

УДК 621.385.6
PACS 84.30.Jc

ОБЧИСЛЕННЯ КВАЗІСТАТИЧНИХ ПОВЕРХНЕВИХ ГУСТИН ЗАРЯДУ ТА СТРУМУ, НАВЕДЕНИХ ПОМІРКОВАНО РЕЛЯТИВІСТСЬКИМ ЕЛЕКТРИЧНИМ ЗАРЯДОМ, ЩО ДОВІЛЬНО РУХАЄТЬСЯ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ КАМЕРІ ДРЕЙФУ

К. Ільєнко, Т. Яценко

*Інститут радіофізики та електроніки ім. О. Я. Усикова
Національної академії наук України
вул. Ак. Проскури, 12, 61085 Харків, Україна
e-mail: k.ilchenko@gmail.com*

За допомогою дарвінівської моделі за методом функції Гріна розраховано поверхневі густини заряду та струму, наведені точковим зарядом, що рухається довільно в заземленій ідеально провідній колійній циліндричній камері дрейфу. Запропоновано результати аналітичного розрахунку квазістатичних (таких, що не розповсюджуються) електричного та магнітного полів, що разом утворюють поле просторового заряду помірковано релятивістського пучка заряджених частинок. З'ясовано придатність отриманих виразів для чисельного моделювання повністю тривимірної динаміки заряджених пучків методом точкових частинок, які взаємодіють, в помірковано релятивістському наближенні.

Ключові слова: дарвінівська модель, функція Гріна, метод точкових частинок, що взаємодіють.

Перш ніж розглянути теорію та розробити макет будь-якого генератора/підсилювача мікрохвильового випромінювання або його компонентів, доцільно вивчити динаміку пучків заряджених частинок, що рухаються у зовнішніх та власних електромагнітних полях у заземлених (ідеально провідних) камерах дрейфу, (див., наприклад, [1, 2]). Суттєва частина цих приладів має кругову або коаксіальну кругову циліндричну геометрію [3–5], але водночас динаміка пучка заряджених частинок не є аксіально-симетричною.

Одним із найуживаніших методів у розрахунках динаміки заряджених частинок у зовнішніх та власних електромагнітних полях є метод функцій Гріна [6]. Відомі переваги цього методу над методами прямого чисельного моделювання системи рівнянь Максвелла та руху для крупних заряджених частинок [7].

Нааявні й певні недоліки, зокрема, до останнього часу в літературі не існувало відповідної тривимірної (3-D) схеми розв'язку рівнянь Максвелла методом функцій Гріна в заземленій ідеально провідній коловій циліндричній камері дрейфу (див. [1]). Це обмежувало застосування методу функцій Гріна задачами планарної/прямокутної циліндричної геометрії [1]; нерелятивістськими пучками заряджених частинок, які довільно рухаються в колових/коаксіальних колових циліндричних камерах дрейфу [8]; та аксіально-симетричними пучками заряджених частинок [4].

В електростатичному наближенні, яке використовується для нерелятивістських ($v/c \leq 0,3$) пучків заряджених частинок, так зване поле просторового заряду (власне нерозповсюджуючиєся електричне поле) пучка розраховують через скалярний потенціал $\varphi(t, \vec{x})$, що задовольняє рівняння Пуасона із відповідною крайовою умовою ($\varphi(t, \vec{x})|_{\Gamma} = 0$) [9]. Перехід до розгляду помірковано релятивістських ($v/c \leq 0,8-0,9$) пучків потребує врахування і власного магнітного поля, що не поширюється, як невід'ємної складової частини поля просторового заряду [10] та відповідних поправок до власного непоширюваного електричного поля [11]. В рамках дарвінівської моделі в кулонівському калібруванні ($\text{div } \vec{A} = 0$) замість рівнянь Максвелла розглядають таку систему для скалярного $\varphi(t, \vec{x})$ та $\vec{A}_{DW}(t, \vec{x})$ векторного потенціалів:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho; \quad \Delta\vec{A}_{DW} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\varphi). \quad (1)$$

Тут $\rho(t, \vec{x})$ та $\vec{j}(t, \vec{x})$ — об'ємні густини заряду та струму; t — час, \vec{x} — тривимірні координати, c — швидкість світла у вакуумі. Власні, із відповідними крайовими умовами, квазістатичні (непоширювані) електричне та магнітне поля визначаються загальними формулами (докладніше див. [12]).

$$\vec{E}_{DW} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_{DW}}{\partial t}; \quad \vec{B}_{DW} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{DW}. \quad (2)$$

У статті, спираючись на розв'язок пов'язаної 3-D векторної задачі для знаходження поперечних компонент власних електричного та магнітного полів електричного заряду, який рухається довільно в заземленій ідеально провідній коловій циліндричній камері дрейфу, [13], у першому пост-ньютонівському наближенні — дарвінівській моделі — обчислено поправки до поверхневої густини заряду (порівняйте з [14]) та поверхнева густина струму, наведені внаслідок руху цього заряду на стінці камери дрейфу. Такий підхід, даючи квадратичні за швидкостями заряджених макрочастинок (вихрові) поправки до (потенціальної) “електростатичної” сили парної взаємодії, ϵ , з одного боку, привабливим для обчислення порівняно з повністю релятивістським розглядом, а з іншого боку, цілком достатнім для моделювання широкого класу сучасних мікрохвильових приладів, що використовують сильноструміві (high-current) помірковано релятивістські пучки заряджених частинок.

Розв'язок системи (1) для необмеженої заземленої ідеально провідної колової циліндричної камери дрейфу можна отримати методом функції Гріна, як описано в [13], із використанням [14].

Позначаючи

$$\vec{E}^C \equiv -\vec{\nabla}\varphi \quad \text{та} \quad \vec{E}^F \equiv -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_{DW}}{\partial t}. \quad (3)$$

як “кулонівську” та “фарадеївську” частини квазістатичного електричного поля $\vec{E}_{DW}(t, \vec{x}) = \vec{E}^C(t, \vec{x}) + \vec{E}^F(t, \vec{x})$, отримаємо

$$\begin{aligned} E_r^C(t, \vec{x}) &= - \int_{V''} \frac{\partial G^D(\vec{x}; \vec{x}'')}{\partial r} \rho(t, \vec{x}'') d^3 \vec{x}'', \\ E_\theta^C(t, \vec{x}) &= - \int_{V''} \frac{\partial G^D(\vec{x}; \vec{x}'')}{r \partial \theta} \rho(t, \vec{x}'') d^3 \vec{x}'', \\ E_z^C(t, \vec{x}) &= - \int_{V''} \frac{\partial G^D(\vec{x}; \vec{x}'')}{\partial z} \rho(t, \vec{x}'') d^3 \vec{x}''; \\ E_r^F(t, \vec{x}) &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_{S'} \left\{ \frac{\partial G_\perp^D(\vec{x}_\perp; \vec{x}'_\perp)}{4\pi \partial r} \int_{V''} \frac{\partial G^D(\vec{x}'_\perp, z; \vec{x}'')}{\partial z} \int_{V'''} G^D(\vec{x}''; \vec{x}''') \times \right. \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial t} \left[\Delta_\perp''' j_z(t, \vec{x}''') - \frac{\partial}{\partial z'''} \operatorname{div}_\perp''' \vec{j}(t, \vec{x}''') \right] d^3 \vec{x}''' d^3 \vec{x}'' - \\ &\quad \left. - \frac{\partial G_\perp^N(\vec{x}_\perp; \vec{x}'_\perp)}{r \partial \theta} \int_{V''} G^N(\vec{x}'_\perp, z; \vec{x}'') \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}_z'' \vec{j}(t, \vec{x}'') d^3 \vec{x}'' \right\} d^2 \vec{x}'_\perp, \quad (4) \\ E_\theta^F(t, \vec{x}) &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_{S'} \left\{ \frac{\partial G_\perp^D(\vec{x}_\perp; \vec{x}'_\perp)}{4\pi r \partial \theta} \int_{V''} \frac{\partial G^D(\vec{x}'_\perp, z; \vec{x}'')}{\partial z} \int_{V'''} G^D(\vec{x}''; \vec{x}''') \times \right. \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial t} \left[\Delta_\perp''' j_z(t, \vec{x}''') - \frac{\partial}{\partial z'''} \operatorname{div}_\perp''' \vec{j}(t, \vec{x}''') \right] d^3 \vec{x}''' d^3 \vec{x}'' + \\ &\quad \left. + \frac{\partial G_\perp^N(\vec{x}_\perp; \vec{x}'_\perp)}{\partial r} \int_{V''} G^N(\vec{x}'_\perp, z; \vec{x}'') \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}_z'' \vec{j}(t, \vec{x}'') d^3 \vec{x}'' \right\} d^2 \vec{x}'_\perp, \\ E_z^F(t, \vec{x}) &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_{V''} G^D(\vec{x}; \vec{x}'') \int_{V'''} G^D(\vec{x}''; \vec{x}''') \frac{\partial}{\partial t} \left[\Delta_\perp''' j_z(t, \vec{x}''') - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z'''} \operatorname{div}_\perp''' \vec{j}(t, \vec{x}''') \right] d^3 \vec{x}''' d^3 \vec{x}'' . \end{aligned}$$

Тут введено позначення

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\perp \vec{V} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] \quad \text{та} \quad \operatorname{rot}_z \vec{V} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right], \\ \vec{x} &= (\vec{x}_\perp, z), \quad \vec{x}_\perp \equiv (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned} \quad (5)$$

Компоненти квазістатичного магнітного поля $\vec{B}_{DW} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{DW}$ мають вигляд

$$\begin{aligned}
 B_{DW|r}(t, \vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi c} \int_{S'} \left\{ \frac{\partial G_{\perp}^D(\vec{x}_{\perp}; \vec{x}'_{\perp})}{r \partial \theta} \int_{V''} G^D(\vec{x}'_{\perp}, z; \vec{x}'') \times \right. \\
 &\times \left[\Delta''_{\perp} j_z(t, \vec{x}'') - \frac{\partial}{\partial z''} \operatorname{div}_{\perp}'' \vec{j}(t, \vec{x}'') \right] d^3 \vec{x}'' - \\
 &\left. - \frac{\partial G_{\perp}^N(\vec{x}_{\perp}; \vec{x}'_{\perp})}{\partial r} \int_{V''} G^N(\vec{x}'_{\perp}, z; \vec{x}'') \frac{\partial}{\partial z''} \operatorname{rot}_{z''}'' \vec{j}(t, \vec{x}'') d^3 \vec{x}'' \right\} d^2 \vec{x}'_{\perp}, \\
 B_{DW|\theta}(t, \vec{x}) &= \frac{1}{4\pi c} \int_{S'} \left\{ \frac{\partial G_{\perp}^D(\vec{x}_{\perp}; \vec{x}'_{\perp})}{\partial r} \int_{V''} G^D(\vec{x}'_{\perp}, z; \vec{x}'') \times \right. \\
 &\times \left[\Delta''_{\perp} j_z(t, \vec{x}'') - \frac{\partial}{\partial z''} \operatorname{div}_{\perp}'' \vec{j}(t, \vec{x}'') \right] d^3 \vec{x}'' + \\
 &\left. + \frac{\partial G_{\perp}^N(\vec{x}_{\perp}; \vec{x}'_{\perp})}{r \partial \theta} \int_{V''} G^N(\vec{x}'_{\perp}, z; \vec{x}'') \frac{\partial}{\partial z''} \operatorname{rot}_{z''}'' \vec{j}(t, \vec{x}'') d^3 \vec{x}'' \right\} d^2 \vec{x}'_{\perp}, \\
 B_{DW|z}(t, \vec{x}) &= \frac{1}{c} \int_{V''} G^N(\vec{x}; \vec{x}'') \operatorname{rot}_{z''}'' \vec{j}(t, \vec{x}'') d^3 \vec{x}'' .
 \end{aligned} \tag{6}$$

Функції Гріна тривимірної та двовимірної задач Діріхле та Неймана для рівняння Пуассона

$$\begin{aligned}
 \Delta G^{D,N}(\vec{x}; \vec{x}'') &= -\frac{4\pi}{r} \delta(r - r'') \delta(\theta - \theta'') \delta(z - z''), \\
 \Delta_{\perp} G_{\perp}^{D,N}(\vec{x}_{\perp}; \vec{x}'_{\perp}) &= -\frac{4\pi}{r} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta'); \\
 \Delta &= \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{та} \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2};
 \end{aligned} \tag{7}$$

із відповідними крайовими умовами

$$G^D|_{\Gamma} = G_{\perp}^D|_{\Gamma} = 0 \quad \text{та} \quad \frac{\partial G^N}{\partial r} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial G_{\perp}^N}{\partial r} \Big|_{\Gamma} = 0 \tag{8}$$

задаються виразами:

$$\begin{aligned}
 G^D(\vec{x}, \vec{x}'') &= \frac{4}{a} \left\{ \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{J_0(\nu_{0q} r/a) J_0(\nu_{0q} r''/a)}{J_1^2(\nu_{0q})} \frac{e^{-\nu_{0q} |z-z''|/a}}{2\nu_{0q}} + \right. \\
 &\left. + \sum_{n,q=1}^{+\infty} \frac{J_n(\nu_{nq} r/a) J_n(\nu_{nq} r''/a)}{J_{n+1}^2(\nu_{nq})} \frac{e^{-\nu_{nq} |z-z''|/a}}{\nu_{nq}} \cos[n(\theta - \theta'')] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G^N(\vec{x}, \vec{x}'') &= \frac{4}{a} \left\{ \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{J_0(\nu'_{0q}r/a)J_0(\nu'_{0q}r''/a)}{J_0^2(\nu'_{0q})} \frac{e^{-\nu'_{0q}|z-z''|/a}}{2\nu'_{0q}} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{n,q=1}^{+\infty} \frac{J_n(\nu'_{nq}r/a)J_n(\nu'_{nq}r''/a)}{J_n^2(\nu'_{nq})} \frac{\nu'_{nq}e^{-\nu'_{nq}|z-z''|/a}}{\nu'^2_{nq} - n^2} \cos[n(\theta - \theta'')] \right\}, \\
 G_{\perp}^D(\vec{x}, \vec{x}') &= 8 \left\{ \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{J_0(\nu_{0q}r/a)J_0(\nu_{0q}r'/a)}{2\nu_{0q}^2 J_1^2(\nu_{0q})} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{n,q=1}^{+\infty} \frac{J_n(\nu_{nq}r/a)J_n(\nu_{nq}r'/a)}{\nu_{nq}^2 J_{n+1}^2(\nu_{nq})} \cos[n(\theta - \theta')] \right\}, \\
 G_{\perp}^N(\vec{x}, \vec{x}') &= 8 \left\{ \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{J_0(\nu'_{0q}r/a)J_0(\nu'_{0q}r'/a)}{2\nu'^2_{0q} J_0^2(\nu'_{0q})} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{n,q=1}^{+\infty} \frac{J_n(\nu'_{nq}r/a)J_n(\nu'_{nq}r'/a)}{(\nu'^2_{nq} - n^2)J_n^2(\nu'_{nq})} \cos[n(\theta - \theta')] \right\};
 \end{aligned} \tag{9}$$

де ν_{nq} та ν'_{nq} – q -ті корені рівнянь $J_n(x) = 0$ та $dJ_n(x)/dx = 0$ відповідно; a – радіус колової циліндричної камери дрейфу; $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$; $\theta = \arcsin[y/r]$.

Суттєвою обставиною при виведенні (4) та (6) є те, що об'ємні густини заряду $\rho(t, \vec{x})$ та струму $\vec{j}(t, \vec{x})$ задовольняють рівняння неперервності.

Наведені поверхневі густини заряду $\sigma(t; \vec{x}_{\Sigma}) \equiv (4\pi)^{-1}(\vec{n} \cdot \vec{E})|_{\Gamma}$ та струму $\vec{\kappa}(t; \vec{x}_{\Sigma}) \equiv (4\pi)^{-1}c(\vec{n} \times \vec{B})|_{\Gamma}$ для необмеженої колової циліндричної геометрії, що розглядається, (Γ : $r = a$, $\vec{x}_{\Sigma} = (a \cos \theta, a \sin \theta, z)$; $\vec{n} = -\vec{e}_r$ – внутрішня нормаль) надаються стандартними виразами

$$\begin{aligned}
 \sigma(t; \vec{x}_{\Sigma}) &\equiv \sigma^C(t; \vec{x}_{\Sigma}) + \sigma^F(t; \vec{x}_{\Sigma}) = -\frac{1}{4\pi} E_{DW|r}(t, \vec{x})|_{r=a}, \\
 \kappa_{\theta}(t; \vec{x}_{\Sigma}) &= \frac{c}{4\pi} B_{DW|z}(t, \vec{x})|_{r=a}, \quad \kappa_z(t; \vec{x}_{\Sigma}) = -\frac{c}{4\pi} B_{DW|\theta}(t, \vec{x})|_{r=a}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Обчислення у нерелятивістському наближенні поверхневої густини наведеного заряду, $\sigma^C(t; \vec{x}_{\Sigma})$, було розглянуто в роботі [14].

Вирази (4) та (6), наведені в попередньому розділі, потребують подальшої конкретизації для використання у розрахунках за методом точкових частинок, що взаємодіють (див. [15] та [8]). Об'ємні густини заряду та струму точкової макро-частинки із зарядом q , що автоматично задовольняють рівнянню неперервності, задаються виразами

$$\rho(t, \vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}(t)) \quad \text{та} \quad \vec{j}(t, \vec{x}) = q\vec{v}(t)\delta(\vec{x} - \vec{x}(t)). \tag{11}$$

Тут $\vec{x}(t)$ – миттєва координата макро-частинки (для електронів вважатимемо $q = -M|e|$, де M – коефіцієнт укрупнення, $|e|$ – величина заряду електрона), а $\vec{v}(t) = d\vec{x}(t)/dt$ – її миттєва швидкість.

Підставивши (11) в (4) та (6) і використавши властивості δ -функції, запишемо аналітичні вирази для квазістатичних електричного та магнітного полів точкового заряду q , що довільно рухається в необмеженій заземленій ідеально провідній коловій циліндричній камері дрейфу:

$$\begin{aligned}
\vec{E}^C(t, \vec{x}) &= -q \vec{\nabla} G^D(\vec{x}; \vec{x}); \\
E_r^F(t, \vec{x}) &= \frac{q}{4\pi c^2} \int_{S'} \left\{ \frac{\partial G_{\perp}^D(\vec{x}_{\perp}; \vec{x}'_{\perp})}{4\pi \partial r} \int_{V''} \frac{\partial G^D(\vec{x}'_{\perp}, z; \vec{x}'')}{\partial z} \left[\tilde{v}_z (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \tilde{\Delta}_{\perp} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\vec{v}_{\perp} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla}_{\perp}) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + \frac{\tilde{v}_{\theta}}{r} (\vec{v} \times \vec{\nabla})_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right] G^D(\vec{x}''; \vec{x}) d^3 \vec{x}'' - \frac{\partial G_{\perp}^N(\vec{x}_{\perp}; \vec{x}'_{\perp})}{r \partial \theta} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[(\vec{v} \times (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla})_z + \frac{\tilde{v}_{\theta}}{r} (\vec{v}_{\perp} \cdot \vec{\nabla}_{\perp}) \right] G^N(\vec{x}'_{\perp}, z; \vec{x}) \right\} d^2 \vec{x}'_{\perp} + \mathcal{O}(\tilde{a}), \\
E_{\theta}^F(t, \vec{x}) &= \frac{q}{4\pi c^2} \int_{S'} \left\{ \frac{\partial G_{\perp}^D(\vec{x}_{\perp}; \vec{x}'_{\perp})}{4\pi r \partial \theta} \int_{V''} \frac{\partial G^D(\vec{x}'_{\perp}, z; \vec{x}'')}{\partial z} \left[\tilde{v}_z (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \tilde{\Delta}_{\perp} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\vec{v}_{\perp} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla}_{\perp}) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + \frac{\tilde{v}_{\theta}}{r} (\vec{v} \times \vec{\nabla})_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right] G^D(\vec{x}''; \vec{x}) d^3 \vec{x}'' + \frac{\partial G_{\perp}^N(\vec{x}_{\perp}; \vec{x}'_{\perp})}{\partial r} \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[(\vec{v} \times (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla})_z + \frac{\tilde{v}_{\theta}}{r} (\vec{v}_{\perp} \cdot \vec{\nabla}_{\perp}) \right] G^N(\vec{x}'_{\perp}, z; \vec{x}) \right\} d^2 \vec{x}'_{\perp} + \mathcal{O}(\tilde{a}), \quad (12) \\
E_z^F(t, \vec{x}) &= \frac{q}{4\pi c^2} \int_{V''} G^D(\vec{x}; \vec{x}'') \left[\tilde{v}_z (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \tilde{\Delta}_{\perp} - (\vec{v}_{\perp} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla}_{\perp}) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\tilde{v}_{\theta}}{r} (\vec{v} \times \vec{\nabla})_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right] G^D(\vec{x}''; \vec{x}) d^3 \vec{x}'' + \mathcal{O}(\tilde{a}); \\
B_{DW|r}(t, \vec{x}) &= -\frac{q}{4\pi c} \int_{S'} \left\{ \frac{\partial G_{\perp}^D(\vec{x}_{\perp}; \vec{x}'_{\perp})}{r \partial \theta} \left[\tilde{v}_z \tilde{\Delta}_{\perp} - (\vec{v}_{\perp} \cdot \vec{\nabla}_{\perp}) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right] G^D(\vec{x}'_{\perp}, z; \vec{x}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial G_{\perp}^N(\vec{x}_{\perp}; \vec{x}'_{\perp})}{\partial r} (\vec{v} \times \vec{\nabla})_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} G^N(\vec{x}'_{\perp}, z; \vec{x}) \right\} d^2 \vec{x}'_{\perp}, \\
B_{DW|\theta}(t, \vec{x}) &= \frac{q}{4\pi c} \int_{S'} \left\{ \frac{\partial G_{\perp}^D(\vec{x}_{\perp}; \vec{x}'_{\perp})}{\partial r} \left[\tilde{v}_z \tilde{\Delta}_{\perp} - (\vec{v}_{\perp} \cdot \vec{\nabla}_{\perp}) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right] G^D(\vec{x}'_{\perp}, z; \vec{x}) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial G_{\perp}^N(\vec{x}_{\perp}; \vec{x}'_{\perp})}{r \partial \theta} (\vec{v} \times \vec{\nabla})_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} G^N(\vec{x}'_{\perp}, z; \vec{x}) \right\} d^2 \vec{x}'_{\perp}, \\
B_{DW|z}(t, \vec{x}) &= \frac{q}{c} (\vec{v} \times \vec{\nabla})_z G^N(\vec{x}; \vec{x}).
\end{aligned}$$

Відомо, що вихрова частина квазістатичного (непоширюваного) електричного поля в дарвінівській моделі містить члени, в які входить прискорення частинки.

Але асимптотика внеску цих членів у вектор Пойнтінга є такою, що вони не відповідають полю випромінювання, тому зазвичай ними можна знехтувати, якщо можливе їх явне аналітичне виділення (див. [11, 12]). У випадку безпосереднього чисельного моделювання рівнянь дарвінівської моделі (1) та (2), коли таке виділення не є технічно можливим, внесок нефізичного врахування цих членів виявляється несуттєвим.

Поверхневі густини заряду та струму, наведені на стінці камери дрейфу точковою макрочастинкою із зарядом q , яка довільно рухається в необмеженій заземленій ідеально провідній коловій циліндричній камері дрейфу, мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma^C(t, \vec{x}_\Sigma) &= \frac{q}{4\pi} \frac{\partial G^D(\vec{x}; \vec{x}')}{\partial r} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_\Sigma}, \\ \sigma^F(t, \vec{x}_\Sigma) &= -\frac{q}{16\pi^2 c^2} \int_{S'} \frac{\partial G_\perp^D(\vec{x}_\perp; \vec{x}'_\perp)}{4\pi \partial r} \int_{V''} \frac{\partial G^D(\vec{x}'_\perp, z; \vec{x}'')}{\partial z} \left[\tilde{v}_z (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \tilde{\Delta}_\perp - \right. \\ &\quad \left. - (\vec{v}_\perp \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla}_\perp) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + \frac{\tilde{v}_\theta}{\tilde{r}} (\vec{v} \times \vec{\nabla})_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right] G^D(\vec{x}'', \vec{x}) d^3 \vec{x}'' - \frac{\partial G_\perp^N(\vec{x}_\perp; \vec{x}'_\perp)}{r \partial \theta} \times \\ &\quad \times \left[(\vec{v} \times (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla})_z + \frac{\tilde{v}_\theta}{\tilde{r}} (\vec{v}_\perp \cdot \vec{\nabla}_\perp) \right] G^N(\vec{x}'_\perp, z; \vec{x}) \Big|_{(\vec{x}_\perp, z)=\vec{x}_\Sigma} d^2 \vec{x}'_\perp + \mathcal{O}(\tilde{a}); \quad (13) \\ \kappa_\theta(t, \vec{x}_\Sigma) &= \frac{q}{4\pi} (\vec{v} \times \vec{\nabla})_z G^N(\vec{x}_\Sigma; \vec{x}), \\ \kappa_z(t, \vec{x}_\Sigma) &= -\frac{q}{16\pi^2} \int_{S'} \left\{ \frac{\partial G_\perp^D(\vec{x}_\perp; \vec{x}'_\perp)}{\partial r} \left[\tilde{v}_z \tilde{\Delta}_\perp - (\vec{v}_\perp \cdot \vec{\nabla}_\perp) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right] G^D(\vec{x}'_\perp, z; \vec{x}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial G_\perp^N(\vec{x}_\perp; \vec{x}'_\perp)}{r \partial \theta} (\vec{v} \times \vec{\nabla})_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} G^N(\vec{x}'_\perp, z; \vec{x}) \right\} d^2 \vec{x}'_\perp \Big|_{(\vec{x}_\perp, z)=\vec{x}_\Sigma}. \end{aligned}$$

Розглянемо дві модельні ситуації, для котрих побудуємо розподіли (13). Нагадаємо, що розрахунок нерелятивістського (електростатичного) внеску $\sigma^C(t, \vec{x}_\Sigma)$ до поверхневої густини заряду, наведеного на стінці камери дрейфу точковою макрочастинкою із зарядом q , яка довільно рухається в необмеженій заземленій ідеально провідній коловій циліндричній камері дрейфу, було представлено в [14] та [8, рис. 2].

Траєкторія точкової макрочастинки, яка рухається рівномірно та прямолінійно на фіксованій радіальній відстані паралельно осі необмеженої колової циліндричної камери дрейфу, має вигляд:

$$\tilde{r}(t) = \tilde{r}_0 \equiv a \tilde{\rho}_0, \quad \tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}_0, \quad \tilde{z}(t) - \tilde{z}_0 = \tilde{v}_\parallel t \equiv a \tilde{\beta}_\parallel \tau, \quad (14)$$

де $\tilde{\beta}_\parallel \equiv \tilde{v}_\parallel / c = \text{const}$ — безрозмірна постійна швидкість макрочастинки; $\tau = ct/a$ — безрозмірний час; $\tilde{\rho}_0$ та $\tilde{\theta}_0$ — фіксована нормована на радіус колової циліндричної камери дрейфа відстань макрочастинки від осі камери та її кутове положення відповідно.

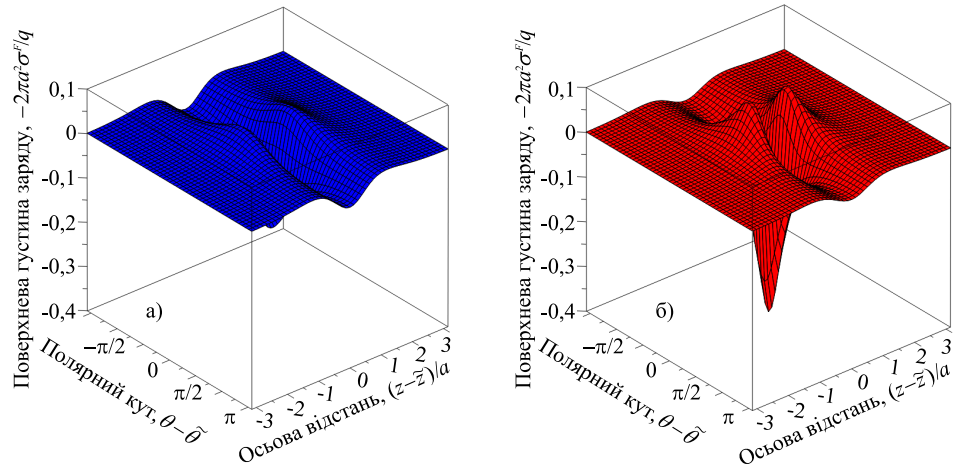


Рис. 1. Нормована помірковано релятивістська поправка $-2\pi a^2 \sigma^F/q$ до поверхневої густини заряду, наведеного точковою макрочастинкою заряду q , яка рухається із швидкістю $\tilde{v}_{\parallel} = 0,5c$ рівномірно та прямолінійно на фіксованій радіальній відстані \tilde{r}_0 паралельно вісі необмеженої колової циліндричної камери дрейфу, як функція $\theta - \tilde{\theta}(t)$ та $z - \tilde{z}(t)$: а) $\tilde{r}_0 = 0,3a$; б) $\tilde{r}_0 = 0,5a$; a — радіус камери дрейфу

Результати розрахунку в першому пост-ньютонівському наближенні релятивістських поправок, $\sigma^F(t, \vec{x}_{\Sigma})$, до поверхневої густини наведеного заряду для різних радіальних відстаней руху макрочастинки від осі камери дрейфу представлено на рис. 1 ((а) $\tilde{\rho}_0 = 0,3$; (б) $\tilde{\rho}_0 = 0,5$; $\tilde{\beta}_{\parallel} = 0,5$ в обох випадках).

Порівнюючи ці результати із поверхневою густиною наведеного заряду (див. [8, рис. 2]), обчисленою в нерелятивістському наближенні, з'ясовуємо, що ці поправки, квадратичні за компонентами безрозмірної швидкості макрочастинки, яка наводить цю поверхневу густину заряду, за абсолютною величиною не перевищують 5% від абсолютної величини $\sigma^C(t, \vec{x}_{\Sigma})$ для зазначеної помірковано релятивістської швидкості макрочастинки. Така поведінка поправок підтримує нашу оцінку застосовності наближення дарвінівської моделі аж до швидкостей порядку $0,9c$. На рис. 2 ((а) $\tilde{\rho}_0 = 0,3$; (б) $\tilde{\rho}_0 = 0,5$; $\tilde{\beta}_{\parallel} = 0,5$ в обох випадках) наведена єдина ненульова при такому заданому русі макрочастинки компонента поверхневої густини наведеного струму $\kappa_z(t, \vec{x}_{\Sigma})$. Поверхнева густина наведеного струму $\vec{\kappa}(t, \vec{x}_{\Sigma})$ є лінійною за компонентами безрозмірної швидкості макрочастинки, яка наводить цю поверхневу густину струму, але внесок цієї поверхневої густини струму у силу взаємодії між макрочастинкою та цим самим поверхневим струмом також є квадратичним за компонентами швидкості макрочастинки.

Траєкторія точкової макрочастинки, яка рухається рівномірно по колу на фіксованій радіальній відстані від осі необмеженої колової циліндричної камери дрейфу така:

$$\tilde{r}(t) = \tilde{r}_0 \equiv a\tilde{\rho}_0, \quad \tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}_0 = \tilde{v}_{\perp}t/\tilde{r}_0 \equiv \tilde{\beta}_{\perp}\tau/\tilde{\rho}_0, \quad \tilde{z}(t) = \tilde{z}_0 \equiv a\tilde{\zeta}_0, \quad (15)$$

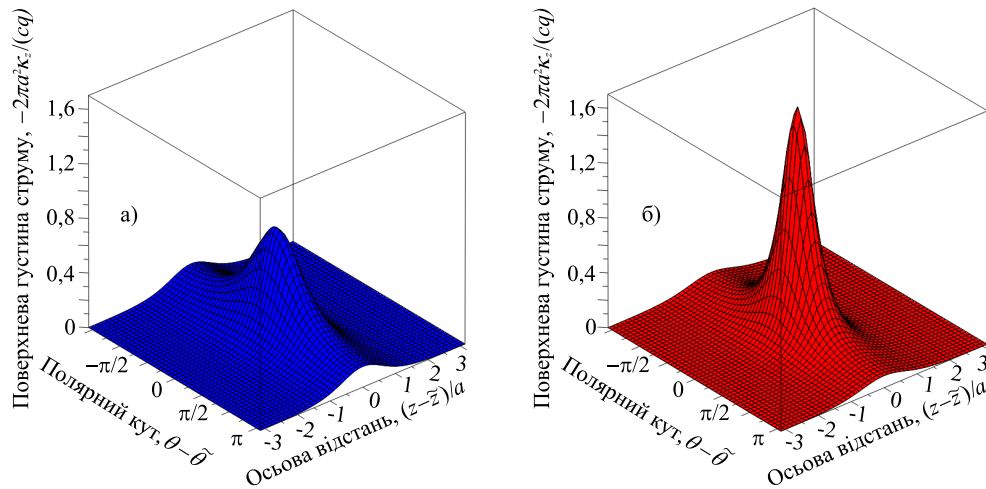


Рис. 2. Нормована компонента $-2\pi a^2 \kappa_z / (cq)$ поверхневої густини струму, наведеного точковою макрочастинкою заряду q , яка рухається із швидкістю $\tilde{v}_{\parallel} = 0,5c$ рівномірно та прямолінійно на фіксованій радіальній відстані \tilde{r}_0 паралельно до осі необмеженої колової циліндричної камери дрейфу, як функція $\theta - \tilde{\theta}(t)$ та $z - \tilde{z}(t)$: а) $\tilde{r}_0 = 0,3a$; б) $\tilde{r}_0 = 0,5a$; a — радіус камери дрейфу

де $\tilde{\beta}_{\perp} \equiv \tilde{v}_{\perp}/c = \text{const}$ — безрозмірна постійна за величиною швидкість макрочастинки; $\tau = ct/a$ — безрозмірний час; $\tilde{\varrho}_0$ і $\tilde{\theta}_0$ — фіксована нормована на радіус колової циліндричної камери дрейфу відстань макрочастинки від осі камери та її початкове кутове положення в камері відповідно.

Результати розрахунку в першому пост-ньютонівському наближенні релятивістських поправок, $\sigma^F(t, \vec{x}_{\Sigma})$, до поверхневої густини наведеного заряду для різних радіальних відстаней руху макрочастинки від осі камери дрейфу представлено на рис. 3 ((а) $\tilde{\varrho}_0 = 0,3$; (б) $\tilde{\varrho}_0 = 0,5$; $\tilde{\beta}_{\perp} = 0,1$ в обох випадках). Із порівняння залежностей $\sigma^F(t, \vec{x}_{\Sigma})$ від $\tilde{\varrho}_0$ при фіксованих відповідних швидкостях зарядженої макрочастинки на рис. 1 та 3 та аналізу аналітичних виразів для $\sigma^F(t, \vec{x}_{\Sigma})$ видно, що для руху по колу ця залежність є значно слабшою, хоча, як можна пересвідчитися, і цілком скінченною в абсолютному вимірі для всього діапазону радіальних відстаней. Оскільки в цих демонстраційних розрахунках ми навмисно обрали швидкість обертання заряду нерелятивістською, то порівняння представлених на рис. 3 (а) та (б) квадратичних за компонентами безрозмірної швидкості макрочастинки, яка наводить цю густину поверхневого заряду помірковано релятивістських поправок із основним (нерелятивістським) внеском $\sigma^C(t, \vec{x}_{\Sigma})$ (див. [8, рис. 2]) доводить, що ними справді можна нехтувати у нерелятивістських розрахунках динаміки пучків заряджених частинок. На рис. 4 та 5 ((а) $\tilde{\varrho}_0 = 0,3$; (б) $\tilde{\varrho}_0 = 0,5$; $\tilde{\beta}_{\parallel} = 0,1$ в усіх випадках) наведені кутова $\kappa_{\theta}(t, \vec{x}_{\Sigma})$ та z -компоненти $\kappa_z(t, \vec{x}_{\Sigma})$ поверхневої густини наведеного струму відповідно. Можна переконатися, що внесок поверхневої густини струму у силу взаємодії між макрочастинкою, яка наводить її на стінці камери дрейфу, та цим самим поверхневим

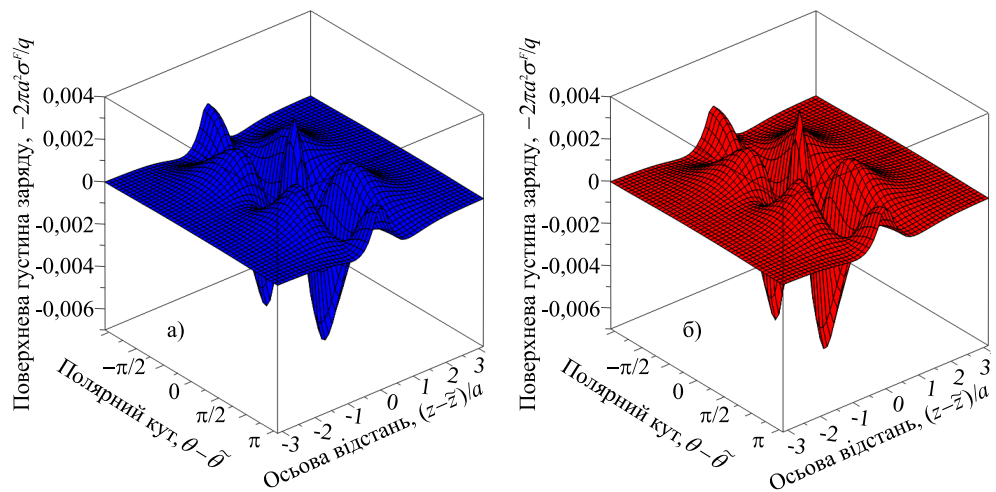


Рис. 3. Нормована помірковано релятивістська поправка $-2\pi a^2 \sigma^F/q$ до поверхневої густини заряду, наведеного точковою макрочастинкою заряду q , яка рухається із швидкістю $\tilde{v}_\perp = 0,1c$ рівномірно по колу на фіксованій радіальній відстані \tilde{r}_0 від осі необмеженої колової циліндричної камери дрейфу, як функція $\theta - \tilde{\theta}(t)$ та $z - \tilde{z}(t)$: а) $\tilde{r}_0 = 0,3a$; б) $\tilde{r}_0 = 0,5a$; a — радіус камери дрейфу

струмом, квадратичним за компонентами безрозмірної швидкості, буде від трьох до чотирьох разів меншим ніж в аналогічній ситуації, розглянутій вище.

Розрахунки величини внесків поверхневих густин зарядів $\sigma^F(t, \vec{x}_\Sigma)$ і струмів $\vec{\kappa}(t, \vec{x}_\Sigma)$ у силу взаємодії між макрочастинкою, яка наводить ці густини зарядів та струмів, і цими самими поверхневими зарядами та струмами, і в цьому випадку засвідчують правильність застосування наближення дарвінівської моделі аж до швидкостей $0,9c$.

У цій статті у першому пост-ньютонівському наближенні – дарвінівській моделі – продемонстровано розрахунок помірковано релятивістських поправок до поверхневої густини заряду (порівняйте з [14]) та поверхневої густини струму, наведених точковим зарядом, що рухається довільно в заземленій ідеально провідній необмеженій коловій циліндричній камері дрейфу. Розповсюдження отриманих результатів на випадок обмежених колових циліндричних камер дрейфу є нескладним, але досить громіздким завданням, яке вирішують як і в нерелятивістському випадку (див. додаток у [8]). Підтверджено область застосовності наближення дарвінівської моделі аж до швидкостей заряджених частинок порядку $0,9c$ (c — швидкість світла у вакуумі). Врахування наведених густин поверхневих зарядів та струмів є досить важливим в обчисленнях за методом точкових взаємодіючих частинок (див. [15] та [8]) динаміки сильнострумових криволінійних електронних пучків, що можуть рухатися в тому числі і на близьких відстанях від стінок колової циліндричної камери дрейфу.

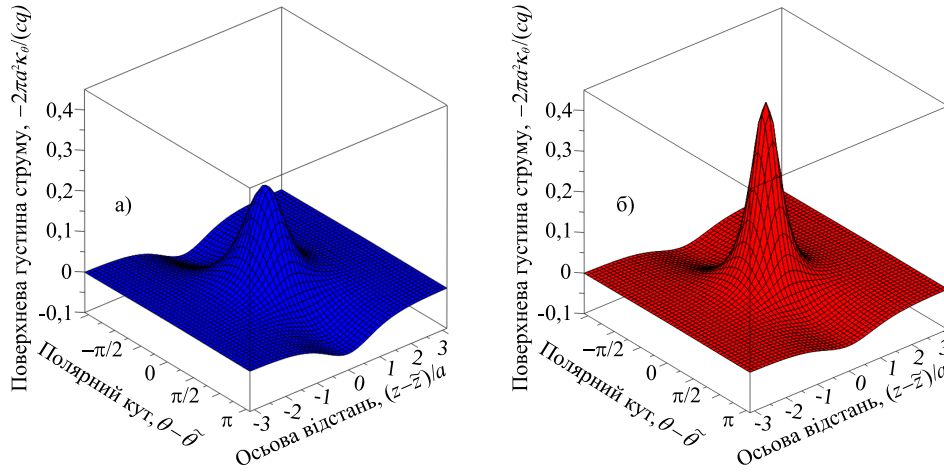


Рис. 4. Нормована компонента $-2\pi a^2 \kappa_\theta / (cq)$ поверхневої густини струму, наведеного точковою макрочастинкою заряду q , яка рухається зі швидкістю $\tilde{v}_\perp = 0,1c$ рівномірно по колу на фіксованій радіальній відстані \tilde{r}_0 від осі необмеженої колової циліндричної камери дрейфу, як функція $\theta - \tilde{\theta}(t)$ та $z - \tilde{z}(t)$: а) $\tilde{r}_0 = 0,3a$; б) $\tilde{r}_0 = 0,5a$; a — радіус камери дрейфу

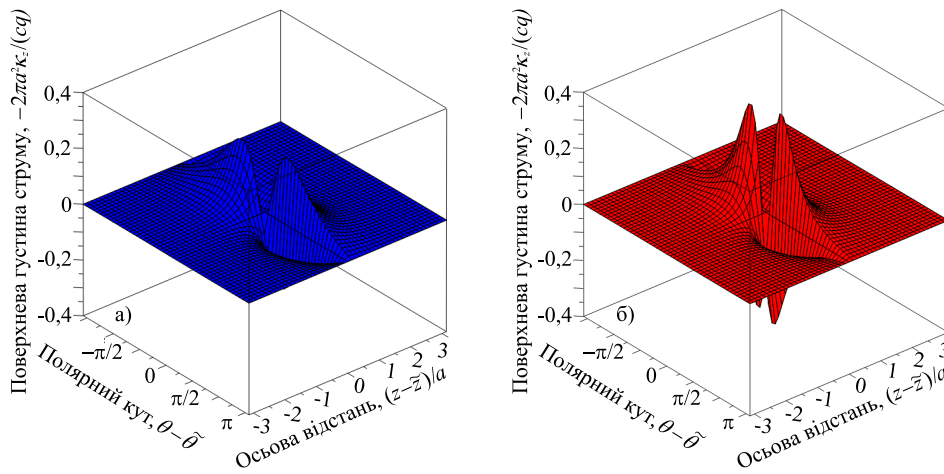


Рис. 5. Нормована компонента $-2\pi a^2 \kappa_z / (cq)$ поверхневої густини струму, наведеного точковою макрочастинкою заряду q , яка рухається зі швидкістю $\tilde{v}_\perp = 0,1c$ рівномірно по колу на фіксованій радіальній відстані \tilde{r}_0 від осі необмеженої колової циліндричної камери дрейфу, як функція $\theta - \tilde{\theta}(t)$ та $z - \tilde{z}(t)$: а) $\tilde{r}_0 = 0,3a$; б) $\tilde{r}_0 = 0,5a$; a — радіус камери дрейфу

Ця робота була частково підтримана (К. Ільєнко) грантом ДФФД України № Ф41/124-2011 у відповідності із “Договором про співробітництво між Державним фондом фундаментальних досліджень і Білоруським республіканським фондом фундаментальних досліджень”.

-
1. *Hess M.* Green's function based space-charge field solver for electron source simulations / M. Hess, C. S. Park, D. Bolton // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* – 2007. – Vol. 10, № 5. – P. 054201(1)–054201(9).
 2. *Goryashko V.* Hybrid planar free-electron maser in the magnetoresonance regime / V. Goryashko, K. Pyenko, A. Opanasenko // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* – 2009. – Vol. 12, № 10. – P. 100701(1)–100701(14).
 3. *Elzhov A. V.* 1.5-dimensional simulation of free electron maser amplifiers / A. V. Elzhov, A. K. Kaminsky, E. A. Perelstein et.al. // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* – 2005. – Vol. 8, № 9. – P. 090701(1)–090701(8).
 4. *Carlsten B. E.* Green's function simulation of space-charge effects in electron beams / B. E. Carlsten, W. B. Haynes, W. T. Roybal, P. J. Tallierico // *IEEE Trans. Plasma Sci.* – 2006. – Vol. 34, № 5. – P. 2404–2413.
 5. *Konoplev I. V.* Experimental and theoretical studies of a coaxial free-electron maser based on two-dimensional distributed feedback / I. V. Konoplev, A. W. Cross, A. D. R. Phelps et al. // *Phys. Rev. E.* – 2007. – Vol. 76, № 5. – P. 056406(1)–056406(12).
 6. *Кураев А. А.* Численные методы оптимизации в задачах электроники СВЧ / А. А. Кураев, И. С. Ковалев, С. В. Колосов — Минск. : Наука и техника, 1975. – 296 с.
 7. *Giannessi L.* Simulation codes for high brightness beam free-electron laser experiments / L. Giannessi // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* – 2003. – Vol. 6, № 11. – P. 114802(1)–114802(17).
 8. *Pyenko K.* Three-dimensional model for Green's function charged-particle-beam simulations in cylindrical geometry / K. Pyenko, T. Yatsenko // *IEEE Trans. Plasma Sci.* – 2011. – Vol. 39, № 2. – P. 659–667.
 9. *Горбик Г.* Обчислення потенціалу, створеного електричним зарядом в циліндричній камері дрейфу / Г. Горбик, К. Ільєнко // *Вісник Львів. ун-ту. Сер. фізична.* – 2007. – Вип. 40. – С. 8–13.
 10. *Goryashko V. A.* Radiated and nonradiated electromagnetic fields in an FEL amplifier / V. A. Goryashko, K. Pyenko, A. N. Opanasenko // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A.* – 2010. – Vol. 620, № 2–3. – P. 462–469.
 11. *Кураев А. А.* КПД релятивистских приборов О-типа с учетом энергии взаимодействия электронов / А. А. Кураев, Н. А. Кураев, А. К. Синецын // *Радиотехника и электроника.* – 1991. – Т. 36, № 11. – С. 2179–2185.

12. *Larsson J.* Electromagnetics from a quasistatic perspective / J. Larsson // *Am. J. Phys.* 2007. Vol. 75, № 3. P. 230–239.
13. *Ільєнко К.* Ab initio calculation of four-vector potential and electromagnetic field for a charge moving arbitrarily in a cylindrical drift tube / К. Ільєнко, Г. М. Горбик, Т. Ю. Яценко // *Proc. IEEE Region 8 Int. Conf. Comput. Technol. Elect. Electron. Eng.* – Novosibirsk, Russia, 21–25 July 2008. – P. 337–342.
14. *Ільєнко К. В.* К расчету силы, действующей на движущийся заряд в цилиндрической камере дрейфа / К. В. Ільєнко, Г. М. Горбик, Т. Ю. Яценко // *Радиофизика и электроника.* – 2004. – Т. 9, № 3. – С. 556–561.
15. *Fubiani G.* Space charge modeling of dense electron beams with large energy spreads / G. Fubiani, J. Qiang, E. Esarey, W. P. Leemans // *Phys. Rev. ST Accel. Beams.* – 2006. – Vol. 9, № 6. – P. 064402(1)–064402(44).

**CALCULATION OF QUASISTATIC SURFACE CHARGE
AND CURRENT DENSITIES INDUCED BY A MODERATELY
RELATIVISTIC ELECTRIC CHARGE THAT MOVES
ARBITRARILY IN CYLINDRICAL DRIFT TUBE**

К. Ільєнко, Т. Яценко

*Usikov Institute for Radiophysics and Electronics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
Ac. Proskury str., 12, 61085 Kharkiv, Ukraine
e-mail: k.ilyenko@gmail.com*

Using the Darwin model and the method of Green's function, we calculate the surface charge and current densities induced by a point-like electric charge that moves arbitrarily in a grounded, ideally conducting circular cylindrical drift tube. We present the results of analytical derivation of the quasi-static (evanescent, i.e. propagating with the speed of a point-like charge) electric and magnetic fields, which constitute together the complete space-charge field of a moderately relativistic charged-particle beam. We explore applicability of the expressions obtained by us for numerical modelling of totally three-dimensional dynamics of the charged-particle beams using the point-to-point interaction (PPI) method in the moderately relativistic approximation.

Key words: Darwin model, method of Green's function, PPI method.

**РАСЧЕТ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ
ПЛОТНОСТЕЙ ЗАРЯДА И ТОКА, НАВЕДЕННЫХ
УМЕРЕННО РЕЛЯТИВИСТСКИМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ
ЗАРЯДОМ, КОТОРЫЙ ДВИЖЕТСЯ ПРОИЗВОЛЬНО
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАМЕРЕ ДРЕЙФА**

К. Ільєнко, Т. Яценко

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова
Национальной академии наук Украины
ул. Ак. Проскуры, 12, 61085 Харьков, Украина
e-mail: k.ilyenko@gmail.com*

Используя дарвиновскую модель, методом функции Грина, вычисляются поверхностные плотности заряда и тока, наведенные точечным зарядом, который движется произвольным образом в заземленной идеально проводящей круговой цилиндрической камере дрейфа. Приводятся результаты аналитического расчета квазистатических (нераспространяющихся) электрического и магнитного полей, которые вместе образуют полное поле пространственного заряда умеренно релятивистского пучка заряженных частиц. Выясняется применимость полученных выражений для численного моделирования полностью трехмерной динамики заряженных пучков методом точечных взаимодействующих частиц в умеренно релятивистском приближении.

Ключевые слова: дарвиновская модель, метод функции Грина, метод точечных взаимодействующих частиц.

Статтю отримано: 27.04.2011
Прийнято до друку: 14.07.2011