

УДК 004.932.2

PACS number(s): 03.67.Lx, 03.67.-a, 07.05.Pj

## КВАНТОВИЙ АЛГОРИТМ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ НА РАСТРОВИХ ЗОБРАЖЕННЯХ

**Б. Павлишенко**

*Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Драгоманова, 50, 79005 Львів, Україна  
e-mail: [pavlsh@yahoo.com](mailto:pavlsh@yahoo.com)*

Запропоновано квантовий алгоритм розпізнавання оптичних образів на растрових зображеннях, який реалізується на основі квантових логічних елементів Тофолі та оператора Гровера. Показано, що реалізація квантового алгоритму розпізнавання образів дає змогу порівняно із класичними алгоритмами експоненційно скоротити обсяг необхідної пам'яті та поліноміально зменшити час виконання алгоритму внаслідок реалізації квантового паралелізму.

*Ключові слова:* квантові обчислення, квантові логічні елементи, розпізнавання образів.

Одним із поширених методів розпізнавання оптичних образів на растрових зображеннях є використання цифрових двохвимірних фільтрів. Фільтри є ефективним механізмом пошуку простих шаблонів, оскільки чутливо реагують на елементи, схожі на сам фільтр [1]. Застосування фільтру полягає в алгоритмічній реалізації двохвимірної дискретної згортки:

$$R_{ij} = \sum_{u,v} H_{u,v} F_{i+u, j+v}, \quad (1)$$

де  $H_{ij}$  – елементи ядра фільтра,  $F_{ij}$  – елементи зображення,  $R_{ij}$  – елемент результуючого зображення. Згортку можна якісно розглядати як порівняння ядра фільтра з ділянкою зображення. У разі співпадіння ядра фільтра та елементів зображення в межах вікна фільтра, реакція на результуючому зображенні  $R_{ij}$  буде максимальною. Якщо ця реакція перевищує певну задану порогову величину, то алгоритм приймає рішення про наявність заданого шаблонного образу в точці з координатами  $(i,j)$  на аналізованому зображенні.

Останнім часом активно розвивається теорія квантових обчислень. Розроблено низку квантових алгоритмів, які суттєво пришвидшують розв'язок деяких задач унаслідок квантового паралелізму [2, 3]. Перспективним є використання квантових алгоритмів для побудови систем розпізнавання оптичних образів [4].

Розглянемо можливість представлення растрового зображення за допомогою регістру квантових бітів – кубітів. Для представлення деякого числа  $N$  достатньо

$n = \log_2 N$  кубітів. Матрицю для зображення розміром  $M \times N$  можна подати у вигляді системи двох квантових реєстрів

$$|x\rangle \otimes |y\rangle, \text{ де } |x\rangle = |x_1, x_2, \dots, x_m\rangle_m, |y\rangle = |y_1, y_2, \dots, y_n\rangle_n \quad (2)$$

Для визначеності та простоти подальших міркувань вважатимемо, що зображення є бінарним, тобто значення пікселів можуть набувати значень 0 (фон) та 1 (елемент зображення). Для відображення бінарного значення пікселів досить одного кубіта  $|f\rangle$ .

Тоді растрове зображення можна записати за допомогою такої системи кубітів

$$|\psi\rangle = |x_1, x_2, \dots, x_m\rangle_m \otimes |y_1, y_2, \dots, y_n\rangle_n \otimes |f\rangle \quad (3)$$

Для запису в квантову пам'ять зображення розміром  $M \times N$  достатньо  $n + m + 1 = \log_2(2 \cdot M \cdot N)$  кубітів. Наприклад, для збереження зображення розміром  $1024 \times 1024$  пікселів достатньо лише 21 кубіт. Така значна економія квантової пам'яті порівняно із класичною пам'яттю можлива внаслідок реалізації квантового паралелізму.

Запис зображення у квантову пам'ять розглянемо феноменологічно за допомогою оракула. В теорії квантових обчислень показано, що на основі однокубітних та двокубітних квантових унітарних вентилів можна побудувати еквівалентні алгоритми класичної машини Тюрінга. Під оракулом будемо розуміти певне формалізоване унітарне перетворення, за допомогою якого реалізуються наперед задані обчислення. Пікселі растрового зображення визначаються квантовими станами складеного реєстру кубітів (3). Суперпозиція цих станів утворює вектор в комплексному Гільбертовому просторі. Цей вектор є квантовим еквівалентним відображенням растрового зображення. Розглянемо послідовність квантового запису зображення. Кубіт  $|f\rangle$  візьмемо в початковому стані  $|0\rangle$ , а реєстри  $|x\rangle_m, |y\rangle_n$  в початкових станах  $|0\rangle^{\otimes m}$  та  $|0\rangle^{\otimes n}$ , відповідно. Застосуємо однокубітні унітарні перетворення Адамара до реєстрів  $|x\rangle_m \otimes |y\rangle_n$

$$|\psi\rangle = H^{\otimes m} \otimes H^{\otimes n} \otimes I(|x\rangle_m \otimes |y\rangle_n \otimes |f\rangle). \quad (4)$$

В результаті отримаємо

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{m+n}}} \sum_{i=0, j=0}^{M, N} |i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |0\rangle. \quad (5)$$

Суперпозиція  $|\psi\rangle$  містить базисні ортогональні стани, кожен з яких відповідає одному пікселю зображення. В процесі вимірювання відбувається редукція суперпозиції до одного базового стану, який відповідає одному пікселю. Отже, та кількість пам'яті, яка в класичному випадку необхідна для запису одного пікселя, в квантовому випадку є достатня для запису цілого зображення. Нехай бінарне значення пікселя описують деякою функцією  $f(x, y)$ , яка залежить від координат цього пікселя. Процес запису зображення в квантову пам'ять опишемо унітарним перетворенням  $U_F$ , яке визначається квантовим оракулом

$$U_F : |x\rangle_m \otimes |y\rangle_n \otimes |z\rangle \rightarrow |x\rangle_m \otimes |y\rangle_n \otimes |z \oplus f(x, y)\rangle, \quad (6)$$

де  $\oplus$  означає сумування за модулем 2. Враховуючи, що кубіт  $|f\rangle$  є в початковому стані  $|0\rangle$ , отримаємо

$$U_F : |x\rangle_m \otimes |y\rangle_n \otimes |0\rangle \rightarrow |x\rangle_m \otimes |y\rangle_n \otimes |f(x, y)\rangle. \quad (7)$$

Такі самі міркування можна використати для запису в квантову пам'ять ядра цифрового фільтра, який відповідає шаблону аналізованого оптичного образу.

Вважатимемо, що розмір растрового зображення та ядра фільтра є однаковим, таке припущення можна зробити, вважаючи, що під зображенням може розглядатись деяке вікно в заданому місці основного зображення. Змінюючи початок координат цього вікна, можна аналізувати заданий шаблон у різних точках початкового зображення. З метою аналізу заданого вікна на растровому зображенні з початком координат в точці  $(k, l)$  можна змістити координати пікселя в унітарному перетворенні квантового оракула

$$U_F : |x\rangle_m \otimes |y\rangle_n \otimes |0\rangle \rightarrow |x\rangle_m \otimes |y\rangle_n \otimes |f(x+k, y+l)\rangle. \quad (8)$$

Записати у квантову пам'ять ядро фільтра  $H$  можна за допомогою такого унітарного перетворення:

$$U_H : |x\rangle_m \otimes |y\rangle_n \otimes |0\rangle \rightarrow |x\rangle_m \otimes |y\rangle_n \otimes |h(x, y)\rangle. \quad (9)$$

Спільний запис вікна зображення та ядра фільтра розглянемо у вигляді

$$U_F U_H : |x\rangle_m \otimes |y\rangle_n \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \rightarrow |x\rangle_m \otimes |y\rangle_n \otimes |f(x+k, y+l)\rangle \otimes |h(x, y)\rangle. \quad (10)$$

Керуючись виразом (10) для запису растрового зображення та ядра фільтра достатньо взяти по одному додатковому кубіту.

Побудуємо квантовий алгоритм розпізнавання оптичних образів. Розглянемо базові квантові логічні елементи [1, 2]. Над кожним кубітом можна здійснити прості логічні операції. Наприклад, операцію заперечення для реалізації інверсії значень кубітів спробуємо зобразити таким оператором

$$X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|. \quad (11)$$

У спінорному зображенні оператор заперечення має вигляд матриці

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Оператор тотожного перетворення не змінює значення кубітів і набуває вигляду

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Одним із важливих елементів є «контрольоване НІ», яке здійснюється над двома кубітами і змінює значення другого кубіта на протилежне, якщо значення першого кубіта дорівнює 1. Цей логічний елемент може бути визначений як

$$U_{CNOT} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X, \quad (14)$$

а матриця оператора унітарного перетворення «контрольоване НІ» має вигляд

$$U_{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Дію вентиля «контрольоване НІ» можна записати так

$$U_{CNOT} : |a, b\rangle \rightarrow |a, a \oplus b\rangle, \quad (16)$$

де  $\oplus$  означає сумування за модулем 2.

Ще одним важливим логічним елементом є вентиль Тоффолі, який діє на три кубіти і змінює значення третього кубіта на протилежне, якщо значення першого та другого кубіта дорівнює 1. Від логічного елемента “контрольоване НІ” вентиль Тоффолі відрізняється наявністю ще одного додаткового керуючого кубіта. Цей вентиль визначають

$$T = |0\rangle\langle 0| \otimes I \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U_{CNOT}. \quad (17)$$

Перетворення Тоффолі зображають так

$$U_T : |a, b, c\rangle \rightarrow |a, b, c \oplus ab\rangle, \quad (18)$$

Вентиль Тоффолі є універсальним квантовим логічним елементом, на основі якого можна побудувати оборотну квантову машину Тюрінга.

Розглянемо алгоритм порівняння пікселя растрового зображення та відповідного до нього елемента ядра фільтра. Для цього введемо оператор

$$U_T = (I^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n} \otimes X \otimes X \otimes I)(I^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n} \otimes T_{fn}) \times \\ \times (I^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n} \otimes X \otimes X \otimes I)(I^{\otimes m} \otimes I^{\otimes n} \otimes T_{fn}). \quad (19)$$

Введемо додатковий кубіт анцилу  $|z\rangle$  в стані  $|0\rangle$ . Подіємо оператором  $|U_T\rangle$  на систему кубітів

$$\Psi = |x\rangle_m \otimes |y\rangle_n \otimes |f(x, y)\rangle \otimes |h(x, y)\rangle \otimes |z\rangle. \quad (20)$$

Унаслідок дії оператора  $|U_T\rangle$  у станах, в яких значення елемента зображення  $|f(x, y)\rangle$  та елемента ядра фільтра  $|h(x, y)\rangle$  збігаються, відбуватиметься інверсія кубіта  $|z\rangle$  зі стану  $|0\rangle$  в стан  $|1\rangle$  за допомогою оператора Тоффолі  $T_{fn}$ , в якому керуючими кубітами є  $|f(x, y)\rangle$  та  $|h(x, y)\rangle$ . Імовірність виміряти кубіт  $|z\rangle$  у стані  $|1\rangle$  визначатимемо кількістю збігів елементів зображення та ядра і дорівнюватиме 1 у разі повного співпадіння. При певному пороговому значенні такої ймовірності алгоритм приймає рішення про відповідність зображення заданому шаблону. Щоб виявити те, що кількість неспівпадаючих елементів не перевищує заданої величини, необхідно підсилити до заданого рівня амплітуди станів, в яких ці елементи не збігаються. Таке підсилення амплітуд станів, які мають задані властивості, можна здійснити за допомогою оператора інверсії відносно середнього, який використовується в алгоритмі Гровера для пошуку в неструктурованій квантовій базі даних [5, 6, 7]. Оператор інверсії розглянемо у вигляді

$$U_G = 2|\psi_c\rangle\langle\psi_c| - I, \quad (21)$$

$$\text{де } |\psi_c\rangle = H^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} |i\rangle.$$

В геометричній інтерпретації оператор  $U_G$  здійснює в Гільбертовому просторі дзеркальне відображення певного вектора відносно осі, яка визначається вектором  $|\psi_c\rangle$ . Оператор інверсії можна представити сукупністю однокубітних операторів Адамара та операторів інверсії стану кубіта відносно базисного вектора  $|0\rangle$

$$U_G = H^{\otimes n} (2|0\rangle\langle 0| - I)^{\otimes n} H^{\otimes n}. \quad (22)$$

Оператор  $U_G$  також називають оператором інверсії відносно середнього [5, 7], оскільки перетворення  $U_G$  можна зобразити

$$U_G : \sum_i a_i |i\rangle \rightarrow \sum_i (2A - a_i) |i\rangle, \quad (23)$$

де  $A$  – середнє значення амплітуд  $a_i$ . Оператор  $U_G$  можна зобразити унітарною матрицею, елементи якої визначаються правилом

$$S_{ij} = \begin{cases} \frac{2}{N}, & i \neq j \\ \frac{2}{N} - 1, & i = j \end{cases}. \quad (24)$$

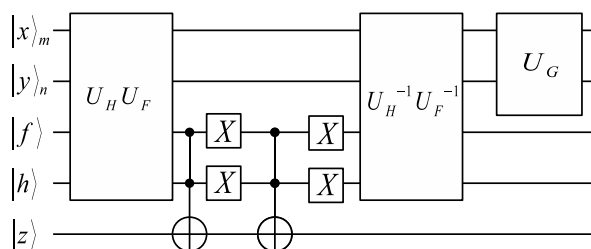
Для здійснення ітерації Гровера на регістрах  $|x\rangle_m |y\rangle_n$  необхідно перевести кубіти  $|f\rangle$  та  $|h\rangle$  в початковий стан за допомогою обернених унітарних перетворень  $U_H^{-1} U_F^{-1}$ . Враховуючи вирази (10), (19), (22), оператор для однієї ітерації алгоритму можна записати так

$$U_R = U_G U_H^{-1} U_F^{-1} U_T U_H U_F. \quad (25)$$

Перед застосуванням ітерації Гровера подіємо на допоміжний кубіт  $|z\rangle$  у приготовленому стані  $|1\rangle$  оператором Адамара

$$|z\rangle = H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (26)$$

Внаслідок дії оператора  $U_T$  кубіт  $|z\rangle$  в новому базисі не змінить свого значення, а у суперпозиції станів  $|\psi\rangle$  (20) відбудеться інверсія знака амплітуди тих станів, в яких збігаються значення кубітів  $|f\rangle$  та  $|h\rangle$ . Це зумовлено тим, що перед дією оператора  $U_T$ , кубіт  $|z\rangle$  був переведений в новий базисний стан (26), а інверсія стану в цьому базисі є рівнозначна інверсії знака амплітуди. Підсилення амплітуд станів з інверсними знаками амплітуд відбувається внаслідок дії оператора  $U_G$  аналогічно до механізму, описаного в алгоритмі Гровера [4, 6]. Можна показати, що внаслідок реалізації ітерації  $U_R$  можна підсилити амплітуди заданих станів утричі. На рис. 1 наведено квантову схему реалізації ітерації  $U_R$ .

Рис. 1. Квантова схема реалізації ітерації  $U_R$ 

Якщо зображення та шаблон не збігаються лише в одному елементі, то можна показати, що аналогічно до алгоритму Гровера [4, 6] оптимальна кількість ітерацій  $U_R$  буде

$$k_U \approx \frac{\pi}{4} \sqrt{N}, N = 2^n, \quad (27)$$

де  $N$  – кількість пікселів. Отже, складність алгоритму в цьому випадку буде  $O(\sqrt{N})$ . Порівняно із класичним алгоритмом, складність якого є  $O(N)$ , отримаємо поліноміальне прискорення. Однак наперед не відомо скільки елементів зображення та шаблону збігаються. Розглянемо необхідну кількість ітерацій  $U_R$  в реалізації запропонованого квантового алгоритму. Визначити величину співпадіння елементів зображення та шаблону можна, послідовно реалізуючи серію таких алгоритмів із кількостями ітерацій  $U_R$  в кожній реалізації, які утворюють прогресію

$$k_U = 1, 2, 4, 8, \dots, l_U, \quad (28)$$

де  $l_U$  – певне максимальне значення кількості ітерацій  $U_R$ , яке відповідає заданій мірі збігів елементів зображення та шаблону. Тобто спочатку реалізується алгоритм з однією ітерацією, потім із двома тощо. Можна показати, що складність алгоритму в цьому випадку є також  $O(\sqrt{N})$ , де  $N = m \cdot n$  – кількість елементів зображення.

Отже, запропоновано квантовий алгоритм розпізнавання оптичних образів на растрових зображеннях. Реалізація цього алгоритму здійснюється на основі квантових логічних елементів, зокрема, з використанням вентиля Тофолі. Ітерація Гровера використовується для підсилення амплітуд квантових станів із заданими властивостями. Показано, що реалізація квантового алгоритму розпізнавання образів дає змогу порівняно із класичними алгоритмами експоненційно скоротити об'єм необхідної пам'яті та поліноміально зменшити час виконання алгоритму внаслідок реалізації квантового паралелізму.

1. Форсайт Д. Компьютерное зрение. Современный подход / Д. Форсайт, Ж. Понс. – М.: Вильямс, 2004. – 928 с.
2. Крохмальський Т. Квантові комп'ютери: основи й алгоритми (короткий огляд) / Т. Крохмальський // Журн. фіз. досліджень. – 2004. – Т. 8, № 4. – С. 1–15.
3. Китаев А. Классические и квантовые вычисления / А. Китаев, А. Шень, М. Вялий. – М.: МЦНМО, ЧеРо, 1999. – 192 с.

4. Schaller G. Quantum algorithm for optical template recognition with noise filtering [Електронний ресурс] / G. Schaller, R. Schutzhold // arXiv:quant-ph/0512057v3. – 2006.
5. Grover L.K. Quantum Mechanics helps in searching for a needle in haystack / L.K.Grover // Phys.Rev. Lett. – 1997. – Vol. 79, N 2. – P. 325–328.
6. Zalka C. Grover's quantum searching algorithm is optimal / C. Zalka. // Phys. Rev. A. – 1999. – Vol. 60, N 4. – P. 2746–2751.
7. Lavor C. Grover's Algorithm: Quantum Database Search [Електронний ресурс] / C. Lavor, L.R.U. Manssur, R. Portugal // arXiv:quant-ph/0301079v1. – 2003.

### QUANTUM ALGORITHM OF PATTERN RECOGNITION ON BITMAP IMAGES

**B. Pavlyshenko**

*Ivan Franko Lviv National University,  
Dragomanov Str., 50, 79005 Lviv, Ukraine  
e-mail: pavlsh@yahoo.com*

The quantum algorithm of pattern recognition on bitmap images which is implemented with quantum logical Toffoly gate and Grover's operator has been proposed in this work. It is shown that implementation of the quantum algorithm of pattern recognition gives the ability to decrease necessary memory exponentially and time of algorithm performing polinomially comparing with classical algorithms as result of quantum paralelism implementation.

*Key words:* quantum computation, quantum logical gates, pattern recognition.

### КВАНТОВЫЙ АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ НА РАСТРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ

**Б. Павлишенко**

*Львовський національний університет імені Івана Франко  
ул. Драгоманова, 50, 79005 Львов, Україна  
e-mail: pavlsh@yahoo.com*

Предложен квантовый алгоритм распознавания оптических образов на растровых изображениях, который реализуется на квантовых логических элементах Тоффолли и операторе Гровера. Показано, что реализация квантового алгоритма распознавания образов дает возможность в сравнении с классическими алгоритмами экспоненциально сократить объем необходимой памяти и полиномиально уменьшить время выполнения алгоритма вследствие реализации квантового параллелизма.

*Ключевые слова:* квантовые вычисления, квантовые логические элементы, распознавание образов.

Стаття надійшла до редколегії 03.02.2010

Прийнята до друку 07.06.2010