ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 85. С. 132–138
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 85. P. 132–138
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.85.132-138

УДК 519.217

НЕЛІНІЙНЕ НОРМУВАННЯ ІМПУЛЬСНОГО РЕКУРЕНТНОГО ПРОЦЕСУ В СХЕМІ АПРОКСИМАЦІЇ ЛЕВІ

Оксана Ярова

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000
e-mail: oksanayarova93@gmail.com

Розглянуто імпульсні рекурентні процеси з марковським перемиканням у схемі апроксимації Леві. Наша мета — знайти нелінійні параметри нормування для імпульсних процесів.

Ключові слова: імпульсний процес, апроксимація Леві, нелінійне нормування, марковське перемикання.

1. Вступ

Імпульсні рекурентні процеси розглядають у працях [1]–[7]. Проте, перемикаючий марковський процес досліджується в масштабі часу $\frac{t}{\varepsilon}$. Мета нашої праці: знайти нелінійні нормуючі множники, тому процеси розглядаються в нормуванні часу $\dfrac{t}{g_2(\varepsilon)}$, де $g_2(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Імпульсні процеси $\xi(t)$ в евклідовому просторі R^d з марковським або напівмарковським перемиканням визначаються за допомогою суми випадкових величин на вкладеному ланцюзі Маркова

$$\xi(t) = \xi_0 + \sum_{k=1}^{\nu(t)} \alpha_k(x_{k-1}), t \geqslant 0,$$

де $x(t)$ — перемикаючий марковський процес, якому відповідає вкладений марковський процес відновлення $(x_k, \tau_k), k \geqslant 0$, де $x_k = x(\tau_k)$ та рахуючий процес стрибків $\nu(t) = \max\{k \geqslant 0 : \tau_k \leqslant t\}$, $\alpha_k(x_{k-1})$ – сім'я випадкових величин.

2010 Mathematics Subject Classification: 60J25

2. Апроксимація Леві

Розглянемо імпульсний рекурентний процес в умовах апроксимації Леві з нелінійним нормуванням

$$\xi^{\varepsilon}(t) = \xi_0^{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{\nu\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)} \alpha_k^{\varepsilon}(x_{k-1}^{\varepsilon}), \qquad t \geqslant 0,$$

де $x^{\varepsilon}(t) = x\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)$ — перемикаючий марковський процес, якому відповідає вкладений марковський процес відновлення

$$(x_k^{\varepsilon}, \tau_k^{\varepsilon}), k \geqslant 0.$$

Тут $x_k = x(\tau_k)$, і рахуючий процес стрибків

$$\nu^{\varepsilon}(t) = \nu\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right).$$

Отож, τ_k^{ε} — моменти стрибків цього процесу, а

$$x_k^{\varepsilon} = x(\tau_k^{\varepsilon}),$$

$$\nu^{\varepsilon}(t) = max\{k \geqslant 0 : \tau_k^{\varepsilon} \leqslant t\}.$$

Розглянемо умови апроксимації Леві.

(L1) Апроксимація середніх

$$b_{\varepsilon}(u;x) = \int_{R^d} v\Gamma^{\varepsilon}(u, dv; x) = g_1(\varepsilon) b_1(u;x) + g_2(\varepsilon)(b(u;x) + \theta_b^{\varepsilon}(u;x))$$

та

$$c_{\varepsilon}(u;x) = \int_{R^d} vv^T\Gamma^{\varepsilon}(u, dv; x) = g_2(\varepsilon)(c(u;x) + \theta_c^{\varepsilon}(u;x)),$$

де v^T - транспонований вектор до вектора v,

$$g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon)), g_1(\varepsilon) \to 0, g_2(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Знехтувальні доданки

$$\mid \theta_b^{\varepsilon}(u;x) \mid \to 0, \mid \theta_c^{\varepsilon}(u;x) \mid \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

(L2) Ядро інтенсивностей має вигляд

$$\Gamma_q^{\varepsilon}(u;x) = \int_{R^d} q(v)\Gamma^{\varepsilon}(u, dv; x) = g_2(\varepsilon)(\Gamma_q(u;x) + \theta_q^{\varepsilon}(u;x))$$

для всіх

$$q \in C^3(R), u \in R$$

так, що

$$\mid \Gamma_q(u;x) \mid \leqslant K < \infty.$$

Ядро $\Gamma_q(u;x)$ визначається співвідношенням

$$\Gamma_q(u;x) = \int\limits_{R^d} q(v)\Gamma(u,dv;x).$$

(L3) Умова балансу [4]

$$\int\limits_E \rho(dx) b_1(u;x) = 0,$$

де $\rho(dx)$ задовольняє умову ергодичності зі стаціонарним розподілом $\pi(A), A{\in}E$,

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx),$$

$$q = 1/m, m = \int\limits_E \rho(dx)m(x),$$

$$\rho(B) = \int\limits_E \rho(dx)P(x,B), \rho(E) = 1.$$

(L4) Умови на початкові значення

$$\sup_{\varepsilon>0} E|\xi_0^\varepsilon| \leqslant C < \infty,$$

$$|\xi_0^\varepsilon| \to x(i_0),\ g_2(\varepsilon){\to}0,\ \varepsilon{\to}0.$$

(L5) Рівномірна квадратична інтегровність

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{x\in E} \int\limits_{v>c} vv^T\Gamma(u,dv;x) = 0.$$

(L6) Умова зростання. Існує додатна константа L така, що

$$|b(u;x)|{\leqslant}L(1+|u|, |c(u;x)|{\leqslant}L(1+|u|^2)$$

. Тоді для всіх дійснозначних невід'ємних функцій $f(v), v \in R$, таких, що

$$\int\limits_{R^d} (1+f(v))|v|^2 dv < \infty,$$

$$|\Lambda(u,v,x)|{\leqslant}Lf(v)(1+|u|).$$

Тут $|\Lambda(u,v,x)|$ — похідна Радона-Нікодима ядра $\Gamma(u,B;x)$ стосовно міри Лебега dv в R, тобто

$$\Gamma(u,dv;x) = \Lambda(u,v;x)dv.$$

(L7) Для довільного $r > 0$ існує константа l_r така, що

$$|\hat{b}(u) - \hat{b}(u')| + |\sigma^2(u) - \sigma^2(u')| + |\hat{\Gamma}(u,v) - \hat{\Gamma}(u',v)|{\leqslant}l_r|u-u'|,$$

якщо $\mid u \mid\leqslant r, \mid v \mid\leqslant r$.

Означення. Нехай реалізації випадкових процесів $\xi_n(t)$ і $\xi(t)$ належать деякому метричному простору. Тоді випадковий процес $\xi_n(t)$ *слабо збігається* до $\xi(t)$, якщо виконується умова

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)\mu_n(dx)=\int f(x)\mu(dx),$$

де μ_n та μ — міри випадкових процесів $\xi_n(t)$ та $\xi(t)$, відповідно, а $f(x)$ — функціонал, для якого виконується умова

$$Ef(\xi(t))=\int f(x)\mu(dx),$$

$f(\xi(t))$ — розподіл випадкового процесу $\xi(t)$.

Теорема. *За умов* **(L1)**-**(L6)** *справджується слабка збіжність*

$$\xi^{\varepsilon}(t)\Rightarrow\xi^0,\ g_2(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

Граничний процес ξ^0 *є процесом Леві та за умови* **(L7)** *визначається генератором*

$$\hat{L}\varphi(u)=(\hat{b}(u)-\hat{b_0}(u)+\hat{b_1}(u))\varphi'(u)+\frac{1}{2}\sigma^2(u)\varphi''(u)+\lambda(u)\int\limits_R(\varphi(u+v)-\varphi(u))\Gamma^0(u,dv),$$

де

$$\hat{b_1}(u,x)=q(x)\int\limits_E P(x,dy)b_1(u;y),\Gamma(u,dv)=q\int\limits_E\rho(dx)\Gamma(u,x;dv),$$

$$\sigma^2(u)=2q\int\limits_E\rho(dx)(\hat{b_1}(u;x)R_0b_1^*(u;x)+\frac{1}{2}(\widehat{c(u;x)}-c_0(u;x))),\qquad\sigma^2(u)>0,$$

$$\lambda(u)=q\Gamma(u,R),\Gamma^0(u;dv)=\frac{\Gamma(u;dv)}{\Gamma(u;r)}.$$

Доведення. В основу доведення покладено семімартингальне зображення процесу.

Передбачувальні характеристики семімартингалу мають такий вигляд:

$$B^{\varepsilon}(t)=\sum_{k=1}^{v\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)}b_{\varepsilon}(\xi_{k-1}^{\varepsilon};x_{k-1}^{\varepsilon})=$$

$$=g_1(\varepsilon)\sum_{k=1}^{v\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)}b_1(\xi_{k-1}^{\varepsilon};x_{k-1}^{\varepsilon})+g_2(\varepsilon)\sum_{k=1}^{v\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)}b_1(\xi_{k-1}^{\varepsilon};x_{k-1}^{\varepsilon})+\theta_b^{\varepsilon},$$

$$C^{\varepsilon}(t)=\sum_{k=1}^{v\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)}c_{\varepsilon}(\xi_{k-1}^{\varepsilon};x_{k-1}^{\varepsilon})=g_2(\varepsilon)\sum_{k=1}^{v\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)}c(\xi_{k-1}^{\varepsilon};x_{k-1}^{\varepsilon})+\theta_c^{\varepsilon},$$

$$\Gamma^\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{v\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)} \int_R q(v)\Gamma^\varepsilon(\xi^\varepsilon_{k-1}, dv; x^\varepsilon_{k-1}) =$$

$$= g_2(\varepsilon) \sum_{k=1}^{v\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right)} \int_R q(v)\Gamma(\xi^\varepsilon_{k-1}, dv; x^\varepsilon_{k-1}) + \theta^\varepsilon_q,$$

де

$$\sup_{x\in E} |\theta^\varepsilon| \to 0, \quad g_1(\varepsilon), \quad g_2(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Позначимо через $A^\varepsilon(t)$ основну частину будь-якої з передбачувальних характеристик.

Розглянемо трикомпонентний марковський процес $A^\varepsilon(t), \xi^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t)$. Цей процес характеризується мартингалом

$$\mu^\varepsilon(t) = \varphi(\xi^\varepsilon(t), A^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t)) - \int_0^t L^\varepsilon \varphi(\xi^\varepsilon(s), A^\varepsilon(s), x^\varepsilon(s))ds,$$

де генератор L^ε має вигляд

$$L^\varepsilon \varphi(u, v; x) = (g_2(\varepsilon))^{-1} Q\varphi(\cdot, \cdot; x) + Q_0 A^\varepsilon(u; x)\varphi(\cdot, v; x) + Q_0\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u, \cdot; x).$$

Тут Q — породжуюче ядро,

$$Q_0\varphi(\cdot, \cdot; x) = q(x) \int_E P(x, dy)\varphi(\cdot, \cdot; y),$$

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u, \cdot; \cdot) = (g_2(\varepsilon))^{-1} \int_R \Gamma^\varepsilon(u, x; dv)(\varphi(u + v) - \varphi(u)),$$

$$A^\varepsilon(u; x)\varphi(\cdot, v; \cdot) = (g_2(\varepsilon))^{-1}(\varphi(\cdot, v + g_2(\varepsilon)a(u; x); \cdot) - \varphi(\cdot, v; \cdot)).$$

Далі потрібно знайти зображення граничного оператора.

Подіємо генератором на тест-функції

$$\varphi^\varepsilon(u; x) = \varphi(u) + g_1(\varepsilon)\varphi_1(u; x) + g_2(\varepsilon)\varphi_2(u; x).$$

Отримаємо

$$L^\varepsilon \varphi^\varepsilon(u; x) = ((g_2(\varepsilon))^{-1} Q + Q_0\Gamma^\varepsilon(x))(\varphi(u) + g_1(\varepsilon)\varphi_1(u; x) + g_2(\varepsilon)\varphi_2(u; x)).$$

Запишемо асимптотичне зображення генератора

$$\begin{aligned}\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u) &= (((g_1(\varepsilon))_{-1} B_1(u; x) + \Gamma(u; x))\varphi(u) + \theta^\varepsilon = \\ &= (g_1(\varepsilon))^{-1} b_1(u; x)\varphi'(u) + (b(u; x) - b_0(u; x))\varphi'(u) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(c(u; x) - c_0(u; x))\varphi''(u) + \\ &\quad + \int_R (\varphi(u + v) - \varphi(u))\Gamma(u, dv; x) + \theta^\varepsilon,\end{aligned}$$

де

$$b_0(u;x) = \int_R v\Gamma(u,dv;x), \quad c_0(u;x) = \int_R vv^T\Gamma(u,dv;x).$$

Отримуємо задачу сингулярного збурення

$$Q\varphi(u) = 0,$$
$$Q\varphi_1(v;x) + Q_0 b_1(u;x)\varphi'(u) = 0,$$
$$Q\varphi_2(v;x) + Q_0 b_1(u;x)\varphi_1'(u;x) + Q_0\Gamma(u;x)\varphi(u) = \hat{L}\varphi(u).$$

Застосувавши умови **(L3)** та **(L7)** остаточно отримаємо граничний генератор

$$\hat{L}\varphi(u) = (\hat{b}(u) - \hat{b_0}(u) + \hat{b_1}(u))\varphi'(u) + \frac{1}{2}\sigma^2(u)\varphi''(u) + \lambda(u)\int_R (\varphi(u+v) - \varphi(u))\Gamma^0(u,dv).$$

Теорему доведено. □

Отож, знайдено граничний генератор імпульсного рекурентного процесу з нелінійним нормуванням.

Список використаної літератури

1. В. С. Королюк *Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии*, Доповіді НАН України (2010). no. 6, 22–26.
2. H. Chernoff, *Measure of asymptotical efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations*, Ann. Math. Stat. **23** (1952), no 4, 493–655. DOI: 10.1214/aoms/1177729330
3. J. Feng and T. G. Kurtz, *Large deviation for stochastic processes*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. **131**, American Mathematical Society, R.I., 2006.
4. V. S. Koroliuk and N. Limnios, *Stochastic systems in merging phase space*, World Scientific Publishing Company, Singapure, 2005. DOI: 10.1142/5979
5. В. С. Королюк, А. Ф. Турбин, *Полумарковские процессы и их приложения*, Наукова думка, Київ, 1976.
6. В. С. Королюк, *Проблема великих відхилень для марковських випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії*, Укр. мат. журн. **62** (2010), no. 5, 643–650; **English version**: V. S. Korolyuk, *Problem of large deviations for Markov random evolutions with independent increments in the scheme of asymptotically small diffusion*, Ukr. Math. J. **62** (2010), no. 5, 739–747. DOI: 10.1007/s11253-010-0384-9
7. А. В. Свищук, *Решение мартингальной проблемы для полумарковских случайных эволюций*, Ин-т математики АН УССР, 1990, С. 102–111.

Стаття: надійшла до редколегії 06.11.2018
доопрацьована 08.02.2019
прийнята до друку 18.02.2019

NONLINEAR APPROXIMATIONTION FOR IMPULSE RECURRENT PROCESS IN THE SCHEME OF LEVI APPROXIMATION

Oksana YAROVA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, L'viv, 79000, Ukraine
e-mail: oksanayarova93@gmail.com

In this paper, impulsive recurrence processes with Markov switching in the Levy approximation scheme are considered. The purpose of the work is to find non-linear parameters of normalization for impulse processes.

Key words: impulse process, approximation of Levi, nonlinear normalization, Markov switching.