ISSN 1024-588X. Вісник Львівського університету. Серія фізична. 2016. Випуск 51. С. 87-97
Visnyk of the Lviv University. Series Physics. 2016. Issue 51. P. 87-97

УДК 530.145
PACS 03.65.−w, 05.30.Pr, 14.80.Hv

Спектр системи двох еніонів у сталому магнітному полі з магнітними зарядами

Б. Собко, А. Ровенчак

Кафедра теоретичної фізики,
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Драгоманова, 12, 79005 Львів, Україна
e-mail: {bohdanka.sobko.d, andrij.rovenchak}@gmail.com

У роботі розглянуто задачу двох еніонів у магнітному полі з магнітними зарядами. За допомогою теорії збурень, де малим параметром виступає поле від магнітних зарядів, розраховано поправки до спектра такої системи. Показано, що перша поправка знімає виродження енерґетичних рівнів.

Ключові слова: еніон, магнітне поле, магнітний заряд, теорія збурень

Вступ

У 1977 році фізики-теоретики з університету Осло — Йон Манне Лайнос (Jon Magne Leinaas) і Ян Міргайм (Jan Myrheim) — довели, що традиційний поділ частинок на ферміони і бозони не є застосовним у двовимірному просторі [1]. З топологічних міркувань можна показати, що при перестановці двох тотожних частинок, які "живуть" на площині, хвильова функція може домножатись на довільний фазовий множник. Тому для таких об'єктів Френк Вілчек у 1982 році [2] запропонував назву *еніон* (*anyon*, від англ. *any* — 'будь-який') — їхня статистика не бозонна і не ферміонна, а "any"-онна.

У тривимірному (і більше) просторі частинки строго діляться на два типи, згідно з тим, якій статистиці вони підкоряються: ферміони (півцілий спін) — статистиці Фермі–Дірака, бозони (цілий спін) — статистиці Бозе–Айнштайна. Наприклад, в разі двочастинкового стану маємо дію оператора перестановки (в позначеннях Дірака):

$$\hat{P}_{12}|12\rangle = +|21\rangle \quad \text{для бозонів;} \tag{1}$$

$$\hat{P}_{12}|12\rangle = -|21\rangle \quad \text{для ферміонів.} \tag{2}$$

Однак, у двовимірних системах можна спостерігати квазічастинки, які підкоряються розподілу, що варіюється безперервно між статистиками Бозе–Айнштайна і Фермі–Дірака:

$$\hat{P}_{12}|12\rangle = e^{i\pi\alpha}|21\rangle, \tag{3}$$

де еніонний параметр α — дійсне число з діапазону $[0; 1]$. При $\alpha = 0$ маємо статистику Бозе–Айнштайна, а при $\alpha = 1$ — статистику Фермі–Дірака. У випадку $0 < \alpha < 1$ отримуємо дещо інше — еніон. Співвідношення між спіновим квантовим числом s та параметром α можна записати так: $\alpha = 2s$.

Незважаючи на те, що фундаментальні частинки можуть бути лише бозонами або ферміонами, елементарні збудження в системах, де виникає, наприклад, дробовий квантовий ефект Холла [3], можна з великою точністю розглядати як еніони [4].

На підставі еніонів навіть пропонується побудувати топологічний квантовий комп'ютер, який через свою топологічну природу повинен бути набагато більш толерантним до перешкод і помилок, ніж "звичайний" квантовий комп'ютер [5]. Відкривається широке поле для роботи у даній сфері.

У даній роботі розглядатимемо питання опису двох еніонів у магнітному полі. На відміну від стандартного підходу, ми включимо в розгляд ефекти, пов'язані з існуванням гіпотетичних магнітних зарядів, відомих як монополі Дірака [6]. Окрім методичного інтересу, така задача може бути пов'язана з інтерпретацією експериментів у конденсованих середовищах, де магнітні монополі виникають ефективно [7, 8].

1 Дві частинки в однорідному магнітному полі

Розглянемо задачу про рух двох частинок у площині, перпендикулярній до вектора $\mathbf{B}_0$, який задає стале магнітне поле. У першому наближенні знехтуємо кулонівським відштовхуванням. Розгляд цього питання дуже подібний на розгляд звичайного електрона на рівнях Ландау, але з певними відмінностями, які накладає еніонна статистика [9].

Отже, будемо спочатку розглядати дві ідентичні безспінові заряджені частинки масою m і зарядом e в однорідному магнітному полі [9]. Гамільтоніан системи:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\left(\hat{\mathbf{p}}_1 - \frac{e}{c}\mathbf{A}_1\right)^2 + \left(\hat{\mathbf{p}}_2 - \frac{e}{c}\mathbf{A}_2\right)^2\right], \tag{4}$$

де векторний потенціал у симетричному калібруванні

$$\mathbf{A}_k = \frac{1}{2}[\mathbf{B}, \mathbf{r}_k]. \tag{5}$$

Нехай магнітне поле спрямоване вздовж осі Oz, $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$. Без втрати загальності можна вважати $B_0 > 0$.

В термінах координат центра мас і відносного руху ($\mathbf{R}$ та $\mathbf{r}$ відповідно) гамільтоніан розділиться на дві частини, $\hat{H} = \hat{H}_{\text{c.m.}} + \hat{H}_{\text{rel}}$:

$$\hat{H}_{\text{c.m.}} = \frac{1}{4m}\left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{2e}{c}\mathbf{A}_{\text{c.m.}}\right)^2 \tag{6}$$

та

$$\hat{H}_{\text{rel}} = \frac{1}{m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{2c}\mathbf{A}_{\text{rel}}\right)^2, \tag{7}$$

де

$$\mathbf{A}_{\text{c.m.}} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}, \mathbf{R}], \qquad \mathbf{A}_{\text{rel}} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}, \mathbf{r}]. \tag{8}$$

Рівняння Шредингера, що відповідає гамільтоніанові відносного руху, зручно записати в циліндричній системі координатах:

$$\hat{H}_{\text{rel}}\Psi(r,\phi) = E\Psi(r,\phi). \tag{9}$$

Хвильову функцію шукатимемо у вигляді

$$\Psi(r,\phi) = e^{i\ell\phi}R(r), \tag{10}$$

де $\ell = 0, \pm2, \pm4, \ldots (\pm1, \pm3, \pm5, \ldots)$ для бозонів (ферміонів). Надалі ми відштовхуватимемося від бозонної задачі, тому обмежимося парними значеннями ℓ. Для радіальної частини матимемо рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{eB_0\ell}{2\hbar c} - \frac{e^2B_0^2r^2}{16\hbar^2c^2} + \frac{mE}{\hbar^2}\right]R(r) = 0. \tag{11}$$

Власні значення для енергії будуть

$$E_{n,\ell} = (2n + |\ell| - \ell + 1)\hbar\omega_c, \tag{12}$$

де $\omega_c = eB_0/(2mc)$ — циклотронна частота, квантові числа $n = 0, 1, 2, \ldots$, а $\ell = 0, \pm2, \pm4, \ldots$. Відповідна радіальна хвильова функція буде

$$R_{n,\ell}(r) = r^{|\ell|}\exp\left(-\frac{m\omega_c}{4\hbar}r^2\right)L_n^{|\ell|}\left(\frac{m\omega_c}{2\hbar}r^2\right). \tag{13}$$

Тут $L_n^{|\ell|}(x)$ — приєднані поліноми Лаґерра.

Для переходу до задачі двох еніонів потрібно зробити заміну ℓ на $\ell - \alpha$ [9]. Хвильова функція матиме вигляд

$$\Psi(r,\phi) = e^{i(\ell-\alpha)\phi}R(r), \tag{14}$$

а радіальне рівняння Шредингера перепишеться так:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(\ell-\alpha)^2}{r^2} + \frac{eB_0(\ell-\alpha)}{2\hbar c} - \frac{e^2B_0^2r^2}{16\hbar^2c^2} + \frac{mE}{\hbar^2}\right]R(r) = 0. \tag{15}$$

Власні значення енергії задачі двох еніонів будуть

$$E_{n,\ell} = \big[2n + |\ell-\alpha| - (\ell-\alpha) + 1\big]\hbar\omega_c. \tag{16}$$

Легко зауважити, що вони є двох типів:

$$E_{n,\ell}^{(1)} = (2n+1)\hbar\omega_c \qquad \text{при} \quad \ell > 0, \tag{17}$$

$$E_{n,\ell}^{(2)} = (2n + 2|\ell| + 2\alpha + 1)\hbar\omega_c \qquad \text{при} \quad \ell \le 0. \tag{18}$$

Відповідні радіальні хвильові функції будуть:

$$R^{(1)}_{n,\ell}(r) = r^{\ell-\alpha}\exp\left(-\frac{m\omega_c}{4\hbar}r^2\right)L_n^{\ell-\alpha}\left(\frac{m\omega_c}{2\hbar}r^2\right) \qquad \text{при} \quad \ell > 0, \tag{19}$$

$$R^{(2)}_{n,\ell}(r) = r^{|\ell|+\alpha}\exp\left(-\frac{m\omega_c}{4\hbar}r^2\right)L_n^{|\ell|+\alpha}\left(\frac{m\omega_c}{2\hbar}r^2\right) \qquad \text{при} \quad \ell \le 0. \tag{20}$$

Як бачимо з (17), відповідні стани є безмежно виродженими (фізичне обмеження зверху на квантове число ℓ накладає лише скінченність площі реальних зразків) [9, p. 53]. Стани другого типу (18) мають кратність виродження $(n_1/2+1)$, де $n_1 = n+|\ell|$ [9, p. 54].

2 Електромагнітне поле з магнітними зарядами

Вважатимемо, що поряд з електричними існують магнітні заряди. 4-вектор потенціалу, який пов'язаний з електричними зарядами, позначатимемо $A^{(\mathrm{e})}_\xi$, а з магнітними — $A^{(\mathrm{m})}_\xi$. Величина магнітного заряду нехай буде μ.

Для частинки масою m з електричним зарядом e дія в електромагнітному полі запишеться в такому випадку:

$$\begin{aligned} S &= \int\left\{-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt - \frac{e}{c}A^{(\mathrm{e})}_\xi dx^\xi - \frac{\mu}{c}A^{(\mathrm{m})}_\xi dx^\xi\right\} \\ &= \int\left\{-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\varphi^{(\mathrm{e})} - \mu\varphi^{(\mathrm{m})} + \frac{e}{c}\mathbf{A}^{(\mathrm{e})}\mathbf{v} + \frac{\mu}{c}\mathbf{A}^{(\mathrm{m})}\mathbf{v}\right\}dt = \int\mathcal{L}\,dt, \end{aligned} \tag{21}$$

Отже, лаґранжіан $\mathcal{L}$ дорівнює

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\varphi^{(\mathrm{e})} - \mu\varphi^{(\mathrm{m})} + \frac{e}{c}\mathbf{A}^{(\mathrm{e})}\mathbf{v} + \frac{\mu}{c}\mathbf{A}^{(\mathrm{m})}\mathbf{v}, \tag{22}$$

так що узагальнений імпульс $\mathbf{P} = \partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{v}$ пов'язаний з механічним імпульсом $\mathbf{p} = m\mathbf{v}(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ співвідношенням

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}^{(\mathrm{e})} - \frac{\mu}{c}\mathbf{A}^{(\mathrm{m})}. \tag{23}$$

Відзначмо, що магнітне поле дорівнюватиме [10], порівн. [11]:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}^{(\mathrm{e})} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}^{(\mathrm{m})}}{\partial t}. \tag{24}$$

Для того, щоб воно було сталим, виберемо векторні потенціали у вигляді

$$\mathbf{A}^{(\mathrm{e})} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}_0, \mathbf{r}], \qquad \mathbf{A}^{(\mathrm{m})} = \mathbf{a}t, \tag{25}$$

де $\mathbf{B_0}$ та $\mathbf{a}$ — сталі вектори. Отже,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{1}{c}\mathbf{a}. \tag{26}$$

Нехай величина $a \equiv |\mathbf{a}|$ — мала, тоді залежність від часу буде слабкою. У такому випадку можна розглядати квантовомеханічну задачу в так званому адіабатичному наближенні, коли час буде просто параметром.

Гамільтоніан двох частинок матиме вигляд:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\left(\hat{\mathbf{p}}_1 - \frac{e}{c}\mathbf{A}_1^{(\mathrm{e})} - \frac{\mu}{c}\mathbf{A}_1^{(\mathrm{m})}\right)^2 + \left(\hat{\mathbf{p}}_2 - \frac{e}{c}\mathbf{A}_2^{(\mathrm{e})} - \frac{\mu}{c}\mathbf{A}_2^{(\mathrm{m})}\right)^2\right], \tag{27}$$

Для гамільтоніана відносного руху

$$\hat{H}_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{2c}\mathbf{A}_{\mathrm{rel}}^{(\mathrm{e})} - \frac{\mu}{2c}\mathbf{A}_{\mathrm{rel}}^{(\mathrm{m})}\right)^2, \tag{28}$$

вважаючи, що вектор $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_\phi$, після низки перетворень, аналогічних до наведених у попередньому розділі, отримаємо в полярних координатах радіальне рівняння для двох еніонів

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{(\ell-\alpha)^2}{r^2} + \frac{eB_0(\ell-\alpha)}{2\hbar c} - \frac{e^2B_0^2r^2}{16\hbar^2c^2}\right.$$
$$\left. + \frac{\mu a t}{\hbar c}\frac{\ell-\alpha}{r} - \frac{e\mu B_0 a t}{4\hbar^2c^2}r - \left(\frac{\mu a t}{2\hbar c}\right)^2 + \frac{mE}{\hbar^2}\right]R(r) = 0. \tag{29}$$

Цікаво, що, за Діраком, електричні і магнітні заряди квантуються [6]:

$$2\frac{e\mu}{\hbar c} = k, \qquad \text{де } k \text{ — ціле число.} \tag{30}$$

Відзначимо також, що вибір векторного потенціалу $\mathbf{A}^{(\mathrm{m})} = \mathbf{a}t$ у вигляді, наприклад, $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_r$, не дасть нових результатів для спектра власних значень, оскільки таку задачу можна звести до вихідної з гамільтоніаном (7) за допомогою ґрадієнтного перетворення [12, с. 416–417].

Розв'язуватимемо отриману задачу таким чином. З (29) виділимо відому нам задачу двох частинок (15). Решта доданків — збурення

$$\hat{V} = -\frac{\hbar^2}{m}\left[\frac{\mu a t}{\hbar c}\frac{\ell-\alpha}{r} - \frac{e\mu B_0 a t}{4\hbar^2c^2}r - \left(\frac{\mu a t}{2\hbar c}\right)^2\right]. \tag{31}$$

Розрахунки за теорією збурень наведено в наступному розділі.

3 Поправки до спектра

Як зазначалося в розділі 1, енерґетичні рівні нульової задачі вироджені, тобто одному значенню енерґії відповідає не одна власна функція, а декілька, що ускладнює розрахунки за теорією збурень [13, с. 434–435].

У нашому випадку, завдяки кутовій залежності $e^{i(\ell-\alpha)\phi}$ у хвильовій функції (14), матричні елементи оператора збурення будуть діагональними за квантовим числом ℓ:

$$\frac{\langle m\ell'|\hat{V}|n\ell\rangle}{\langle n\ell|n\ell\rangle} \equiv \frac{1}{\langle n\ell|n\ell\rangle}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-i(\ell-\alpha)\phi}R_{m,\ell}(r)\hat{V}e^{i(\ell-\alpha)\phi}R_{n,\ell}(r) = V_{mn}^{\ell\ell}\delta_{\ell'\ell}. \tag{32}$$

Тому умовою нетривіальності розв'язку задачі теорії збурень є рівність нулеві такого визначника:

$$\begin{vmatrix} V_{nn}^{22} - \Delta E_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_{nn}^{44} - \Delta E_n & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & V_{nn}^{66} - \Delta E_n & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{для } \ell = 2, 4, 6, \ldots . \tag{33}$$

Отже, поправки до енергій n-го рівня (17) просто дорівнюють

$$\Delta E_{n,\ell}^{(1)} = V_{nn}^{\ell\ell}. \tag{34}$$

Поправки $\Delta E_{n,\ell}^{(2)}$ до рівнів другого типу (18) з $\ell = 0, -2, -4, \ldots$ отримаємо аналогічним способом.

Знайдемо спочатку квадрати норми хвильової функції (14) з урахуванням двох типів радіальних залежностей (19), (20):

$$\begin{aligned} \langle n\ell|n\ell\rangle^{(1)} &\equiv \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-i(\ell-\alpha)\phi} R_{n,\ell}^{(1)}(r) e^{i(\ell-\alpha)\phi} R_{n,\ell}^{(1)}(r) \\ &= 2\pi \left(\frac{m\omega_c}{2\hbar}\right)^{-(\ell-\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+1+\ell-\alpha)}{2n!}, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \langle n\ell|n\ell\rangle^{(2)} &\equiv \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{i(|\ell|+\alpha)\phi} R_{n,\ell}^{(2)}(r) e^{-i(|\ell|+\alpha)\phi} R_{n,\ell}^{(2)}(r) \\ &= 2\pi \left(\frac{m\omega_c}{2\hbar}\right)^{-(|\ell|+\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+1+|\ell|+\alpha)}{2n!}, \end{aligned} \tag{36}$$

де $\Gamma(x)$ — гамма-функція Ейлера.

В операторі збурення (31) останній доданок (пропорційний до a^2) дає внесок лише в другу поправку до енергії, тому ми обмежимось першими двома:

$$\langle n\ell|\hat{V}|n\ell\rangle^{(1)} \equiv -2\pi \frac{\hbar^2}{m} \int_0^{\infty} dr\, r\, R_{n,\ell}^{(1)}(r) \left[\frac{\mu a t}{\hbar c}\frac{\ell-\alpha}{r} - \frac{e\mu B_0 a t}{4\hbar^2 c^2}\, r\right] R_{n,\ell}^{(1)}(r)$$

$$= -2\pi \frac{1}{2n!} \left(\frac{m\omega_c}{2\hbar}\right)^{-(\ell-\alpha+3/2)} \frac{\hbar^2}{m} \left[\frac{m\omega_c}{2\hbar}\frac{\mu a t}{\hbar c}\, P(n,\ell,\alpha) - \frac{e\mu B_0 a t}{4\hbar^2 c^2}\, Q(n,\ell,\alpha)\right], \tag{37}$$

де коефіцієнти P та Q виражаються через гіпергеометричну функцію [14]:

$$P(n,\ell,\alpha) = (\ell-\alpha)\frac{\Gamma(\ell-\alpha+1/2)\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+\ell-\alpha+1)}{n!\,\Gamma(1/2)\Gamma(\ell-\alpha+1)} \times {}_3F_2\left(-n,\ell-\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2};\ -n+\frac{1}{2},\ell-\alpha+1;\ 1\right), \tag{38}$$

$$Q(n,\ell,\alpha) = \frac{\Gamma(\ell-\alpha+3/2)\Gamma(n-1/2)\Gamma(n+\ell-\alpha+1)}{n!\,\Gamma(-1/2)\Gamma(\ell-\alpha+1)} \times {}_3F_2\left(-n,\ell-\alpha+\frac{3}{2},\frac{3}{2};\ -n+\frac{3}{2},\ell-\alpha+1;\ 1\right) \tag{39}$$

З такими виразами складно працювати, тому для зручності просто розглянемо далі результати для окремих значень n та ℓ.

Враховуючи, що хвильові функції за від'ємних значень ℓ можна отримати з відповідних виразів для $\ell > 0$ замінами $\ell \to |\ell|$ та $\alpha \to -\alpha$, матричні елементи дорівнюватимуть

$$V_{nn}^{\ell\ell} = \frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_c}}\frac{e\mu}{4\hbar^2c^2}\,\frac{Q(n,\ell,\alpha)-P(n,\ell,\alpha)}{\Gamma(n+1+\ell-\alpha)}\,B_0at \quad \text{для} \quad \ell = 2,4,6\ldots, \tag{40}$$

$$V_{nn}^{\ell\ell} = \frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_c}}\frac{e\mu}{4\hbar^2c^2}\,\frac{Q(n,|\ell|,-\alpha)-P(n,|\ell|,-\alpha)}{\Gamma(n+1+|\ell|+\alpha)}\,B_0at \quad \text{для} \quad \ell = 0,-2,-4,\ldots. \tag{41}$$

Зокрема, для кількох перших рівнів значення числового коефіцієнта біля

$$\frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_c}}\frac{e\mu}{4\hbar^2c^2}B_0at$$

розкладаються в ряд за параметром α з точністю до α^2 у вигляді:

$$\begin{aligned}
n=0,\ \ell=-2:&\quad 0.332335-0.07299\alpha+0.0238716\alpha^2,\\
\ell=0:&\quad 0.886227-1.22857\alpha+2.30937\alpha^2,\\
\ell=2:&\quad 0.332335+0.07299\alpha+0.0238716\alpha^2;\\[1em]
n=1,\ \ell=-2:&\quad 0.858532-0.142400\alpha+0.036145\alpha^2,\\
\ell=0:&\quad 1.55090-1.04222\alpha+1.39789\alpha^2,\\
\ell=2:&\quad 0.858532+0.142400\alpha+0.036145\alpha^2;\\[1em]
n=2,\ \ell=-2:&\quad 1.28866-0.176215\alpha+0.0378834\alpha^2,\\
\ell=0:&\quad 2.00786-0.921021\alpha+1.06818\alpha^2,\\
\ell=2:&\quad 1.28866+0.176215\alpha+0.0378834\alpha^2.
\end{aligned} \tag{42}$$

Графічно відповідні залежності зображено на рис. 1.

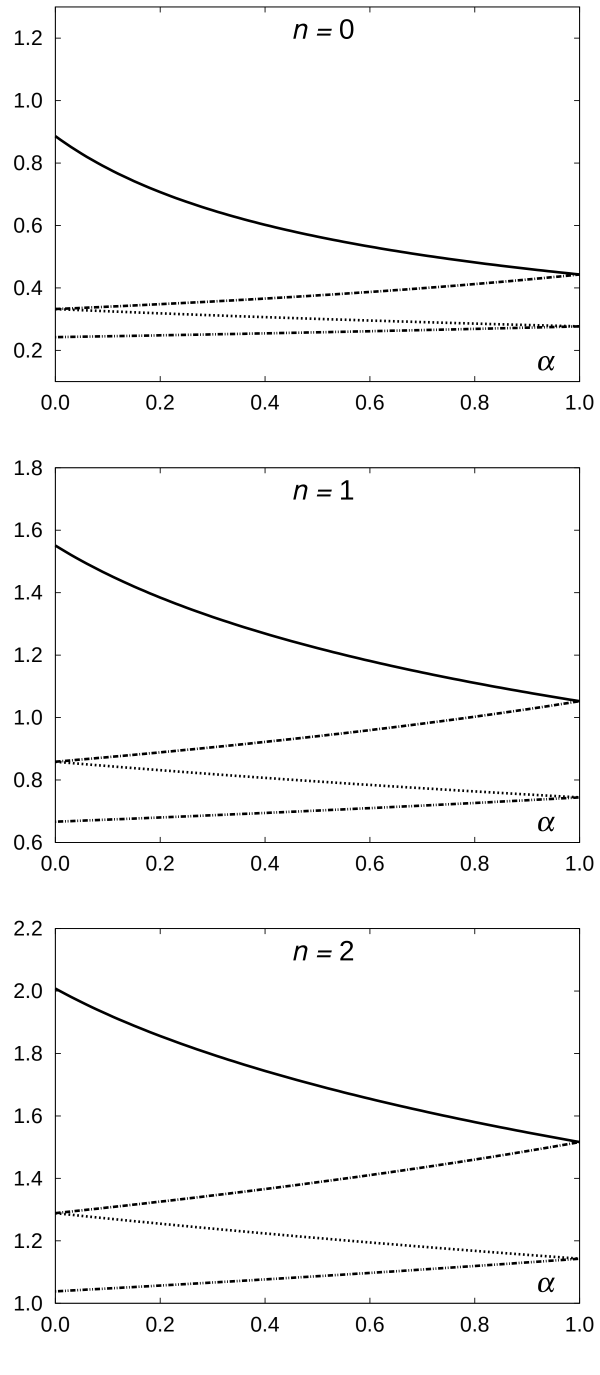

Рис. 1: Числові коефіцієнти в поправці (42) до енерґії при $n = 0, 1, 2$. Суцільна лінія відповідає $\ell = 0$, пунктирна — $\ell = -2$, штрих-пунктирна — $\ell = 2$, штрихова з двома крапками — $\ell = 4$.

Висновки

У даній роботі розглянуто задачу знаходження енерґетичного спектра двох еніонів у сталому магнітному полі з урахуванням внесків від гіпотетичних магнітних зарядів. Відповідний внесок ми вважали малим параметром, внаслідок чого розраховано першу поправку за теорією збурень і показано, що її врахування знімає виродження енерґетичних рівнів за орбітальним квантовим числом.

Після незначних модифікацій зроблені розрахунки можуть бути застосовані до інших задач, у яких збурення має подібний характер. У перспективі передбачено докладний аналіз способів уведення в теорію магнітних зарядів, зокрема у просторах різної вимірності, та дослідження систем еніонів за таких умов.

Подяки. Автори висловлюють подяку проф. В. М. Ткачуку за обговорення деяких аспектів роботи.

Ця публікація частково підтримана в межах теми ФФ-30Ф (номер держреєстрації 0116U001539) МОН України та ґранту ДФФД України Ф-64 (номер держреєстрації 0116U005055).

Література

1. *Leinaas J. M.* On the theory of identical particles / J. M. Leinaas, J. Myrheim // Nuovo Cim. — 1977. — Vol. 37B, No. 1. — P. 1–23.

2. *Wilczek F.* Quantum mechanics of fractional-spin particles / F. Wilczek // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 49, No. 14. — P. 957–959.

3. *Tsui D. C.* Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit / D. C. Tsui, H. L. Stormer, A. C. Gossard // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 48, No. 22. — P. 1559–1562.

4. *Arovas D.* Fractional statistics and the quantum Hall effect / D. Arovas, J. R. Schrieffer, F. Wilczek // Phys. Rev. Lett. — 1984. — Vol. 53, No. 7. — P. 722–723.

5. *Kitaev A. Yu.* Fault-tolerant quantum computation by anyons / A. Yu. Kitaev // Ann. Phys. — 2003. — Vol. 303, No. 1. — P. 2–30.

6. *Dirac P. A. M.* Quantised singularities in the electromagnetic field / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. London A. — 1931. — Vol. 133, No. 821. — P. 60–72.

7. *Castelnovo C.* Magnetic monopoles in spin ice / C. Castelnovo, R. Moessner, S. L. Sondhi // Nature. — 2008. — Vol. 451, No. 7174. — P. 42–45.

8. Possible observation of highly itinerant quantum magnetic monopoles in the frustrated pyrochlore $Yb_2Ti_2O_7$ / Y. Tokiwa, T. Yamashita, M. Udagawa [et al.] // Nature Commun. — 2016. — Vol. 7. — Art. 10807. — 6 p.

9. *Khare A.* Fractional Statistics and Quantum Theory / A. Khare. — 2nd edition. — Singapore : World Scientific, 2005. — xiv, 300 p.

10. *McDonald K. T.* Electrodynamics in 1 and 2 spatial dimensions [Electronic resource] / K. T. McDonald. — 2014. — 11 p. — Available from: http://www.physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/2dem.pdf.

11. *Dirac P. A. M.* The theory of magnetic poles / P. A. M. Dirac // Phys. Rev. — 1948. — Vol. 74, No. 7. — P. 817–830.

12. *Бом Д.* Квантовая теория / Д. Бом. — Москва : Наука, 1965. — 729 с.

13. *Вакарчук І. О.* Квантова механіка / І. О. Вакарчук. — 4-те вид. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2012. — 872 с.

14. LaguerreL : Generalized Laguerre Polynomials. — Wolfram Research, Inc., 1998–2016. — Available from: http://functions.wolfram.com/Polynomials/LaguerreL3/21/02/01/.

Стаття надійшла до редакції 08.06.2016
прийнята до друку 17.06.2016

Spectrum of two anyons in a constant magnetic field with magnetic charges

B. Sobko, A. Rovenchak

Department for Theoretical Physics,
Ivan Franko National University of Lviv
12, Drahomanov St, 79005 Lviv, Ukraine
e-mail: {bohdanka.sobko.d, andrij.rovenchak}@gmail.com

In the paper, the problem of two anyons in the magnetic field with magnetic charges is considerd. The perturbation theory is developed over the contribution from magnetic charges being a small parameter. Corrections to the spectrum of such a system are calculated. The ferst perturbative correction is shown to lift the level degeneracy.

Key words: anyon, magnetic field, magnetic charge, perturbation theory

Спектр системы двух энионов в постоянном магнитном поле с магнитными зарядами

Б. Собко, А. Ровенчак

Кафедра теоретической физики,
Львовский национальный университет имени Ивана Франко
ул. Драгоманова, 12, 79005 Львов, Украина
e-mail: {bohdanka.sobko.d, andrij.rovenchak}@gmail.com

В работе рассмотрена задача двух энионов в магнитном поле с магнитными зарядами. С помощью теории возмущений, где малым параметром является поле магнитных зарядов, рассчитаны поправки к спектру такой системы. Показано, что первая поправка снимает вырождение энергетических уровней.

Ключевые слова: энион, магнитное поле, магнитный заряд, теория возмущений