

УДК 517.9  
PACS 05.45

## СИНХРОНІЗАЦІЯ У СИСТЕМІ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ

І. Князь, І. Сайко

*Сумський державний університет  
вул. Римського-Корсакова, 2, 40007 Суми, Україна  
e-mail: knigoria@mail.ru*

Розглянуто явище синхронізації у системі двох періодичних нелінійних осциляторів, що взаємодіють за допомогою спеціального контролера, який слугує частотним фільтром. Показано, що зростання коефіцієнта зворотного зв'язку сприяє реалізації ланцюжка переходів від несинхронного режиму до режиму фазової синхронізації, і навпаки. Показано, що руйнування синхронізації пов'язане зі зміною топології атрактора, що стає фазово-некогерентним. Досліджено можливість реалізації в системі режиму повної синхронізації та синхронізації із затримкою. Теоретичні розрахунки підкріплено комп'ютерним експериментом.

**Ключові слова:** синхронізація, осцилятори, зворотний зв'язок.

Явище синхронізації у коливальних системах різної природи активно вивчають останнім часом і воно викликає великий інтерес з боку науковців [1, 2]. Ефект синхронізації широко вивчається у контексті біологічних та хімічних систем [3, 4], електричних ланцюгів [5], радіофізики та захисту інформації [6] тощо. Для динамічних систем проблеми синхронізації початково були сформульовані у термінах збігу їх характерних частот, які для періодичних систем є просто частотами коливань. Важливішим критерієм синхронізації є встановлення певних стаціонарних різниць між поточними фазами коливань осциляторів. При цьому із захоплення фаз (цей феномен називають фазовою синхронізацією (ФС) [7]) автоматично витікає захоплення частот; зворотне твердження при цьому не є вірним. Синхронізація може проявлятися у встановленні функціонального зв'язку між сигналами, що генеруються взаємодіючими підсистемами (узагальнена синхронізація [8]) або їх повним збігом (повна синхронізація [9]). Досить часто у реальних системах реалізується ще один тип синхронної поведінки, що виражається збігом зсунутих за часом станів взаємодіючих підсистем, — синхронізація із затримкою (або lag synchronization (LS) в англійській літературі) [10].

Виникнення певного балансу між фазами є наслідком встановлення енергетичного балансу, який виникає завдяки їх взаємодії. Зазначимо, що переважна більшість праць, присвячених задачам синхронізації, базується на двох принципово

різних типах зв'язку (залежно від вибору останнього реалізується “зовнішня” або “внутрішня” синхронізація). У першому випадку вільна ведуча система, діючи як зовнішня сила, керує веденою системою; як наслідок виникає “ефект” захоплення підсистемою частоти зовнішньої сили [9, 11]. Другий випадок реалізується у сітках осциляторів за наявності зв'язку, що є подібним до дифузійного [12, 13].

Предметом розгляду статті є реалізація різних режимів синхронізації у системі неідентичних нелінійних осциляторів зі зворотним зв'язком. Ми застосуємо принципово іншу схему взаємодії, що передбачає наявність спеціального контролера (згладжуючий фільтр, модель якого представлена нелінійним диференціальним рівнянням першого порядку), на вхід якого подаються фазові координати осциляторів [14]. Вихідний сигнал, помножений на коефіцієнт зворотного зв'язку (КЗЗ), додається до взаємодіючих систем, змінюючи їхні часові масштаби. Такий принцип зв'язку, на нашу думку, є цілком природним, реалізується у багатьох реальних системах (нейронні сітки, екологічні системи, електричні ланцюги тощо) і широко використовується у технічних пристроях (телекомунікація, радіолокація тощо) [15–18].

Модель динамічної системи із зворотним зв'язком була побудована у такий спосіб:

$$\begin{aligned}\frac{dx_{1,2}}{dt} &= y_{1,2}, \\ \frac{dy_{1,2}}{dt} &= -\omega_{1,2}(t)x_{1,2} + \mu_{1,2}(1 - x_{1,2}^2)y_{1,2},\end{aligned}\tag{1}$$

де  $(x_{1,2}, y_{1,2})$  — стан першого та другого осциляторів, відповідно,  $\omega_{1,2}(t)$  — частоти,  $\mu_{1,2}$  — константи.

У випадку  $\omega_{1,2}(t) = \text{const}$  система (1) представляє собою популярну модель теорії коливань та нелінійної динаміки — модель Ван дер Поля [19–21]. Керуючий вплив  $\eta(t)$ , помножений на КЗЗ  $\kappa$ , уводиться до кожної із підсистем так:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \omega_{(0)1} + \omega_{(0)1}\kappa\eta(t), \\ \omega_2(t) &= \omega_{(0)2} - \omega_{(0)2}\kappa\eta(t),\end{aligned}\tag{2}$$

де  $\omega_{(0)1,2}$  — власна частота коливань осциляторів 1 та 2 відповідно.

Еволюція  $\eta(t)$  задається рівнянням

$$\frac{d\eta}{dt} = -a\eta + x_1y_2,\tag{3}$$

де  $a > 0$  — параметр контролера.

Схема робота фільтра виглядає у наступний спосіб: два сигнали  $x_1$  та  $x_2$  формують періодичний сигнал, спектр якого представляється низькочастотною, що визначається різницею  $\Omega_1 - \Omega_2$ , та високочастотною, що визначається сумою  $\Omega_1 + \Omega_2$ , складовими, де  $\Omega_1, \Omega_2$  — середні частоти коливань (характерні часові масштаби) першого та другого осциляторів відповідно. Сукупний сигнал пропускатиметься через фільтр (3), який за умови  $\omega_{(0)1} + \omega_{(0)2} > a$ , глушить високочастотну складову. Після фільтрації сигнал  $\eta(t)$  додається до кожної із підсистем,

змінюючи їхні характерні часові масштаби. У результаті встановлюється певний баланс між часовими масштабами, тобто  $\Omega_1 = \Omega_2$ .

Для діагностики та кількісного аналізу синхронізації нам необхідно ввести відповідні характеристики, якими є фаза та амплітуда сигналу. Зазначимо, що не існує універсального способу уведення фази сигналу, який би давав коректні результати для будь яких динамічних систем. Для систем із простою топологією хаотичного атратора (проекція фазової траєкторії на певну площину станів  $(x, y)$  увесь час обертається навколо початку координат (не перетинаючи та не огинаючи його) миттєва фаза  $\varphi(t)$  може бути уведена як кут у полярній системі координат на площині  $(x, y)$  [10]:

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)}. \quad (4)$$

При комп'ютерному моделюванні зручнішим способом визначення фази є використання поверхні перетину Пуанкаре, так що фаза визначається як

$$\varphi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (5)$$

де  $t_n$  — момент часу, який відповідає  $n$ -му перетину поверхні Пуанкаре фазовою траєкторією.

Для систем з простою топологією атратора формули (4) та (5) дають практично однакові результати: динаміка миттєвої фази для обох методів незначно відрізнятиметься на інтервалах часу, що є меншими за характерний період повернення фазової траєкторії до поверхні перетину Пуанкаре [1]. Відповідно амплітуду сигналу визначають як

$$A = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (6)$$

а середню частоту сигналу  $\Omega$  — як середню швидкість зміни фази

$$\Omega = \left\langle \frac{d}{dt} \varphi(t) \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varphi(T) - \varphi(0)}{T}. \quad (7)$$

Режим фазової синхронізації означає, що фази  $\varphi_{1,2}(t)$  сигналів взаємодіючих систем стають захопленими, тобто

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \text{const}. \quad (8)$$

Очевидно, що захоплення фаз автоматично пов'язане із захопленням частот, які стають однаковими для взаємодіючих систем. З метою повної синхронізації або синхронізації із затримкою кількісну міру синхронізації ми будемо визначати як міру збігу часових реалізацій взаємодіючих підсистем. Придатним критерієм такого збігу є значення функції  $S(\tau)$ :

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{\langle (x_2(t + \tau) - x_1(t))^2 \rangle}{\sqrt{\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle}}}. \quad (9)$$

У випадку повної синхронізації мінімум функції (9) досягається при  $\tau = 0$ ; у випадку синхронізації із затримкою — при деякому позитивному значенні  $\tau$ . Якщо сигнали  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  незалежні, різниця між ними є того самого порядку що і самі сигнали; відповідно,  $S(\tau) \sim 1$  для усіх  $\tau$ .

Зазначимо, що динаміка класичної системи Ван дер Поля не є хаотичною. Однак поняття фази сигналу, хаотичної фазової синхронізації та фазової когерентності атрактора можна легко застосувати і в нашому випадку, аналогічно до того, як це робиться у разі розгляду поведінки хаотичних осциляторів.

Для розвитку наближеної теорії фазової синхронізації в моделі (1)–(3) перейдемо до полярних координат:  $x_{1,2} = A_{1,2} \cos \varphi_{1,2}$ ,  $y_{1,2} = A_{1,2} \sin \varphi_{1,2}$ . Перепишучи систему (1)–(3) у змінних (4), (6), маємо

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{1,2} \frac{dA_{1,2}}{dt} - A_{1,2} \sin \varphi_{1,2} \frac{d\varphi_{1,2}}{dt} &= A_{1,2} \sin \varphi_{1,2}, \\ \sin \varphi_{1,2} \frac{dA_{1,2}}{dt} + A_{1,2} \cos \varphi_{1,2} \frac{d\varphi_{1,2}}{dt} &= -\omega_{1,2} A_{1,2} \cos \varphi_{1,2} + \mu_{1,2} A_{1,2} \sin \varphi_{1,2} - \\ &\quad - \mu_{1,2} A_{1,2}^3 \cos^2 \varphi_{1,2} \sin \varphi_{1,2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -a\eta + A_1 A_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2.$$

Ділячи перше та друге рівняння системи (10) на  $\sin \varphi_{1,2}$  та  $\cos \varphi_{1,2}$ , відповідно, та віднімаючи від першого друге, маємо

$$\begin{aligned} \left( \frac{\cos \varphi_{1,2}}{\sin \varphi_{1,2}} - \frac{\sin \varphi_{1,2}}{\cos \varphi_{1,2}} \right) \frac{dA_{1,2}}{dt} - 2A_{1,2} \frac{d\varphi_{1,2}}{dt} &= A_{1,2} + \omega_{1,2} A_{1,2} - \\ &\quad - \mu_{1,2} A_{1,2} \frac{\sin \varphi_{1,2}}{\cos \varphi_{1,2}} + \mu_{1,2} A_{1,2}^3 \cos \varphi_{1,2} \sin \varphi_{1,2}. \end{aligned}$$

За малих  $\mu_{1,2}$  амплітуда  $A_{1,2}$  змінюється дуже повільно, тобто  $dA_{1,2}/dt \approx 0$ . Спростуючи останнє рівняння, перепишемо його у вигляді системи:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{1,2}}{dt} &= -\frac{1}{2}(1 + \omega_{1,2}), \\ A_{1,2}^2 \cos \varphi_{1,2} \sin \varphi_{1,2} &= \frac{\sin \varphi_{1,2}}{\cos \varphi_{1,2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Використовуючи співвідношення (2), наведемо перше рівняння системи (11) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= -\frac{1}{2}(1 + \omega_{(0)1} + \omega_{(0)1} \kappa \eta(t)), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= -\frac{1}{2}(1 + \omega_{(0)2} - \omega_{(0)2} \kappa \eta(t)). \end{aligned} \quad (12)$$

Звідси

$$\frac{d}{dt} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} (\omega_{(0)2} - \omega_{(0)1}) - \frac{1}{2} \kappa \eta(t) (\omega_{(0)2} + \omega_{(0)1}). \quad (13)$$

Уводячи “повільну” фазу  $\theta_{1,2}$  (відповідно до співвідношення  $\varphi_{1,2} = \omega_{(0)1,2}t + \theta_{1,2}$ ), розкладаючи добуток  $\sin \varphi_{1,2} \cos \varphi_{1,2}$  третього рівняння системи (10) на швидко та повільно осцилюючу складові, усереднюємо рівняння для  $\eta(t)$  та рівняння (13). Оскільки фільтр (3) пригнічує “високі” частоти, а друге рівняння системи (11) показує, що  $\langle A_{1,2}^2 \rangle \approx 4$ , остаточно одержимо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\theta_1 - \theta_2) &= \frac{1}{2}(\omega_{(0)2} - \omega_{(0)1}) - \frac{1}{2}\kappa\eta(t) (\omega_{(0)2} + \omega_{(0)1}), \\ \frac{d\eta}{dt} &= -a\eta - 2 \sin (\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Представляючи систему (14) у вигляді рівняння другого порядку, маємо

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\theta_1 - \theta_2) + a \frac{d}{dt} (\theta_1 - \theta_2) - \frac{a}{2}(\omega_{(0)2} - \omega_{(0)1}) - \\ - \kappa(\omega_{(0)2} + \omega_{(0)1}) \sin (\theta_1 - \theta_2) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Звідси доходимо висновку, що умовою фазового захоплення є виконання рівності

$$\sin (\theta_1 - \theta_2) = -\frac{a(\omega_{(0)2} - \omega_{(0)1})}{2\kappa(\omega_{(0)2} + \omega_{(0)1})}, \quad (16)$$

реалізація якої можлива в діапазоні

$$\kappa > \frac{a |\omega_{(0)2} - \omega_{(0)1}|}{2 (\omega_{(0)2} + \omega_{(0)1})}. \quad (17)$$

Отже, критичне значення КЗЗ  $\kappa_p$ , при якому відбувається перехід до режиму фазової синхронізації:  $\kappa_p = a |\omega_{(0)2} - \omega_{(0)1}| / 2 (\omega_{(0)2} + \omega_{(0)1})$ .

На рис. 1 показано ділянку синхронізації (ОС) системи у площині параметрів КЗЗ та різниці власних частот підсистем 1 та 2. Суцільна крива відповідає границі встановлення режиму синхронізації. Наявність синхронного режиму визначалась виконанням умови захоплення фаз (17). З рисунку видно, що у випадку малого розладу частот, синхронний режим реалізується вже за достатньо малих значень КЗЗ. У разі лінійного збільшення розладу фазова синхронізація можлива за умови логарифмічного збільшення КЗЗ.

Комп’ютерне моделювання процесів синхронізації у запропонованій системі проводилося на основі безпосереднього чисельного розв’язку рівнянь (1)–(3) за методом Ейлера–Кромера з кроком інтегрування  $h = 0,001$ . Початкові умови вибиралися випадково, перехідний процес довжиною  $T = 200$  був опущений. Керуючий вплив включався у момент  $t = 200$  після виходу траєкторії на граничний цикл. На рис. 2 представлено фазові портрети взаємодіючих осциляторів, еволюція фаз та динаміка їх різниці при поступовому збільшенні КЗЗ. За відсутності взаємодії між осциляторами (рис. 2,  $a1 - a3$ ) єдиним атрактором на фазовій

площині є граничний цикл. При включенні керуючого впливу фазові траєкторії “розмиваються” у просторі: атрактор кожної із взаємодіючих підсистем стає хаотичним (перехід до хаотичної динаміки визначався за показниками Ляпунова). При збільшенні КЗЗ до 0,075 у системі відбувається фазова синхронізація, що відображається виходом кривої різниці фаз на стаціонарний рівень (рис. 2, в3). Отримане критичне значення КЗЗ добре узгоджується з результатами теоретичного аналізу: відповідно до (17) теоретичне значення КЗЗ при даних параметрах підсистем становить  $\kappa_p \approx 0,083$ . У діапазоні  $\kappa \in [0,075; 0,3]$  коливання підсистем залишаються синхронізованими. При збільшенні  $\kappa$  ( $\kappa > 0,3$ ) замість очікуваного режиму повної синхронізації простежується зворотний ефект: синхронізація руйнується (рис. 2, г2, г3), атрактори підсистем (як це показано на рис. 2, г1) стають фазово-некогерентними (топология ускладнюється, фазова траєкторія перетинає вісь абсцис ліворуч від початку координат). Отож, у цьому випадку руйнування режиму фазової синхронізації еквівалентне руйнуванню фазової когерентності атрактора.

Отже, у разі збільшення КЗЗ у системі виникає реверсивний перехід до режиму фазової синхронізації. Зазначимо, що наближення теоретичного аналізу, наведеного вище, стосуються лише випадку наявності фазово-когерентного атрактора. Отже, умова (17) не враховує зміну топології атрактора і, відповідно, наявність критичної точки у домені значень КЗЗ, при перевищенні якої топология атрактора ускладнюється. Ми порівняли результати теоретичного аналізу з результатами комп’ютерного експерименту із визначення точки переходу до синхронного режиму. Як показано на рис. 3, результати якісно збіглися, що засвідчує дієвість розвиненої теоретичної схеми аналізу даної системи.

За однакових значень параметра нелінійності  $\mu_1 = \mu_2$  у системі можлива реалізація режиму синхронізації із затримкою. На рис. 4 показано функцію (9) за різних значень КЗЗ. За малих значень КЗЗ ( $\kappa < \kappa_p$ ) (криві 1 та 2),  $S \sim 1$  і

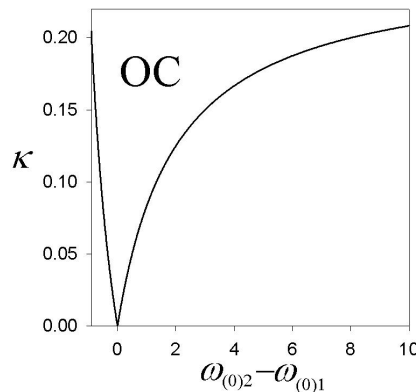


Рис. 1. Залежність критичного значення КЗЗ  $\kappa$  від різниці власних частот взаємодіючих підсистем  $\omega_{(0)2} - \omega_{(0)1}$  при  $a = 0,5$ . Ділянка фазової синхронізації (ОС) розміщена вище кривої

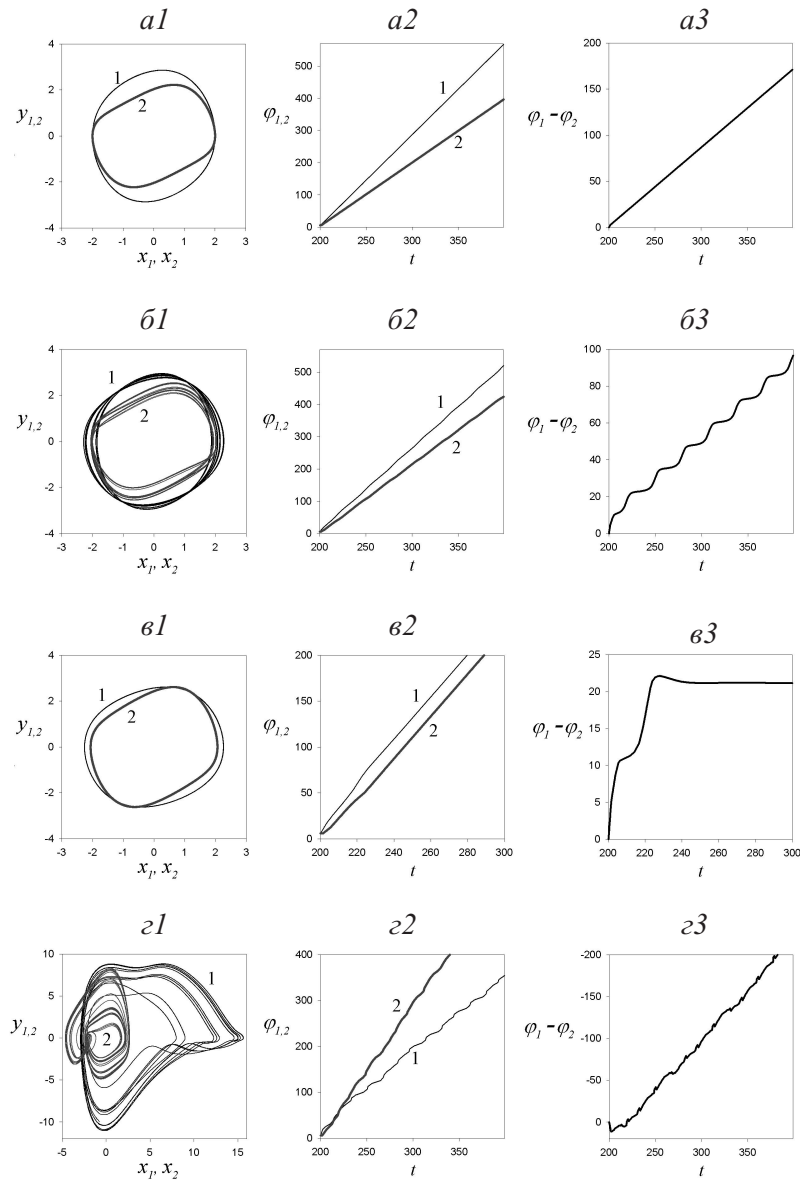


Рис. 2. Фазові портрети осциляторів (*a1–г1*), часова еволюція фаз (*a2–г2*) та динаміка їх різниці (*a3–г3*) на інтервалі  $t \in [200; 400]$  при різних значеннях КЗЗ. Рисунок *a1–a3* відповідають випадку  $\kappa = 0$  (осцилятори без взаємодії); *б1–б3* —  $\kappa = 0,06$ ; *в1–в3* —  $\kappa = 0,075$ ; *г1–г3* —  $\kappa = 0,32$ . Значення інших параметрів:  $\omega_{(0)1} = 2$ ;  $\omega_{(0)2} = 1$ ;  $\mu_1 = 0,2$ ;  $\mu_2 = 0,5$ ;  $a = 0,5$ . Криві, що відповідають першому та другому осциляторам, позначені цифрами 1 та 2, відповідно

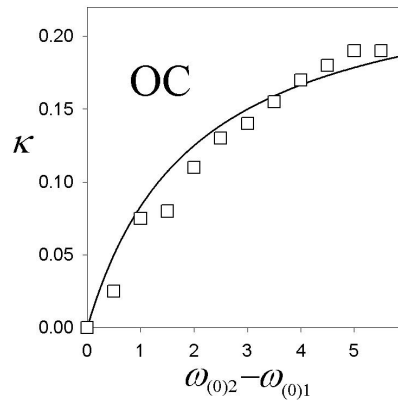


Рис. 3. Залежність критичного значення КЗЗ  $\kappa$  від величини розладу  $\omega_{(0)2} - \omega_{(0)1}$  коли  $a = 0,5$ ,  $\mu_1 = 0,2$ ,  $\mu_2 = 0,5$ ; суцільна крива — теоретичні розрахунки відповідно до (17);  $\square$  — експеримент

практично не залежить від часу затримки  $\tau$ , що і очікувалося для незалежних сигналів. У разі збільшення  $\tau$  (крива 3) на залежності  $S(\tau)$  з'являється мінімум, що відображає існування характерного часового зсуву між  $x_1$  та  $x_2$ . Відносно великі значення  $S(\tau)$  пов'язані із некорельованістю амплітуд сигналів. З подальшим збільшенням КЗЗ мінімум стає чітко вираженим і у точці  $\tau = \tau_{\min}$  функція збігу  $S(\tau) \approx 0$ . Це означає, що стани обох підсистем, що є зсунутими за часом на  $\tau_{\min}$ , збігаються. Подальше збільшення КЗЗ приводить до експоненціально-повільного зсуву мінімуму  $S(\tau)$  ліворуч. Зазначимо, що руйнування синхронізації відбувається раніше ніж мінімум опиниться у точці  $\tau_{\min} = 0$ . Отже, очікуваного режиму повної синхронізації ми не виявили.

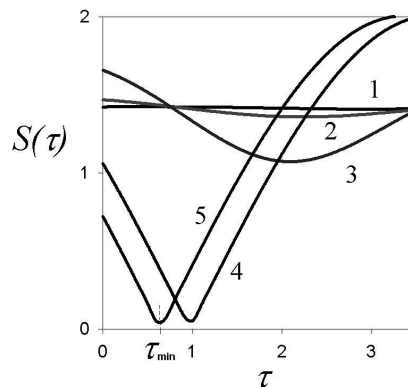


Рис. 4. Функція  $S(\tau)$  за різних значень КЗЗ (1:  $\kappa = 0$ ; 2:  $\kappa = 0,01$ ; 3:  $\kappa = 0,05$ ; 4:  $\kappa = 0,08$ ; 5:  $\kappa = 0,2$ );  $a = 0,5$ ;  $\mu_1 = \mu_2 = 0,2$



Оскільки один зі способів діагностики встановлення синхронного режиму у динамічних системах — це безпосереднє порівняння станів систем, часові реалізації  $x_2(t)$  та  $x_1(t)$  були зіставлені одна до одної. Якісна різниця між фазовою синхронізацією та синхронізацією представлена на рис. 5, а та рис. 5, б та рис. 5, г, де часовий зсув відповідає мінімуму функції (9). З рис. 5, г видно, що отримане відображення представляє собою практично пряму лінію — стани обох осциляторів, що є зсунутими на час затримки, збігаються.

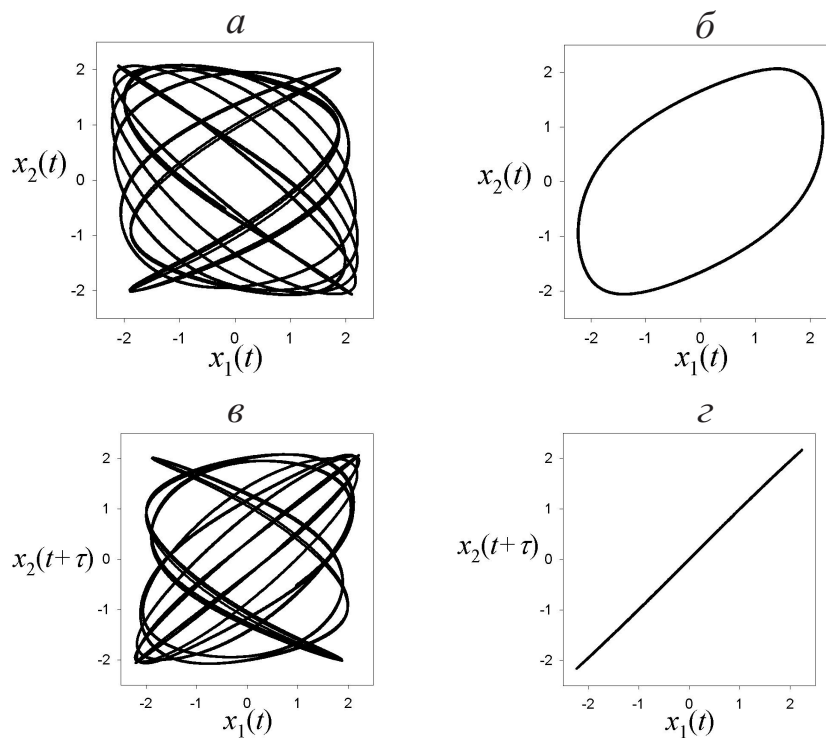


Рис. 5. Проекція атратора системи зв'язаних осциляторів на площину  $(x_1(t), x_2(t))$  та залежності  $x_2(t + \tau)$  від  $x_1(t)$  за різних значень КЗЗ; (а, в)  $\kappa = 0,05$ ,  $\tau = 0,21$  — режим фазової синхронізації; (б, г)  $\kappa = 0,08$ ,  $\tau = 0,82$  — режим синхронізації із затримкою; інші параметри відповідають рис. 4

Отже, у представленій роботі досліджено особливості реалізації синхронних режимів у системі ідентичних нелінійних осциляторів із зворотним зв'язком. Показано, що в разі збільшення коефіцієнта зворотного зв'язку у вузькому домені значень даного параметру можлива реалізація різних режимів фазової синхронізації: синхронізації із затримкою (за однакових параметрів підсистем) та фазової синхронізації. Має місце реверсивний перехід, аналогічний реверсивним фазовим

переходам у фізичних системах [22]: поступове збільшення параметра зв'язку приводить спочатку до виникнення фазової синхронізації, а потім до її руйнування. Процес руйнування синхронізації пов'язаний із зміною топології атракторів підсистем, які стають фазово-некогерентними.

1. *Pikovsky A. S.* Synchronization — A Universal Concept in Nonlinear Sciences / A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, J. Kurths. — Cambridge : Cambridge University Press, 2001.
2. *Anshchenko V. S.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Sochastic Systems. Tutorial and Modern Developments / V. S. Anshchenko, V. Astakhov, A. Neiman et. al. — Heidelberg : Springer-Verlag, 2001.
3. *Schreiber I.* Strange Attractors in Coupled Reaction — Diffusion Cells I / I. Schreiber, M. Marek // *Physica D.* — 1982. — Vol. 5D, № 2+3. — P. 258–272.
4. *Han S. K.* Dephasing and bursting in coupled neural oscillators / S. K. Han, C. Kurrer, Y. Kuramoto // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 75. — P. 3190–3193.
5. *Heagy J. F.* Synchronous chaos in coupled oscillator systems / J. F. Heagy, T. L. Caroll, L. M. Pecora // *Phys. Rev. E.* — 1994. — Vol. 50. — P. 1874–1884.
6. *Дмитриев А. С.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи / А. С. Дмитриев, А. И. Панас. — М. : Физматлит, 2002.
7. *Rosemblum M. G.* Phase synchronization of chaotic oscillators / M. G. Rosemblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 76, № 11. — P. 1804–1807.
8. *Афраймович В. С.* Стохастическая синхронизация колебательных диссипативных систем / В. С. Афраймович, Н. Н. Веричев, М. И. Рабинович // *Известия ВУЗов : Радиофизика.* — 1986. — Т. 29. — С. 1050–1060.
9. *Pecora L. M.* Synchronization in chaotic systems / L. M. Pecora, T. L. Carroll // *Phys. Rev. Lett.* — 1990. — Vol. 64, № 8. — P. 821–824.
10. *Rosemblum M. G.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators / M. G. Rosemblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78, № 22. — P. 4193–4196.
11. *Kocarev L.* Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems / L. Kocarev, U. Parlitz // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 76, № 11. — P. 1816–1819.
12. *Малафеев В. М.* О процессе синхронизации автогенераторов, связанных через проводимость / В. М. Малафеев, М. С. Полякова, Ю. М. Романовский // *Известия ВУЗов : Радиофизика.* — 1970. — Т. 13, № 6. — С. 936–940.
13. *Мынбаев Д. К.* Взаимная фазовая синхронизация генераторов, соединенных по кольцевой схеме / Д. К. Мынбаев, М. И. Шиленков // *Радиотехника и электроника.* — 1981. — № 2. — С. 361–370.
14. *Belykh V. N.* Automatic control of phase synchronization in coupled complex oscillators / V. N. Belykh, G. V. Osipov, N. Kucklander et. al. // *Physica D.* — 2004.

15. *Rabinovich M.* Dynamical Encoding by Networks of Competing Neuron Groups: Winnerless Competition / M. Rabinovich, A. Volkovskii, P. Lecanda et. al. // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – Vol. 87, № 6. – P. 068102.
16. *Murray J. D.* *Mathematical Biology* / J. D. Murray. – Berlin : Springer, 1989.
17. *Braiman Y.* Entrainment of solid state laser arrays / Y. Braiman, T. A. B. Kennedy, K. Wiesenfeld, A. Khibnik // *Phys. Rev. A.* – 1995. – Vol. 52. – P. 150–1506.
18. *Lindsey W. C.* *Synchronization Systems in Communication and Control* / W. C. Lindsey. – Prentice-Hall : Englewood Cliffs, NJ, 1972.
19. *Van der Pol B.* Forced oscillators in a circuit with nonlinear resistance / Van der Pol B. // *Phil. Mag.* – 1927. – Vol. 3. – P. 64–80.
20. *Андронов А. А.* Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, Ю. Э. Хайкин. – М. : Гостехиздат, 1937.
21. *Minorsky N.* *Nonlinear Oscillations* / N. Minorsky. – Princeton, NJ : Van Nostrand, 1962.
22. *Харченко Д. О.* Флюктуаційні фазові переходи в синергетичній системі дефектів / Д. О. Харченко, І. О. Князь // *Журн. фіз. досл.* – 2004. – Т. 8, № 4. – С. 299–307.

## SYNCHRONIZATION IN A NONLINEAR SYSTEM OF OSCILLATORS WITH FEEDBACK

I. Knyaz, I. Sayko

*Sumy State University*

*Rimskogo-Korsakova str., 2, 40007 Sumy, Ukraine*

*e-mail: knigorua@mail.ru*

The effect of synchronization is considered for a system of two periodic nonlinear oscillators interacting via a special controller that acts as a frequency filter. It is shown that increasing feedback coefficient leads to a chain of transitions from a free-running regime to a phase synchronization one, and vice versa. It is shown that breaking of the synchronization regime is due to changing topology of attractor, which becomes phase incoherent. Possibilities for the complete and lag synchronization regimes are studied. The theoretical calculations are validated by means of computer experiment.

**Key words:** synchronization, oscillators, feedback.

## СИНХРОНИЗАЦИЯ В СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

И. Князь, И. Сайко

*Сумский государственный университет  
ул. Римского-Корсакова, 2, 40007 Сумы, Украина  
e-mail: knigoua@mail.ru*

Рассмотрено явление синхронизации в системе двух периодических нелинейных осцилляторов, взаимодействующих посредством специального контроллера, играющего роль частотного фильтра. Показано, что увеличение коэффициента обратной связи приводит к реализации цепочки переходов от несинхронного режима к режиму синхронизации и наоборот. Показано, что разрушение синхронизации связано с изменением топологии аттрактора, который становится фазово-некогерентным. Исследована возможность реализации в системе полной синхронизации и синхронизации с задержкой. Теоретические расчеты подтверждены компьютерным экспериментом.

**Ключевые слова:** синхронизация, осцилляторы, обратная связь.

Статтю отримано: 19.05.2010  
Прийнято до друку: 14.07.2011