n, A \times X^{n-1}, A^2 \times X^{n-2} \dots A^n) \overset{M}{\sim} (Y^n, B \times Y^{n-1}, B^2 \times Y^{n-2} \dots B^n).$$

Доведення. Нехай $h\colon F(X) \to F(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $h(G(A)) = G(B)$. Методом, описаним у твердженні з [2], можна "продовжити" ізоморфізм h до ізоморфізму $h_n\colon F(X^n) \to F(Y^n)$. За побудовою $h_n(X^k \times A^{n-k}) \subseteq G(Y^k \times B^{n-k})$. □

3. Конструкції для побудови еквівалентних наборів.

Твердження 8. *Нехай* $X \overset{M^*}{\sim} Y$, *топологічний простір* $(X \oplus Y)^n$ *є* k*-простором,* $x_1, x_2, \dots x_n \in X$ *і* $y_1, y_2, \dots y_n \in Y$. *Тоді набори*

$$(X^n, \{x_1\} \times X^{n-1}, \{x_1\} \times \{x_2\} \times X^{n-2}, \dots, \{x_1\} \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_n\})$$

та

$$(Y^n, \{y_1\} \times Y^{n-1}, \{y_1\} \times \{y_2\} \times Y^{n-2}, \dots, \{y_1\} \times \{y_2\} \times \dots \times \{y_n\})$$

є M*-еквівалентними.*

Доведення. Для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$ існує топологічний ізоморфізм $h_i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $h_i(x_i) = y_i$. Методом описаним у [2] "продовжимо" сім'ю ізоморфізмів $\{h_i\}$ до топологічного ізоморфізму $h\colon F(X^n) \to F(Y^n)$. За побудовою

$$h(\{x_1\} \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_i\} \times X^{n-i}) \subseteq G(\{y_1\} \times \{y_2\} \times \dots \times \{y_i\} \times Y^{n-i})$$

і

$$h^{-1}(\{y_1\} \times \{y_2\} \times \dots \times \{y_i\} \times Y^{n-i}) \subseteq G(\{x_1\} \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_i\} \times X^{n-i}).$$

□

Для топологічного простору позначимо через $S(X) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} X^n$ вільну топологічну напівгрупу простору X. З тверджень 2 і 3 випливають такі наслідки.

Твердження 9. *Якщо* $(X, (X_s)_{s\in S}) \overset{M}{\sim} (Y, (Y_s)_{s\in S})$ *і простір* $S(X \oplus Y)$ *є* k*-простором, то* $(S(X), (S(X_s))_{s\in S}) \overset{M}{\sim} (S(Y), (S(Y_s))_{s\in S})$.

Твердження 10. *Якщо* $(X, (X_s)_{s\in S}) \overset{M}{\sim} (Y, (Y_s)_{s\in S})$ *і простір* $S(X \oplus Y)$ *є* k*-простором, то* $(S(X), (X^n)_{n\in\mathbb{N}}) \overset{M}{\sim} (S(Y), (Y^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Твердження 11. *Нехай* $(X, (X_s)_{s\in S}) \overset{A}{\sim} (Y, (Y_s)_{s\in S})$ *і топологічний простір* $(X \oplus Y)^n$ *є* k*-простором, то* $(SP^n_G X, (SP^n_G X_s)_{s\in S}) \overset{A}{\sim} (SP^n_G Y, (SP^n_G Y_s)_{s\in S})$.

Доведення. Як з'ясували у [6], фактор-відображення $p_x \colon X^n \to SP^n_G X$ і $p_y \colon Y^n \to SP^n_G Y$ є A-еквівалентними, тому за твердженням 3 матимемо, що

$$(SP^n_G X, (SP^n_G X_s)_{s\in S}) \overset{A}{\sim} (SP^n_G Y, (SP^n_G Y_s)_{s\in S}).$$

□

Для топологічного простору позначимо через $S_A(X) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} SP^n X$ вільну топологічну напівгрупу над простором X. З тверджень 2 і 11 випливають такі наслідки.

Твердження 12. *Якщо* $(X, (X_s)_{s\in S}) \overset{A}{\sim} (Y, (Y_s)_{s\in S})$ *і простір* $S(X \oplus Y)$ *є* k*-простором, то* $(S_A(X), (S_A(X_s))_{s\in S}) \overset{M}{\sim} (S_A(Y), (S_A(Y_s))_{s\in S})$.

Твердження 13. *Якщо* $(X, (X_s)_{s\in S}) \overset{A}{\sim} (Y, (Y_s)_{s\in S})$ *і простір* $S(X \oplus Y)$ *є* k*-простором, то* $(S_A(X), \{SP^n X : n \in \mathbb{N}\}) \overset{A}{\sim} (S_A(Y), \{SP^n Y : n \in \mathbb{N}\})$.

Для тихоновського простору X позначимо через μX поповнення за Дьєдонне тихоновського простору X. Для топологічної групи G позначимо через wG поповнення за Вейлем топологічної групи G.

Теорема 4. *Нехай* $(X, (X_s)_{s\in S}) \overset{M}{\sim} (Y, (Y_s)_{s\in S})$. *Тоді* $(\mu X, (X_s)_{s\in S}) \overset{M}{\sim} (\mu Y, (Y_s)_{s\in S})$

Доведення. Нехай $i \colon F(X) \to F(Y)$ — ізоморфізм такий, що $i(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$. Ізоморфізм i можна продовжити до ізоморфізму $j \colon wF(X) \to wF(Y)$ такого, що $j|_{F(X)} = i$. Оскільки функтори $w \circ F$ та $F \circ \mu$ — природно еквівалентні [8], то ізоморфізм j можна розглядати як ізоморфізм $j \colon F(\mu X) \to F(\mu Y)$ і $j(G(X_s)) = i(G(X_s) = G(Y_s)$. □

Для вільних абелевих топологічних груп твердження аналогічне до твердження 9 випливає з результатів [9].

Теорема 5. *Нехай* $(X, X_1, X_2) \overset{M}{\sim} (Y, Y_1, Y_2)$ *і для підмножин* X_1 *та* X_2 *в* X *виконується одна з таких властивостей:*

(1) *існує відкрита множина* U*, що містить одну з двох множин* X_1 *або* X_2 *і не перетинає іншу;*

(2) *існують відкриті множини* U_1, U_2 *такі, що* $X_1 \subseteq U_1$, $X_2 \subseteq U_2$, $U_1 \cap X_2 = \varnothing$, $U_2 \cap X_1 = \varnothing$;

(3) *існують відкриті множини* U_1, U_2 *такі, що* $X_1 \subseteq U_1$, $X_2 \subseteq U_2$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Тоді відповідна властивість буде виконуватись для множин Y_1 *та* Y_2 *в* Y.

Доведення. Умова (1) еквівалентна умові $\overline{X_1} \cap X_2 = \varnothing \vee X_1 \cap \overline{X_2} = \varnothing$.

Умова (2) еквівалентна умові $\overline{X_1} \cap X_2 = \varnothing \wedge X_1 \cap \overline{X_2} = \varnothing$.

Умова (3) еквівалентна умові $\overline{X_1} \cap \overline{X_2} = \varnothing$.

Далі залишається застосувати теорему 1 і твердження 1. □

Твердження, яке аналогічне до твердження 5, можна сформулювати не тільки для двох, але для довільної сім'ї підмножин тихоновського простору.

Зауваження 1. У [3] і [10] вивчали ω-замкнені, секвенціально замкнені та b-замкнені підмножини у вільних топологічних групах. Твердження аналогічне до твердження 1 можна сформулювати для ω-замикання, секвенціального замикання та b-замикання.

Нехай $\mathbb{B}(X)$ — булеан множини X (або множина всіх підмножин множини X). З теореми 1 і твердження 1 випливає таке твердження.

Твердження 14. *Нехай* $F\colon \mathbb{B}(X)^S \to \mathbb{B}(X)$ — *деяка функція, яка є композицією операцій перетину, об'єднання та замикання. Якщо* $(X, (X_s)_{s\in S}) \overset{M}{\sim} (Y, (Y_s)_{s\in S})$, *то* $(X, F((X_s)_{s\in S})) \overset{M}{\sim} (Y, F((Y_s)_{s\in S}))$.

Теорема 6. *Нехай* $F_1, F_2\colon \mathbb{B}(X)^S \to \mathbb{B}(X)$ — *деякі функції, кожна з яких є композицією операцій перетину, об'єднання та замикання. Якщо* $(X, (X_s)_{s\in S}) \overset{M}{\sim} (Y, (Y_s)_{s\in S})$, *підпростір* $F_1(\{X_s : s \in S\})$ *є* P*-вкладеним у* X, *підпростір* $F_1(\{Y_s : s \in S\})$ *є* P*-вкладеним у* Y, *то*

$$F_1((X_s)_{s\in S})/(F_1((X_s)_{s\in S}) \cap F_2((X_s)_{s\in S}) \overset{M}{\sim} F_1((Y_s)_{s\in S})/(F_1((Y_s)_{s\in S}) \cap F_2((Y_s)_{s\in S}).$$

Доведення. За теоремою 1 і твердженням 1 існує топологічний ізоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що

$$h(\langle F_1((X_s)_{s\in S})\rangle) = \langle F_1((Y_s)_{s\in S})\rangle \quad \text{і} \quad h(\langle F_2(\{(X_s)_{s\in S})\rangle) = \langle F_2((Y_s)_{s\in S})\rangle.$$

З P-вкладеності підпросторів $F_1((X_s)_{s\in S})$ і $F_1((Y_s)_{s\in S})$ випливає, що звуження ізоморфізму h на підгрупу $\langle F_1((X_s)_{s\in S})\rangle$ є топологічним ізоморфізмом, таким, що

$$h(\langle F_1((X_s)_{s\in S}) \cap F_2((X_s)_{s\in S})\rangle) = \langle F_1((X_s)_{s\in S}) \cap F_2((X_s)_{s\in S})\rangle.$$

Тобто,

$$(F_1((X_s)_{s\in S}), F_1(\{X_s : s \in S\}) \cap F_2((X_s)_{s\in S})) \overset{M}{\sim}$$
$$\overset{M}{\sim} (F_1(\{Y_s : s \in S\}), F_1(\{Y_s : s \in S\}) \cap F_2(\{Y_s : s \in S\})),$$

звідки [4] матимемо, що

$$F_1((X_s)_{s\in S})/(F_1((X_s)_{s\in S}) \cap F_2((X_s)_{s\in S})) \overset{M}{\sim} F_1((Y_s)_{s\in S})/(F_1((Y_s)_{s\in S}) \cap F_2((Y_s)_{s\in S})).$$

□

Зауваження 2. Всі твердження цієї праці будуть справджуватись також для відношень A-еквівалентності та L-еквівалентності.

Список використаної літератури

1. М. И. Граев, *Свободные топологические группы*, Изв. АН СССР, Сер. мат. **12** (1948), no. 3, 279–324.
2. О. Г. Окунев, *M-эквивалентность произведений*, Тр. ММО **56** (1995), 192–205.
3. Н. М. Пирч, *M-еквівалентність пар*, Прикл. проблеми мат. мех. **2** (2004), 74–79.
4. Н. М. Пирч, *M-еквівалентність пар і відображень*, Мат. методи фіз.-мех. поля **49** (2006), no. 2, 21–26.
5. І. Й. Гуран, М. М. Зарічний, *Елементи теорії топологічних груп*, УМК ВО, Київ, 1991.
6. Н. М. Пирч, *Конструкції, що зберігають M-еквівалентність*, Вісник НУ Львівська політехніка, фіз.-мат. науки **625** (2008), 48–53.
7. C. E. McPhail, *The free abelian topological group as a subgroup of the free locally convex topological vector space*, J. Group Theory **6** (2003), 391–397.
8. O. V. Sipacheva, *Free topological groups of spaces and their subspaces*, Topology Appl. **101** (2000), 181–212.
9. М. Г. Ткаченко, *О полноте свободных абелевых топологических групп*, ДАН СССР. **269** (1983), 299–303.
10. D. Dikranjan and M. Tkachenko, *Weakly complete free topological groups*, Topology Appl. **112** (2001), 259–287.

Стаття: надійшла до редколегії 28.11.2017
доопрацьована 04.12.2017
прийнята до друку 24.04.2018

ON MARKOV EQUIVALENCE OF BUNDLES OF TYCHONOFF SPACES 1: GENERAL PROPERTIES

Nazar PYRCH

Ukrainian Academy of Printing,
Pidgolosko str., 19, 79020 Lviv, Ukraine
e-mail: pnazar@ukr.net

General properties and methods for constructing bundles equivalent by some functors of topological algebra are considered.

Key words: free topological group, isomorphism of the free groups, bundle of topological spaces, relative topological properties.