

УДК 524.31.084, 524.384, 524.352.3  
PACS 97.20Rp, 97.60Bw

# СТАТИСТИЧНИЙ ОПИС ЕЛЕКТРОН-ЯДЕРНОЇ МОДЕЛІ В ТЕОРІЇ ВИРОДЖЕНИХ КАРЛИКІВ. I. КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ЕЛЕКТРОННОЇ ПІДСИСТЕМИ

М. Ваврух<sup>1</sup>, Д. Дзіковський<sup>1</sup>, В. Солов'ян<sup>2</sup>,  
Н. Тишко<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Львівський національний університет імені Івана Франка,  
кафедра астрофізики, вул. Кирила і Мефодія, 8, 79005 Львів,  
Україна  
e-mail: mvavrukh@gmail.com

<sup>2</sup> Інститут фізики конденсованих систем НАН України,  
вул. Свенціцького, 1, 79011 Львів, Україна

Базисний підхід, запропонований авторами раніше для опису моделі електронної рідини в нерелятивістській теорії металів, адаптовано до розрахунку характеристик однорідної електрон-ядерної моделі при густинах, характерних для вироджених карликів. Досліджено і розраховано дво- та тричастинкові кореляційні функції ідеальної виродженої релятивістської системи електронів, а також кореляційні функції моделі з кулонівськими міжчастинковими взаємодіями, яка відіграє роль статистичного базису для опису внесків електрон-ядерних взаємодій. Вперше виконано акуратні розрахунки поправки на локальне поле базисної моделі як у статичному, так і динамічному випадках.

**Ключові слова:** електрон-ядерна модель,  $n$ -частинкові кореляційні функції, параметр релятивізму, кулонівські взаємодії, поправка на локальне поле

## 1 Вступ

Електрон-ядерна модель є основою теорії вироджених карликів, адже вироджений релятивістський електронний газ забезпечує стійкість цих об'єктів, особливістю яких є висока густина речовини: при масах порядку сонячної вони мають розміри порядку  $(1 \div 2) \cdot 10^{-2}$  радіуса Сонця, що відповідає середній густині  $10^5$  г/см<sup>3</sup>. В

таких умовах існування зв'язаних станів електронів на ядрах неможливе, через те, що середні відстані між частинками близькі до  $0,1 \text{ \AA}$ . Тому за електронною структурою вироджені карлики можна класифікувати як найпростіші металічні системи, у яких всі електрони колективізовані. Завдяки високій густині речовини імпульс Фермі має порядок  $m_0c$ , тому для опису моделей карликів незастосовне нерелятивістське наближення, що ускладнює розрахунки, тому що багаточастинкові кореляційні функції виродженої релятивістської моделі електронів з кулонівськими взаємодіями досліджені у значно меншій мірі, аніж моделі нерелятивістської. З іншого боку, релятивістський вироджений електронний газ є слабко неідеальною системою, параметр неідеальності якої

$$e^2 k_F \left\{ [(m_0 c)^2 + \hbar^2 k_F^2 c^2]^{1/2} - 1 \right\}^{-1} = \alpha_0 y \left\{ (1 + y^2)^{1/2} - 1 \right\}^{-1} \quad (1)$$

має порядок  $\alpha_0$  при  $y \gtrsim 1$ , де  $y = \hbar k_F / m_0 c$  – параметр релятивізму, а  $\alpha_0 = e^2 / \hbar c$  – стала тонкої структури. У випадку слабкорелятивістської моделі параметр неідеальності прямує до значення  $2r_s / \eta$ , де  $r_s$  – параметр Вігнера-Бракнера, який фігурує в нерелятивістській теорії металічного стану ( $1,6 < r_s < 5,5$ ;  $\eta = (9\pi/4)^{1/3}$ ). Якщо за масштаб енергії вибрати величину  $m_0 c^2$ , то поправки до енергії та тиску електрон-ядерної моделі при високих густинах за рахунок кулонівських взаємодій будуть виражатися розкладами за степенями сталої тонкої структури, а тому актуальним є врахування лише дво- та тричастинкових електронних кореляцій.

Теорія внутрішньої будови холодних вироджених карликів, розроблена С. Чандрасекаром у 40-х роках минулого століття, ґрунтується на рівнянні стану ідеального виродженого релятивістського електронного газу, що знаходиться у парамагнітній фазі при абсолютному нулі температури [1, 2].

Загальна теорія внутрішньої структури вироджених карликів, яка могла б інтерпретувати всю різноманітність спостережуваних властивостей карликів, повинна враховувати ще багато інших чинників – неповне виродження, змінний хімічний склад, міжчастинкові взаємодії, вплив магнітних полів, осьове обертання, ефекти загальної теорії відносності. Неповне виродження, змінний хімічний склад та міжчастинкові взаємодії є чинниками, притаманними всім без винятку виродженим карликам. Роль міжчастинкових взаємодій належить до найменш вивчених питань у теорії вироджених карликів.

Розрахунки енергетичних характеристик електрон-ядерної моделі ґрунтується на  $n$ -частинкових кореляційних функціях базисної моделі – релятивістської виродженої моделі електронів з кулонівськими взаємодіями при наявності рівномірно розподіленого позитивного заряду ядер. У цій роботі досліджено двочастинкову та тричастинкову кореляційні функції ідеальної релятивістської системи електронів, а також поправку на локальне поле, яка формує  $n$ -частинкові кореляційні функції базисної моделі. Зокрема одержано точну аналітичну формулу для статичної двоелектронної кореляційної функції ідеальної моделі та вивчено залежність кореляційних функцій та поправки на локальне поле від параметра релятивізму.

## 2 Основні співвідношення

Як і в роботі [3], ми розглядаємо електронейтральну макроскопічно однорідну електрон-ядерну модель, що складається з  $N_n$  ядер із зарядом  $z$ , які утворюють нерухому кристалічну ґратку, та  $N_e = zN_n$  електронів в об'ємі  $V$  у термодинамічній границі  $N_e, V \rightarrow \infty$ ,  $N_e/V = const$  при температурах, набагато нижчих за температуру виродження. Гамільтоніан моделі

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_{ee} + \hat{V}_{en} + \hat{V}_{nn} \quad (2)$$

запишемо у змішаному представленні – вторинному квантуванні для електронів та координатному для ядерної підсистеми. Він має такі складові:

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k},s} E_k a_{\mathbf{k},s}^+ a_{\mathbf{k},s} \quad (3)$$

– гамільтоніан вільних релятивістських електронів ( $E_k = \{(m_0c^2)^2 + \hbar^2 k^2 c^2\}^{1/2} - m_0c^2$ ),

$$\hat{V}_{ee} = (2V)^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q \hat{I}_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \quad (4)$$

– оператор міжелектронних взаємодій,

$$\hat{V}_{en} = -V^{-1} z \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q S_{-\mathbf{q}} \hat{\rho}_{\mathbf{q}} \quad (5)$$

– оператор електрон-ядерних взаємодій,

$$\hat{V}_{nn} = z^2 (2V)^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q \{S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} - N_n\} \quad (6)$$

– сума прямих між'ядерних взаємодій. Тут  $V_q = 4\pi e^2/q^2$  – зображення Фур'є кулонівського потенціалу,  $S_{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^{N_n} \exp[i(\mathbf{q}, \mathbf{R}_j)]$  – структурний фактор ядерної підсистеми,

$$\begin{aligned} \hat{I}_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) &= \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \sum_{s_1, s_2} a_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}, s_1}^+ a_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}, s_2}^+ a_{\mathbf{k}_2, s_2} a_{\mathbf{k}_1, s_1}, \\ \hat{\rho}_{\mathbf{q}} &= \sum_{\mathbf{k}, s} a_{\mathbf{k} + \mathbf{q}, s}^+ a_{\mathbf{k}, s}, \end{aligned} \quad (7)$$

$a_{\mathbf{k},s}^+, a_{\mathbf{k},s}$  – оператори породження і знищення електронів у квантових станах із заданим хвильовим вектором  $\mathbf{k}$  і проекцією спіна  $s$ .

Статистичну суму електронної підсистеми у полі ядер у великому канонічному ансамблі

$$Z(\mu) = Sp_e \exp \{-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{N}_e + \hat{V}_{ee} + \hat{V}_{en})\} \quad (8)$$

розрахуємо у базисному підході, розвинутому для опису нерелятивістської електронної рідини [4–7]. У формулі (8)  $\hat{N}_e = \sum_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k},s}^+$ ,  $a_{\mathbf{k},s}$  – оператор числа частинок,  $\mu$  – змінна хімічного потенціалу. Використавши традиційне представлення взаємодії [8], статистичний оператор моделі запишемо у такому вигляді:

$$\exp \{ -\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N}_e + \hat{V}_{ee} + \hat{V}_{en}) \} = \exp [ -\beta\hat{\mathcal{H}}_\mu ] T_\beta \{ \hat{S}_{ee} \hat{S}_{en} \}, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{S}_{ee} &= \exp \left\{ -\int_0^\beta d\beta' \hat{V}_{ee}(\beta') \right\}, \quad \hat{S}_{en} = \exp \left\{ -\int_0^\beta d\beta' \hat{V}_{en}(\beta') \right\}, \\ \hat{V}_{ee}(\beta') &= (2V)^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q \hat{\rho}_{\mathbf{q}}(\beta') \hat{\rho}_{-\mathbf{q}}(\beta'), \\ \hat{V}_{en}(\beta') &= -V^{-1} z \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q S_{-\mathbf{q}} \hat{\rho}_{\mathbf{q}}(\beta'), \\ \hat{\rho}_{\mathbf{q}}(\beta') &= \exp [ \beta' \hat{\mathcal{H}}_\mu ] \hat{\rho}_{\mathbf{q}} \exp [ -\beta' \hat{\mathcal{H}}_\mu ], \end{aligned} \quad (10)$$

а  $\hat{\mathcal{H}}_\mu = \hat{H}_0 - \mu\hat{N}_e$ . Оператор  $T_\beta$  є узагальненим оператором впорядкування з такими властивостями:

$$T_\beta \{ C_1(\beta_1) C_2(\beta_2) \} = \begin{cases} C_1(\beta_1) C_2(\beta_2) & \text{при } \beta_1 > \beta_2; \\ -C_2(\beta_2) C_1(\beta_1) & \text{при } \beta_2 > \beta_1; \end{cases} \quad (11)$$

$$T_\beta \{ a_{\mathbf{k}_1, s_1}(\beta_1) a_{\mathbf{k}_2, s_2}^+(\beta_1) \} = -a_{\mathbf{k}_2, s_2}^+(\beta_1) a_{\mathbf{k}_1, s_1}(\beta_1).$$

Згідно з методикою робіт [4, 6] перейдемо від операторів  $a_{\mathbf{k},s}$  до нових фермі-амплітуд

$$a_{\mathbf{k},s}(\nu^*) = \int_0^\beta a_{\mathbf{k},s}(\beta') \psi_{\nu^*}(\beta') d\beta', \quad (12)$$

де  $\psi_{\nu^*}(\beta') = \beta^{-1/2} \exp(i\nu^* \beta')$ ,  $\nu^* = (2n + 1)\pi\beta^{-1}$ ,  $n = 0; \pm 1; \pm 2 \dots$ . У “частотному” представленні

$$\begin{aligned} \hat{S}_{ee}(\nu) &= \exp \left\{ -(2\beta V)^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \sum_j V_q \hat{\rho}_{\mathbf{q},\nu} \hat{\rho}_{-\mathbf{q},-\nu} \right\}, \\ \hat{S}_{en}(\nu) &= \exp \left\{ zV^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q S_{-\mathbf{q}} \hat{\rho}_{\mathbf{q},\nu} \right\}, \\ \hat{\rho}_{\mathbf{q},\nu} &= \sum_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s}^+(\nu^* + \nu) a_{\mathbf{k},s}(\nu^*), \end{aligned} \quad (13)$$

причому  $\nu = 2\pi n\beta^{-1}$ ;  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , а обчислення середніх від добутку операторів  $a_{\mathbf{k},s}(\nu^*)$  виконується за правилом [4]

$$-\langle T_\beta \{ a_{\mathbf{k}_1, s_1}(\nu_1^*) a_{\mathbf{k}_2, s_2}^+(\nu_2^*) \} \rangle_{\mathcal{H}_\mu} = G_{\mathbf{k}_1, s_1}(\nu_1^*) \delta_{\nu_1^*, \nu_2^*} \delta_{s_1, s_2} \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}, \quad (14)$$

де  $G_{\mathbf{k},s}(\nu^*) = \{i\nu^* - E_k + \mu\}^{-1} e^{i\delta\nu^*}$  є спектральним зображенням одноелектронної функції Гріна ідеальної системи ( $\delta \rightarrow +0$ ) – базисної системи для опису моделі електронного газу із взаємодіями між частинками.

Модель з гамільтоніаном  $\hat{H}_0 + \hat{V}_{ee}$  використаємо як базисну систему для розрахунку  $Z(\mu)$ :

$$Z(\mu) = e^{-\beta\Omega_e(\mu)} \langle \hat{S}_{en}(\nu) \rangle_e, \quad (15)$$

де

$$e^{-\beta\Omega_e(\mu)} = e^{-\beta\Omega_0(\mu)} \langle T_\beta \hat{S}_{ee}(\nu) \rangle_0, \quad (16)$$

$$\langle \hat{S}_{en}(\nu) \rangle_e = \langle T_\beta \{ \hat{S}_{ee}(\nu) \hat{S}_{en}(\nu) \} \rangle_0 \{ \langle T_\beta \hat{S}_{ee}(\nu) \rangle_0 \}^{-1}.$$

Символ  $\langle \rangle_0$  означає статистичне засереднення за станами ідеальної моделі електронів, а  $\langle \rangle_e$  – за станами базисної системи;  $\Omega_0(\mu)$  – термодинамічний потенціал ідеальної системи

$$\Omega_0(\mu) = -\beta^{-1} \sum_{\mathbf{k},s} \ln \{ 1 + e^{-\beta(E_k - \mu)} \}, \quad (17)$$

а  $\Omega_e(\mu)$  – термодинамічний потенціал базисної моделі,

$$\Omega_e(\mu) = \Omega_0(\mu) - \beta^{-1} \ln \langle T_\beta \hat{S}_{ee}(\nu) \rangle_0. \quad (18)$$

Розкладаючи оператор  $\hat{S}_{en}(\nu)$  у формулі (16) в ряд, засереднюючи почленно за станами базисної системи і зображаючи результат в експонентній формі, знаходимо внесок до термодинамічного потенціалу за рахунок електрон-ядерних взаємодій

$$\Omega_{en} = -\beta^{-1} \langle S_{en}(\nu) \rangle_e = - \sum_{n \geq 2} \{ n! V^n \}^{-1} z^n \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n \neq 0} V_{\mathbf{q}_1} \cdots V_{\mathbf{q}_n} \cdot S_{-\mathbf{q}_1} \cdots S_{-\mathbf{q}_n} \times$$

$$\times \tilde{\mu}_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \delta_{\mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_n, 0}, \quad (19)$$

де

$$\tilde{\mu}_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \beta^{-1} \langle T_\beta \{ \hat{\rho}_{\mathbf{q}_1, 0} \cdots \hat{\rho}_{\mathbf{q}_n, 0} \} \rangle_e^{\text{ЗБ}} \quad (20)$$

є зв'язною частиною середнього від добутку  $n$  операторів  $\hat{\rho}_{\mathbf{q}, 0}$  – статичною границею  $n$ -частинкової кореляційної функції базисної моделі

$$\tilde{\mu}_n(x_1, \dots, x_n) = \tilde{\mu}_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n | \nu_1, \dots, \nu_n) = \beta^{-1} \langle T_\beta \{ \hat{\rho}_{\mathbf{q}_1, \nu_1} \cdots \hat{\rho}_{\mathbf{q}_n, \nu_n} \} \rangle_e^{\text{ЗБ}}. \quad (21)$$

Функції (20), (21) є узагальненням “багатохвосток” з теорії нерелятивістських електрон-іонних моделей металів [9, 10].

### 3 Кореляційні функції релятивістського ідеального виродженого електронного газу

Кореляційні функції (21) виражаються через кореляційні функції ідеальної моделі

$$\tilde{\mu}_n^0(x_1, \dots, x_n) = \beta^{-1} \langle T_\beta \{ \hat{\rho}_{x_1} \cdots \hat{\rho}_{x_n} \} \rangle_0^{3B}. \quad (22)$$

Як і в нерелятивістській теорії [4, 6], вони є згортками одночастинкових функцій Гріна

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_2^0(x, -x) &= -\beta^{-1} \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\nu^*} G_{\mathbf{k}, s}(\nu^*) G_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, s}(\nu^* + \nu), \\ \tilde{\mu}_3^0(x_1, x_2, x_3) &= 2\beta^{-1} \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\nu^*} G_{\mathbf{k}, s}(\nu^*) G_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1, s}(\nu^* + \nu_1) \times \\ &\quad \times G_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_2, s}(\nu^* - \nu_2) \delta_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3, 0} \delta_{\nu_1+\nu_2+\nu_3, 0}, \\ \tilde{\mu}_4^0(x_1, -x_1, x_2, -x_2) &= \beta^{-1} \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\nu^*} G_{\mathbf{k}, s}(\nu^*) G_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_1, s}(\nu^* - \nu_1) \times \\ &\quad \times \sum_{\sigma=\pm 1} G_{\mathbf{k}-\sigma\mathbf{q}_2, s}(\nu^* - \sigma\nu_2) \{ 2G_{\mathbf{k}, s}(\nu^*) + G_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1+\sigma\mathbf{q}_2, s}(\nu^* + \nu_1 - \sigma\nu_2) \} \end{aligned} \quad (23)$$

і т. д. Розкладаючи добутки функцій Гріна на прості множники і використовуючи співвідношення

$$\beta^{-1} \sum_{\nu^*} G_{\mathbf{k}, s}(\nu^*) = n_{\mathbf{k}, s} = \{ 1 + \exp[\beta(E_{\mathbf{k}} - \mu)] \}^{-1}, \quad (24)$$

одержуємо таке зображення функцій (23):

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_2^0(x, -x) &= -2Re \sum_{\mathbf{k}, s} n_{\mathbf{k}, s} \{ i\nu + E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \}^{-1}, \\ \tilde{\mu}_3^0(x_1, x_2, x_3) &= \delta_{x_1+x_2+x_3, 0} \{ \gamma_3(x_1, -x_2) + \gamma_3(x_2, -x_3) + \gamma_3(x_3, -x_1) \}, \\ \gamma_3(x_1, -x_2) &= 2Re \sum_{\mathbf{k}, s} n_{\mathbf{k}, s} \{ i\nu_1 + E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1} \}^{-1} \{ -i\nu_2 + E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_2} \}^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

і т. д. У загальному випадку розрахунок функцій  $\tilde{\mu}_n^0(x_1, \dots, x_n)$  зводиться до обчислення тривимірних інтегралів за вектором  $\mathbf{k}$ .

Модель ідеального виродженого релятивістського електронного газу при  $T = 0K$  характеризується єдиним безрозмірним параметром – параметром релятивізму  $y$ , який є імпульсом Фермі в одиницях  $m_0c$ . Тому для розрахунку кореляційних функцій можна використовувати безрозмірні “релятивістські” змінні

$$k_* = \frac{|\mathbf{k}|\hbar}{m_0c}, \quad q_* = \frac{|\mathbf{q}|\hbar}{m_0c}, \quad \bar{\nu} = \frac{\nu}{m_0c^2}. \quad (26)$$

Після інтегрування за кутовими змінними вектора  $\mathbf{k}$  для  $\tilde{\mu}_2^0(x, -x)$  одержуємо зображення у вигляді однократного інтеграла,

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_2^0(x, -x) &= \frac{3N_e}{m_0 c^2 y^2} \mathcal{J}_2(q_*, \bar{v}|y), \\ \mathcal{J}_2(q_*, \bar{v}|y) &= (yq_*)^{-1} \int_0^\infty dk_* k_* n(k_*) A(k_*|q_*, \bar{v}), \\ A(k_*|q_*, \bar{v}) &= \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \{ [1 + (k_* + \sigma q_*)^2]^{1/2} - \bar{v} \operatorname{arctg} [\bar{v}^{-1} \eta_\sigma(k_*, q_*)] + \\ &+ \frac{1}{2} (1 + k_*^2)^{1/2} \ln [\bar{v}^2 + \eta_\sigma^2(k_*, q_*)] \}, \\ \eta_\sigma(k_*, q_*) &= [1 + (k_* + \sigma q_*)^2]^{1/2} - [1 + k_*^2]^{1/2}.\end{aligned}\tag{27}$$

У роботі [3] наведено наближений вираз для статичної функції  $\tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ . У випадку абсолютного нуля температури вдається одержати точну формулу в елементарних функціях:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) &= \frac{3N_e}{m_0 c^2 y^2} \mathcal{J}_2(q_*|y), \\ q_* y \mathcal{J}_2(q_*|y) &= \frac{2}{9} (R_+ - R_-) \left[ 1 + \frac{7}{4} y^2 - \frac{q_*^2}{8} \right] + \frac{5}{72} q_* y (R_+ + R_-) + \frac{q_* y}{12} R_0 + \\ &+ \frac{1}{3} R_0^3 \ln \left| \frac{R_+ - R_0}{R_- - R_0} \right| - \frac{1}{3} S_q^3 \ln \left| \frac{y + \frac{1}{2} q_*}{y - \frac{1}{2} q_*} \right| + \frac{1}{4} q_* \left[ 1 + \frac{q_*^2}{6} \right] \ln |y + R_0| - \\ &- \frac{1}{8} q_* \left( 1 + \frac{1}{6} q_*^2 \right) \ln |(R_+ + y + q_*)(R_- + y - q_*)| + \frac{1}{6} S_q^3 \ln \left| \frac{1 + \frac{1}{2} q_*^2 + \frac{1}{2} y q_* + S_q R_+}{1 + \frac{1}{2} q_*^2 - \frac{1}{2} y q_* + S_q R_-} \right| - \\ &- \frac{1}{6} S_q^3 \ln \left| \frac{1 + \frac{1}{2} q_* y + S_q R_0}{1 - \frac{1}{2} q_* y + S_q R_0} \right|,\end{aligned}\tag{28}$$

де

$$R_0 = (1 + y^2)^{1/2}; \quad S_q = \left( 1 + \frac{1}{4} q_*^2 \right)^{1/2}; \quad R_\pm = [1 + (q_* \pm y)^2]^{1/2}.\tag{29}$$

Як і в нерелятивістському випадку, функція  $\mathcal{J}_2(q_*|y)$  має “слабку логарифмічну” особливість типу  $(y - \frac{1}{2} q_*) \ln |y - \frac{1}{2} q_*|$  в околі точки  $q_* = 2y$  ( $|\mathbf{q}| = 2k_F$ ). Рисунки 1 і 2 ілюструють залежність  $\tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$  від хвильового вектора при заданих значеннях параметра релятивізму у “релятивістській” шкалі та нерелятивістській ( $q = |\mathbf{q}|/k_F$ ). Як видно з рисунків,  $\tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$  загалом подібна до нерелятивістського аналога, але суттєво залежить від параметра релятивізму. Зокрема довгохвильова границя  $\tilde{\mu}_2^0(0, 0)$  відрізняється від нерелятивістського значення множителем  $(1 + y^2)^{1/2}$ .

Функція  $\tilde{\mu}_3^0(x, -x, 0)$ , яка є частковим випадком тричастинкової функції при

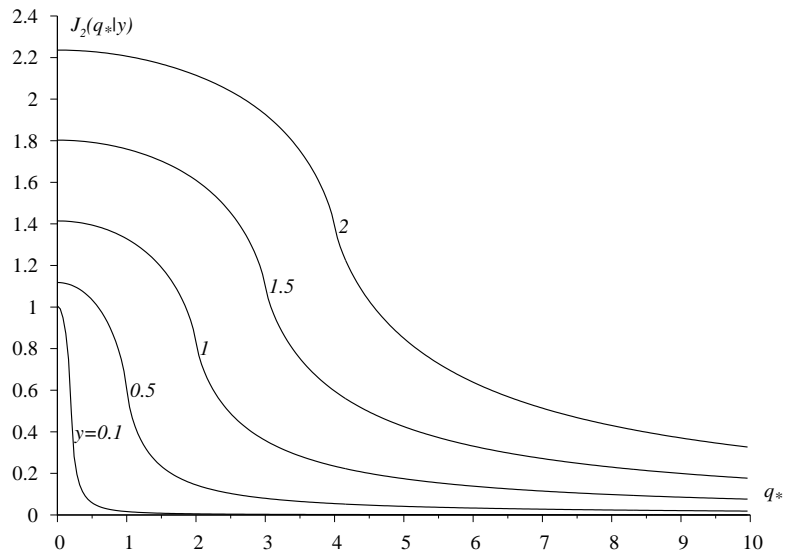


Рис. 1: Залежність функції  $\mathcal{J}_2(q_*|y)$  від змінної  $q_*$  при різних значеннях параметра релятивізму  $y$  (в “релятивістській” шкалі).

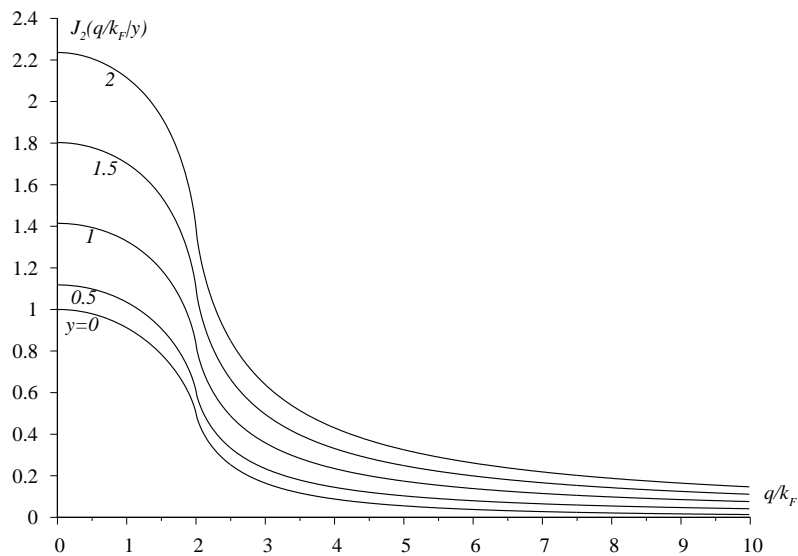


Рис. 2: Залежність функції  $\mathcal{J}_2(q/k_F|y)$  від модуля хвильового вектора  $\mathbf{q}$  при різних значеннях параметра релятивізму  $y$  (в “нерелятивістській” шкалі).

$\mathbf{q}_2 = -\mathbf{q}_1$ , виражається через  $\tilde{\mu}_2^0(x, -x)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_3^0(x, -x, 0) &= 2\beta^{-1} \sum_{\mathbf{k}, s} \sum_{\nu^*} G_{\mathbf{k}, s}^2(\nu^*) G_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, s}(\nu^* + \nu) = \\ &= \frac{d}{d\mu} \tilde{\mu}_2^0(x, -x) = -2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, s} \frac{dn_{\mathbf{k}, s}}{d\mu} (i\nu + E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})^{-1}. \end{aligned} \quad (30)$$



У випадку абсолютного нуля температури (коли  $\frac{d}{d\mu}n_{\mathbf{k},s} = \delta(E_{\mathbf{k}} - \mu)$ )

$$\tilde{\mu}_3^0(x, -x, 0) = \frac{3N_e}{(m_0c^2)^2} \frac{1}{q_* y^3} (1 + y^2)^{1/2} A(y|q_*, \bar{\nu}). \quad (31)$$

У статичній границі

$$\tilde{\mu}_3^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, 0) = \frac{3N_e}{(m_0c^2 y^2)^2} \mathcal{J}_3(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, 0|y), \quad (32)$$

$$\mathcal{J}_3(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, 0|y) = q^{-1} R_0 \left\{ \tilde{R}_+ - \tilde{R}_- + R_0 \ln \left| \frac{\tilde{R}_+ - R_0}{\tilde{R}_- - R_0} \right| \right\}, \quad \tilde{R}_{\pm} = [1 + y^2(q \pm 1)^2]^{1/2}.$$

У нерелятивістському наближенні

$$\tilde{\mu}_3^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, 0) = \frac{3N_e}{(2\varepsilon_F)^2} q^{-1} \ln \left| \frac{1 + \frac{1}{2}q}{1 - \frac{1}{2}q} \right|, \quad (33)$$

де  $q \equiv |\mathbf{q}|/k_F$ ;  $\varepsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m_0$ . Функція (33) має логарфмічну особливість в околі  $\mathbf{q} = 2k_F$ , аналогічну особливість має і функція (32) при  $q = 2$  (див. рис. 3).

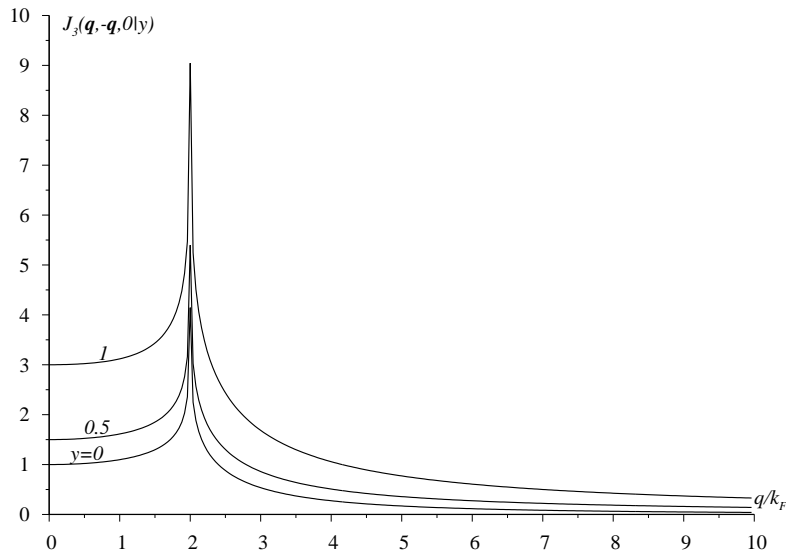


Рис. 3: Залежність функції  $\mathcal{J}_3(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, 0|y)$  від хвильового вектора  $\mathbf{q}$  при різних значеннях параметра релятивізму  $y$  ( $y=0; 0,5; 1,0$ ).

Наведемо тут також нерелятивістське наближення функції  $\tilde{\mu}_2^0(x, -x)$  у “нереля-

тивістських" безрозмірних змінних:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_2^0(x, -x) &= \frac{3N_e}{2\varepsilon_F} \mathcal{J}_2^{(0)}(q, \nu), \\ \mathcal{J}_2^{(0)}(q, \nu) &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2q} \left( 1 + u^2 - \frac{q^2}{4} \right) \ln \left| \frac{u^2 + (1 + q/2)^2}{u^2 + (1 - q/2)^2} \right| - \right. \\ &\quad \left. - u [\operatorname{arctg}(u^{-1}[1 + q/2]) + \operatorname{arctg}(u^{-1}[1 - q/2])] \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

де  $u = \nu(2\varepsilon_F)^{-1} k_F |\mathbf{q}|^{-1}$ ,  $q = |\mathbf{q}| k_F^{-1}$ .

Для розрахунку термодинамічного потенціалу базисної системи (18) ми використовуємо динамічну кореляційну функцію  $\tilde{\mu}_2^0(x, -x)$ , розраховану чисельним методом за формулою (27). Однак для виявлення загальних властивостей цієї функції корисно одержати наближений аналітичний вираз. Виходячи з формул (25), за допомогою тотожних перетворень представимо  $\tilde{\mu}_2^0(x, -x)$  у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_2^0(x, -x) &= 2 \sum_{\mathbf{k}, s} n_{\mathbf{k}, s} (\tilde{E}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \tilde{E}_{\mathbf{k}}) (\tilde{E}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^2 - \tilde{E}_{\mathbf{k}}^2) \times \\ &\quad \times \left\{ (\tilde{E}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^2 - \tilde{E}_{\mathbf{k}}^2)^2 + \nu^2 (\tilde{E}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \tilde{E}_{\mathbf{k}})^2 \right\}^{-1} = \\ &= \frac{3N_e}{2m_0 c^2} \cdot \frac{1}{q_* y^3} \int_{-1}^1 dt \int_0^y \frac{dk_* k_* \left( t + \frac{q_*}{2k_*} \right) C(k_*, t|q_*)}{\left( t + \frac{q_*}{2k_*} \right)^2 + \left( \frac{\bar{\nu}}{2k_* q_*} C(k_*, t|q_*) \right)^2}, \\ C(k_*, t|q_*) &= [1 + k_*^2 + q_*^2 + 2k_* q_* t]^{1/2} + [1 + k_*^2]^{1/2}, \quad \tilde{E}_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}} + m_0 c^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Цей вираз є точним при абсолютному нулі температури. Щоб одержати наближену аналітичну формулу, як і в роботі [3], використаємо наближення

$$C(k_*, t|q_*) \Rightarrow C(y, t_0|q_*); \quad k_*^{-1} C(k_*, t|q_*) \Rightarrow y^{-1} C(k_*, t_0|q_*). \quad (36)$$

В результаті наступного елементарного інтегрування одержуємо наближений вираз

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_2^0(x, -x) &= \frac{3N_e}{m_0 c^2 y^2} \mathcal{J}_2(q_*, \bar{\nu}|y), \\ \mathcal{J}_2(q_*, \bar{\nu}|y) &= \frac{1}{4} C(y, t_0|q_*) \left\{ 1 + \frac{y}{2q_*} \left( 1 + v^2 - \frac{q_*^2}{4y^2} \right) \ln \frac{v^2 + (1 + q_*/2y)^2}{v^2 + (1 - q_*/2y)^2} - \right. \\ &\quad \left. - v \left[ \operatorname{arctg} \frac{1 + q_*/2y}{v} + \operatorname{arctg} \frac{1 - q_*/2y}{v} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (37)$$

у якому

$$v = \bar{\nu}(2yq_*)^{-1} C(y, t_0|q_*) \approx \nu(2\varepsilon_F q/k_F)^{-1} (1 + y^2)^{1/2}. \quad (38)$$

Одержаний вираз в основному відрізняється від нерелятивістської формули (34) множником  $(1 + y^2)^{1/2}$  та перенормованою безрозмірною частотою (38) і добре узгоджується з результатом чисельного інтегрування за формулами (27) або (35) (рис. 4).

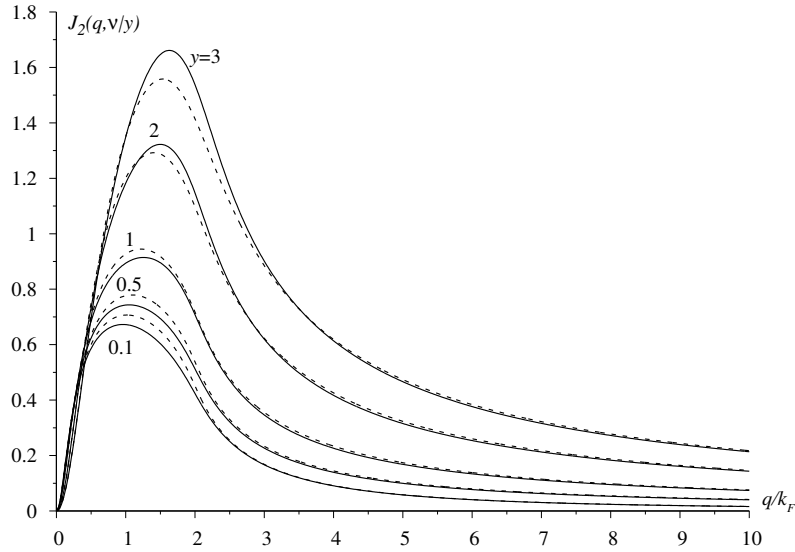


Рис. 4: Залежність динамічної двочастинкової кореляційної функції  $\mathcal{J}_2(q, \nu|y)$  від хвильового вектора  $\mathbf{q}$  при фіксованих значеннях параметра релятивізму  $y$ , у нерелятивістських змінних. Суцільні криві відповідають числовим розрахункам за ф. (27), пунктирні – формулі (37). Безрозмірна частота  $\nu/2\varepsilon_F = 0,15$ .

Необхідну для розрахунку доданка формули (19) при  $n = 3$  статичну тричастинкову кореляційну функцію  $\tilde{\mu}_3^0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$  можна розрахувати чисельним інтегруванням за вектором  $\mathbf{k}$  у сферичній системі координат згідно з формулою (25). Для розрахунку  $\gamma_3(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2)$  вибираємо систему координат, вісь  $Oz$  якої спрямована вздовж вектора  $\mathbf{q}_1$ , вектори  $\mathbf{q}_1$  і  $\mathbf{q}_2$  лежать в одній площині, а косинус кута між ними дорівнює  $t_{12} = (q_1 q_2)^{-1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ . У цій системі координат

$$(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1) = k q_1 t, \quad (\mathbf{k}, \mathbf{q}_2) = k q_2 \{ t t_{12} + (1 - t^2)^{1/2} (1 - t_{12}^2)^{1/2} \cos \varphi \}, \quad (39)$$

де  $t = (k q_1)^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1)$ . У “релятивістській” шкалі  $\tilde{k}_* = \frac{\hbar|\mathbf{k}|}{m_0 c}$ ,  $\tilde{q}_i = \frac{\hbar|\mathbf{q}_i|}{m_0 c}$

$$\begin{aligned} \gamma_3(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2) &= \gamma_3(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, t_{12}) = \frac{3N_e}{\pi(m_0 c^2)^2 y^3} \int_0^y d\tilde{k} \tilde{k}^2 \int_{-1}^1 dt \int_0^\pi d\varphi \times \\ &\times \left\{ (1 + \tilde{k}^2 + \tilde{q}_1^2 + 2\tilde{k}\tilde{q}_1 t)^{1/2} - (1 + \tilde{k}^2)^{1/2} \right\}^{-1} \times \\ &\times \left\{ [1 + \tilde{k}^2 + \tilde{q}_2^2 - 2\tilde{k}\tilde{q}_2 [t t_{12} + (1 - t^2)^{1/2} (1 - t_{12}^2)^{1/2} \cos \varphi]]^{1/2} - (1 + \tilde{k}^2)^{1/2} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Підінтегральна функція у формулі (40) має особливості за різними змінними, тому практичний розрахунок  $\tilde{\mu}_3^0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$  чисельним методом пов'язаний зі значними труднощами. Для наближеного розрахунку внесків електрон-ядерних взаємодій ми використовуємо динамічну функцію  $\tilde{\mu}_3^0(x_1, x_2, -x_1 - x_2)$  з дуже малими

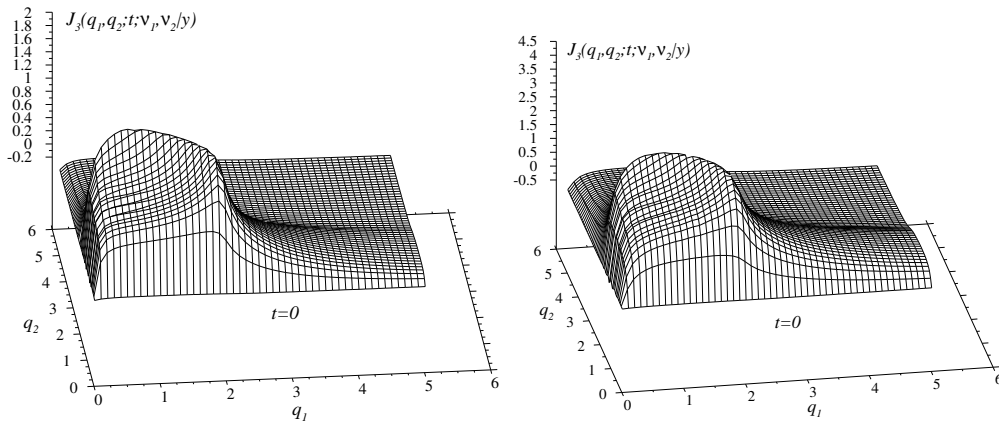


Рис. 5: Функція  $\mathcal{J}_3(q_1, q_2; t; \nu_1, \nu_2|y) = \tilde{\mu}_3^0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2; \nu_1, \nu_2|y)(3N_e)^{-1}(m_0c^2y^2)^2$  при  $\nu_1 = \nu_2 = 0,05$ ,  $t = 0$  та двох значеннях параметра релятивізму ( $y = 0$  – зліва,  $y = 1$  – справа;  $t$  – косинус кута між векторами  $\mathbf{q}_1$  і  $\mathbf{q}_2$ ).

значеннями частот  $\nu_1, \nu_2$ , розрахунок якої не викликає жодних труднощів. На рисунках 5-6 наведено результати чисельного розрахунку динамічної тричастинкової кореляційної функції, в залежності від величини векторів  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  і їх взаємної орієнтації при різних значеннях параметра релятивізму. У випадку дуже малих частот  $\nu_1, \nu_2$  відмінності динамічної функції  $\tilde{\mu}_3^0(x_1, x_2, -x_1 - x_2)$  від її статичної границі проявляються лише в околі нульових значень хвильових векторів, а також в області максимуму, який у динамічному випадку є згладженим.

## 4 Кореляційні функції базисної системи

Як і в нерелятивістській теорії,  $n$ -частинкові кореляційні функції моделі електронного газу із взаємодією між частинками визначаються  $n$ -частинковими поляризаційними операторами  $M_n(x_1, \dots, x_n)$  [6, 7]:

$$\begin{aligned} \mu_2(x, -x) &= M_2(x, -x) \left\{ 1 + \frac{V_q}{V} M_2(x, -x) \right\}^{-1}, \\ \mu_n(x_1, \dots, x_n) &= M_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \left\{ 1 + \frac{V_{q_i}}{V} M_2(x_i, -x_i) \right\}^{-1}; \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (41)$$

Ці співвідношення узагальнюють добре відомі співвідношення наближення хаотичних фаз, у якому  $M_2^{(0)}(x, -x) = \tilde{\mu}_2^0(x, -x)$ ,  $M_n^{(0)}(x_1, \dots, x_n) = \tilde{\mu}_n^0(x_1, \dots, x_n)$ . У

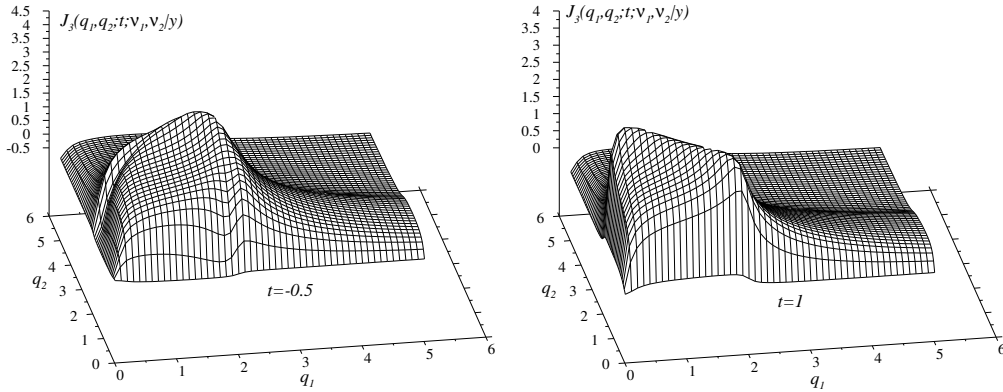


Рис. 6: Функція  $\mathcal{J}_3(q_1, q_2; t; \nu_1, \nu_2 | y)$  при  $\nu_1 = \nu_2 = 0,05$ ,  $y = 1$  для двох орієнтацій векторів  $\mathbf{q}_1$  і  $\mathbf{q}_2$  ( $t = -0,5; 1,0$ ).

представленні локального поля [7, 11–13]

$$M_2(x, -x) = \tilde{\mu}_2^{(0)}(x, -x) \left\{ 1 - \frac{V_q}{V} \tilde{\mu}_2^{(0)}(x, -x) G(x) \right\}^{-1}, \quad (42)$$

$$M_n(x_1, \dots, x_n) = \tilde{\mu}_n^{(0)}(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - \frac{V_{q_i}}{V} \tilde{\mu}_2^{(0)}(x_i, -x_i) G(x_i) \right\}^{-1}, \quad n \geq 3,$$

де  $G(x)$  – динамічна поправка на локальне поле. Тому кореляційні функції мають таке зображення:

$$\mu_2(x, -x) = \tilde{\mu}_2^0(x, -x) \varepsilon^{-1}(x),$$

$$\mu_n(x_1, \dots, x_n) = \tilde{\mu}_n^0(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \varepsilon^{-1}(x_i), \quad (43)$$

$$\varepsilon(x) = 1 + \frac{V_q}{V} \tilde{\mu}_2^0(x, -x) [1 - G(x)] = 1 + \frac{4\alpha_0}{\pi y} \left( \frac{k_F}{q} \right)^2 \mathcal{J}_2(qy, \nu y^2) [1 - G(q, \nu)].$$

Як видно з формули (43), кореляційні функції взаємодіючого виродженого електронного газу визначається двома безрозмірними параметрами – параметром релятивізму і параметром неідеальності (або сталою тонкої структури  $\alpha_0$ ). В теорії нерелятивістського виродженого електронного газу доведено, що в границі високих густин поправка на локальне поле є універсальною функцією, незалежною від параметра неідеальності  $r_s$  [11, 13]:

$$G_{id}(x) = -(2\beta V_q)^{-1} \{ \tilde{\mu}_2^0(x, -x) \}^{-2} \sum_{x_1} V_{q_1} \tilde{\mu}_4^0(x, -x, x_1, -x_1). \quad (44)$$

В роботі [14] це наближення названо наближенням Гелдарга-Тейлора, бо ці автори вперше розраховували поправку першого порядку теорії збурень за потенціалом до

поляризаційного оператора наближення хаотичних фаз у статичному випадку [15]. Як бачимо з формули (44), у наближенні Гелдарта-Тейлора поправка на локальне поле релятивістської базисної системи не залежить від параметра неідеальності і є універсальною характеристикою ідеальної системи – функцією хвильового вектора і частоти, а також залежить від параметра релятивізму.

Виконуючи підсумовування за частотами  $\nu_1$  та  $\nu^*$  ( $\nu^*$  фігурує в  $\tilde{\mu}_4^0(x, -x, x_1, -x_1)$ ) за формулою (24), вираз (44) представимо у такому вигляді:

$$G_{id}(x) = -V_q^{-1} \{ \tilde{\mu}_2^0(x, -x) \}^{-2} \sum_s \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_1, s} n_{\mathbf{k}_2, s} \times \\ \times \left\{ V(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) f_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^-(\mathbf{q}, \nu) - V(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}) f_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^+(\mathbf{q}, \nu) \right\}, \quad (45) \\ f_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^\mp(\mathbf{q}, \nu) = Re \{ [i\nu + E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}}]^{-1} \mp [\pm i\nu + E_{\mathbf{k}_2} - E_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}}]^{-1} \}^2.$$

В асимптотичі малих та великих значень хвильового вектора  $\mathbf{q}$  вираз (45) збігається з асимптотикою поправки на локальне поле у нерелятивістській теорії [12]:

$$G_{id}(x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}(q/k_F)^2 + \dots & \text{при } \nu = 0; \quad q \ll k_F; \\ \frac{3}{20}(q/k_F)^2 + \dots & \text{при } \nu \gg \varepsilon_F; \quad q \ll k_F; \\ \frac{1}{3} + \dots & \text{при } q \gg k_F \quad \text{при довільних } \nu. \end{cases} \quad (46)$$

Для комп'ютерного розрахунку  $G_{id}(x)$  при абсолютному нулі температури використаємо циліндричну систему координат для векторів  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  ( $\mathbf{k}_j = (z_j, \rho_j, \varphi_j)$ ), у яких  $(\mathbf{k}_j, \mathbf{q}) = qz_j$ ,  $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + (z_1 - z_2)^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ ,  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = z_1z_2 + \rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ ,  $k_j^2 = z_j^2 + \rho_j^2$ . Інтегруючи за змінними  $\varphi_1, \varphi_2$ , зводимо  $G_{id}(x)$ , записану у нерелятивістських змінних, до такого 4-вимірного інтегралу:

$$G_{id}(q, \nu) = \frac{q^2 y^4}{8} \mathcal{J}_2^{-2}(qy, \tilde{\nu}y^2) \int_{-1}^1 dz_1 \int_{-1}^1 dz_2 \int_0^{\sqrt{1-z_1^2}} \rho_1 d\rho_1 \int_0^{\sqrt{1-z_2^2}} \rho_2 d\rho_2 \times \\ \times \left\{ \frac{f_{q, \nu}^+(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2)}{W_+(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2)} - \frac{f_{q, \nu}^-(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2)}{W_-(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2)} \right\}, \quad (47)$$

де

$$f_{q, \nu}^\pm(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2) = \left\{ \frac{\eta_1}{\eta_1^2 + \bar{\nu}^2} \pm \frac{\eta_2}{\eta_2^2 + \bar{\nu}^2} \right\}^2 - \bar{\nu}^2 \left\{ \frac{1}{\eta_1^2 + \bar{\nu}^2} - \frac{1}{\eta_2^2 + \bar{\nu}^2} \right\}^2, \quad (48) \\ \eta_i = [1 + y^2(z_i^2 + \rho_i^2)]^{1/2} - [1 + y^2(\rho_i^2 + (z_i + q)^2)]^{1/2}, \\ W_+(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2) = \{(z_1 + z_2 + q)^4 + (\rho_1^2 - \rho_2^2)^2 + 2(\rho_1^2 + \rho_2^2)(z_1 + z_2 + q)^2\}^{1/2}, \\ W_-(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2) = \{(z_1 - z_2)^4 + (\rho_1^2 - \rho_2^2)^2 + 2(\rho_1^2 + \rho_2^2)(z_1 - z_2)^2\}^{1/2}.$$

Переходячи до границі  $y \rightarrow 0$  у формулах (47), (48), одержуємо поправку на

локальне поле нерелятивістської теорії у наближенні Гелдарга-Тейлора:

$$G_{id}^0(q, \nu) = \frac{1}{8} \left\{ \mathcal{J}_2^{(0)}(q, \nu) \right\}^{-2} \int_{-1}^1 dz_1 \int_{-1}^1 dz_2 \int_0^{\sqrt{1-z_1^2}} \rho_1 d\rho_1 \int_0^{\sqrt{1-z_2^2}} \rho_2 d\rho_2 \times$$

$$\times \left\{ \frac{\varphi_{q,\nu}^+(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2)}{W_+(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2)} - \frac{\varphi_{q,\nu}^-(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2)}{W_-(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2)} \right\}, \quad (49)$$

$$\varphi_{q,\nu}^\pm(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2) = \left\{ \frac{z_1 + q/2}{(z_1 + q/2)^2 + u^2} \pm \frac{z_2 + q/2}{(z_2 + q/2)^2 + u^2} \right\}^2 -$$

$$- u^2 \left\{ \frac{1}{(z_1 + q/2)^2 + u^2} - \frac{1}{(z_2 + q/2)^2 + u^2} \right\}^2,$$

$$u = \nu \left[ \frac{\hbar^2 k_F^2}{m} q \right]^{-1}, \quad q \equiv |\mathbf{q}| k_F^{-1},$$

функції  $W_\pm(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2)$  визначені формулами (48), а  $\mathcal{J}_2^{(0)}(q, \nu)$  – формулою (34). У такому наближенні поправка на локальне поле вперше одержана у роботі [14]. Оскільки  $\varphi_{q,\nu}^\pm(z_1, z_2, \rho_1, \rho_2)$  не залежить від змінних  $\rho_1, \rho_2$ , то інтегрування за цими змінними виконується в аналітичній формі і  $G_{id}(q, \nu)$  зводиться до розрахунку двовимірного інтеграла за змінними  $z_1, z_2$  чисельним методом. З метою порівня-

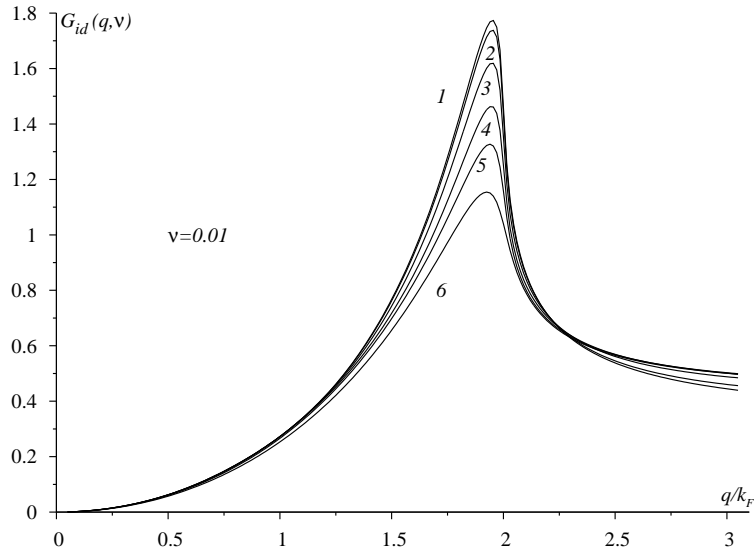


Рис. 7: Залежність поправки на локальне поле  $G_{id}(q, \nu)$  від хвильового вектора  $\mathbf{q}$  і параметра релятивізму  $\nu$  при частоті  $\nu(2\varepsilon_F)^{-1} = 0,01$  (крива 1 –  $\nu = 0,05$ ; 2 –  $\nu = 0,2$ ; 3 –  $\nu = 0,5$ ; 4 –  $\nu = 1$ ; 5 –  $\nu = 2$ ; 6 –  $\nu = 5$ ).

ння  $G_{id}(q, \nu)$  із поправкою на локальне поле нерелятивістської теорії у формулах (47), (48) використано змінну  $q = |\mathbf{q}| k_F^{-1}$ , а  $\bar{\nu} = \tilde{\nu} y^2$ ,  $\tilde{\nu} = \nu(\hbar^2 k_F^2/m)^{-1}$ . На рис 7

зображено динамічну поправку, розраховану за формулою (47), при  $\tilde{\nu} = 0,01$ , що дуже близько до статичної границі. Як видно з рисунка, асимптотика  $G_{id}(q, \nu)$  при малих та великих значеннях хвильового вектора майже не залежить від параметра релятивізму і збігається з асимптотикою функції  $G_{id}^0(q, \nu)$ . Відхилення  $G_{id}(q, \nu)$  від  $G_{id}^0(q, \nu)$  суттєве в області максимуму: величина його монотонно зменшується зі збільшенням параметра релятивізму, що пов'язано з поведінкою  $\mathcal{J}_2(q, \nu)$  як функції параметра релятивізму. Це ілюструє рис. 8, на якому наведена ця залежність для статичного випадку. На рис. 9 наведено залежність  $G_{id}(q, \nu)$  від хвильового вектора при досить великому значенні частоти ( $\tilde{\nu} = 0,5$ ). У цьому випадку характер залежності від хвильового вектора відповідає поведінці нерелятивістської поправки, але висота максимуму суттєво зменшується зі збільшенням параметра релятивізму, що зумовлено перенормуванням частоти ( $\nu_* = \tilde{\nu}y^2$ ) при  $y \gtrsim 1$ . Це зауваження відноситься також до зсуву максимуму в область великих значень хвильового вектора.

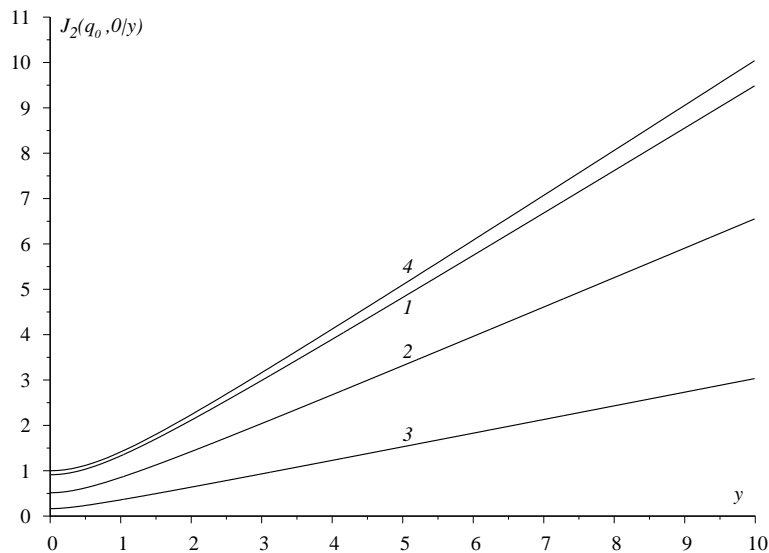


Рис. 8: Залежність  $\mathcal{J}_2(q_0, 0|y)$  від параметра релятивізму  $y$  при різних значеннях  $q_0$  (крива 1 –  $q_0=1$ ; 2 –  $q_0=2$ ; 3 –  $q_0=3$ ). Крива 4 – функція  $\sqrt{1+y^2}$ .

Загалом залежність поправки на локальне поле від параметра релятивізму є слабкою, якщо порівнювати її із залежністю кореляційних функцій  $\tilde{\mu}_n^0(x_1, \dots, x_n)$ . Відхилення  $G_{id}(q, \nu)$  від аналогічної функції нерелятивістської теорії є невеликими.

Згідно з формулою (43) у статичному наближенні Томаса-Фермі радіус екранування

$$R_{rel} \simeq \left( \frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{(1+y^2)^{1/4}}{y^{1/2}} k_F \right)^{-1} \alpha_0^{-1/2} \quad (50)$$



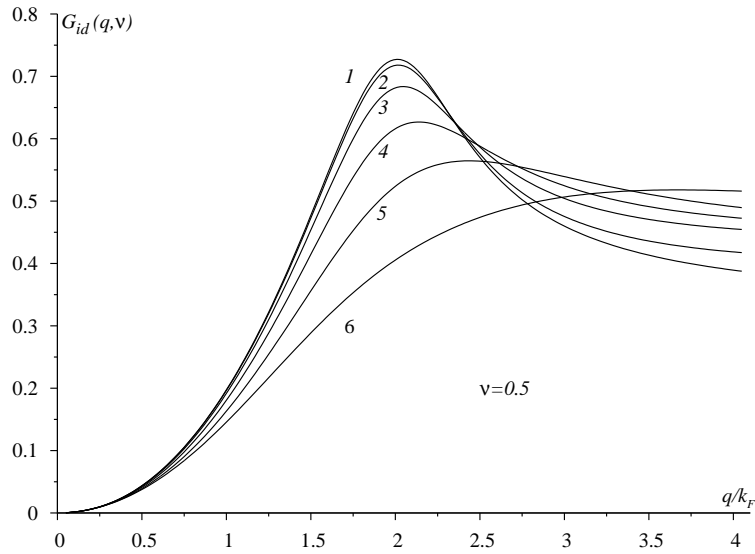


Рис. 9: Залежність поправки на локальне поле  $G_{id}(q, \nu)$  від хвильового вектора  $\mathbf{q}$  і параметра релятивізму  $y$  при частоті  $\nu(2\varepsilon_F)^{-1} = 0,5$  (крива 1 –  $y=0,05$ ; 2 –  $y=0,2$ ; 3 –  $y=0,5$ ; 4 –  $y=1$ ; 5 –  $y=2$ ; 6 –  $y=5$ ).

в границі  $y \gg 1$  має порядок  $k_F^{-1} \alpha_0^{-1/2}$ , і тому є набагато більшим від радіуса екранування в нерелятивістському випадку

$$R_e \simeq k_F^{-1} \left( \frac{\eta}{r_s} \right)^{1/2} \sim k_F^{-1}. \quad (51)$$

В області значень параметра релятивізму, характерній для вироджених карликів ( $y \gtrsim 1,0$ ), електронна підсистема є слабко неідеальною, а її бінарна функція розподілу

$$F_2(r) = F_2^0(r) + \mu_{corr}(r) \quad (52)$$

мало відхиляється від наближення Гартрі-Фока

$$\begin{aligned} F_2^0(r) &= 1 - \frac{1}{2} n^2(r_*), \\ n(r_*) &= \frac{3}{r_*^3} [\sin(r_*) - r_* \cos(r_*)], \end{aligned} \quad (53)$$

де  $r_* = k_F r$ , а

$$\mu_{corr}(r_*) = -\frac{9}{2\pi r_*} \int_0^\infty dq q \sin(qr_*) \int_0^\infty d\nu \frac{[\varepsilon(q, \nu) - 1] \mathcal{J}_2(qy, \nu y^2)}{\varepsilon(q, \nu)} \quad (54)$$

відображає вплив взаємодії. Розраховану у наближенні локального поля бінарну функцію розподілу при заданих значеннях параметра релятивізму наведено на рисунку 10.

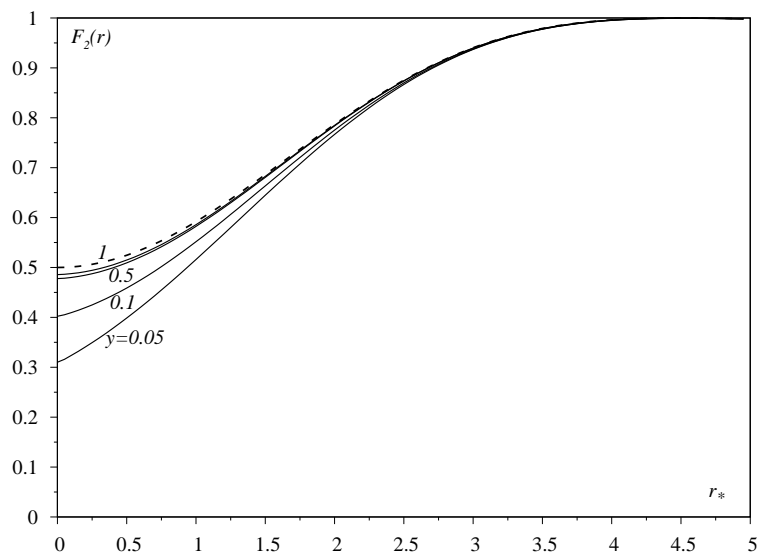


Рис. 10: Бінарна функція розподілу  $F_2(r)$  при чотирьох значеннях параметра релятивізму  $y$  ( $y=0,05; 0,1; 0,5; 1,0$ ). Пунктирна крива –  $F_2^{(0)}(r)$ .

## 5 Висновки

1. Базисний підхід узагальнено з метою статистичного опису електрон-ядерних моделей з довільним значенням параметра релятивізму. Обґрунтовано висновки про те, що для розрахунку енергетичних характеристик моделей в області параметрів, характерних для вироджених карликів, достатньо враховувати дво- і тричастинкові кореляції в електронній підсистемі.
2. Досліджено залежність статичних і динамічних кореляційних функцій від параметра релятивізму і їх відмінність від кореляційних функцій нерелятивістської моделі електронної рідини.
3. Вперше досліджено і розраховано поправку на локальне поле моделі однорідної електронної рідини як функцію хвильового вектора, частоти та параметра релятивізму.

### Список використаної літератури

1. S. Chandrasekhar, *Astrophys. Journ.*, **74**, 81 (1931).
2. S. Chandrasekhar, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **95**, 676 (1935).
3. М. В. Ваврух, Н. Л. Тишко, С. В. Смеречинський, *Вісник Львівського ун-ту. Серія фізична.* **48**, 3 (2013).
4. М. В. Ваврух, *УФЖ.*, **36**, №1, 150 (1991).

5. *М. В. Ваврух, Т. Є. Крохмальський*, УФЖ., **36**, №2, 296 (1991).
6. *М. V. Vavruk, T.E. Krokhmal'skii*, Phys. Stat. Sol. (b), **168**, №2, 519 (1991).
7. *М. V. Vavruk, T.E. Krokhmal'skii*, Phys. Stat. Sol. (b), **169**, 451 (1992).
8. *А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский*, Методы квантовой теории поля в статистической физике. (М.: Физматгиз, 1962).
9. *Е. Бровман, Ю. Каган*, ЖЭТФ, **63**, 1937 (1972).
10. *Е. Бровман, Ю. Каган*, ЖЭТФ, **66**, 1877 (1974).
11. *М. V. Vavruk, V. B. Solovyan, N. M. Vavruk*, Phys. Stat. Sol. (b), **177**, №2, 361 (1993).
12. *М. В. Ваврух, Н. М. Ваврух*, ФНТ, **22**, 9 (1996).
13. *М. V. Vavruk, N. M. Vavruk*, Low Temp. Phys., **22**, №9, 767 (1996).
14. *М. В. Ваврух, Н. М. Ваврух, Т. Є. Крохмальський*, Доповіді АН України, №2, 47 (1992).
15. *D. J. W. Geldart, R. Taylor*, Can., J., Phys., **48**, №2, 155 (1970).

Стаття надійшла до редакції 10.02.2015  
прийнята до друку 15.09.2015

**THE STATISTICAL DESCRIPTION OF ELECTRON-NUCLEAR  
MODEL IN THE DEGENERATE DWARFS THEORY. I. THE  
CORRELATION FUNCTIONS OF ELECTRON SUBSYSTEM**

**M. Vavruk<sup>1</sup>, D. Dzikovskyi<sup>1</sup>, V. Solovyan<sup>2</sup>, N. Tyshko<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> *Ivan Franko National University of Lviv,  
astrophysic department,  
Kyrylo and Methodiy Str., 8, 79005 Lviv, Ukraine  
e-mail: mvavruk@gmail.com*

<sup>2</sup> *Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of  
Sciences of Ukraine,  
Svientsitskii Str., 1, 79011 Lviv, Ukraine*

Reference system approach for description of electron liquid model in the non-relativistic metals theory, proposed by the authors previously, was adapted for calculation of the characteristics of a homogeneous electron-nuclear model at the densities typical for degenerate dwarfs. Two and three-particles correlation functions of the ideal degenerate relativistic electron system is researched and calculated, as well as correlation functions of the model of degenerate relativistic electron system with Coulomb interaction, which serves as the statistical basis for describing of the contributions of electron-nuclear interactions. At the first time the local field correction function of the basis model is calculated, both for static and dynamic cases.

**Key words:** electron-nuclear model,  $n$ -particles correlation functions, relativism parameter, Coulomb interactions, local field correction function

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОН-ЯДЕРНОЙ  
МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ВЫРОЖДЕННЫХ КАРЛИКОВ.  
I. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРОННОЙ  
ПОДСИСТЕМЫ**

**М. Ваврух<sup>1</sup>, Д. Дзіковський<sup>1</sup>, В. Солов'ян<sup>2</sup>, Н. Тышко<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> *Львовский национальный университет имени Ивана Франко  
кафедра астрофизики,  
ул. Кирилла и Мефодия 8, 79005 Львов, Украина  
e-mail: mvavrukh@gmail.com*

<sup>2</sup> *Институт физики конденсированных систем НАН Украины,  
ул. Свенцицкого 1, 79011 Львов, Украина*

Базисный подход, предложенный авторами ранее для описания модели электронной жидкости в нерелятивистской теории металлов, адаптирован к расчетам характеристик однородной электрон-ядерной модели при плотностях, характерных для вырожденных карликов. Исследованы и рассчитаны двух – трехчастичные корреляционные функции идеальной вырожденной релятивистской системы электронов, а также корреляционные функции модели с кулоновскими взаимодействиями, которая играет роль статистического базиса для описания вкладов электрон-ядерных взаимодействий. Впервые выполнены аккуратные расчеты поправки на локальное поле базисной модели как в статическом, так и в динамическом случаях.

**Ключевые слова:** электрон-ядерная модель,  $n$ -частичные корреляционные функции, параметр релятивизма, кулоновские взаимодействия, поправка на локальное поле