

УДК 524.31.084, 524.384, 524.352.3
PACS 97.20Rp, 97.60Bw

СТАТИСТИЧНИЙ ОПИС ЕЛЕКТРОН-ЯДЕРНОЇ МОДЕЛІ В ТЕОРІЇ ВИРОДЖЕНИХ КАРЛИКІВ. II. ЕНЕРГІЯ ТА РІВНЯННЯ СТАНУ ПРИ $T = 0K$ У ПАРАМАГНІТНІЙ ФАЗІ

М. Ваврух, Д. Дзіковський, Н. Тишко,

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра астрофізики, вул. Кирила і Мефодія, 8, 79005 Львів,
Україна*

e-mail: mvavrukh@gmail.com

У рамках базисного підходу розраховано енергію основного стану макроскопічно однорідної двокомпонентної електрон-ядерної моделі з кулонівськими взаємодіями при високих густинах у наближенні дво- та тричастинкових електронних кореляцій в широкій області параметра релятивізму. Проаналізовано внески основних складових енергії до рівняння стану моделі у випадку кристалічної структури ядерної підсистеми.

Ключові слова: електрон-ядерна модель, кулонівські взаємодії, електронні кореляції, параметр релятивізму, рівняння стану

1 Вступ

На роль міжчастинкових кулонівських взаємодій в теорії вироджених карликів вперше звернув увагу Е. Солпітер [1]. Він виконав оцінку впливу взаємодій на рівняння стану однорідної електрон-ядерної моделі при високих густинах у наближеннях Вігнера-Зейтца, Томаса-Фермі та наближенні хаотичних фаз, що в основному відповідає наближеному врахуванню двочастинкових міжелектронних кореляцій. Було показано, що кулонівські взаємодії призводять до невеликого зменшення тиску. Знайдене Е. Солпітером рівняння стану було використане у роботі [2] для розрахунку співвідношення “маса-радіус” для холодних карликів.

Послідовний підхід до розрахунку рівняння стану електрон-ядерної моделі при $T = 0K$ був запропонований у роботі [3]. Це не що інше, як базисний підхід до опису електрон-іонної моделі металу [5–8], адаптований до моделі з релятивістською електронною підсистемою, що вимагає розрахунку n -частинкових статичних та динамічних кореляційних функцій електронної підсистеми. Конкретні розрахунки в

роботі [3] виконано на основі наближених виразів для двочастинкової кореляційної функції.

Метою цієї роботи є точніші розрахунки внесків до енергії та тиску електрон-ядерної моделі за рахунок дво- та тричастинкових кореляцій виродженого релятивістського електронного газу з кулонівськими взаємодіями, який відіграє роль базисної системи, а вплив електрон-ядерних взаємодій враховано у другому та третьому порядку теорії збурень з точністю до $z^2\alpha_0^{5/2}$, де z – заряд ядра, $\alpha_0 = e^2/\hbar c$ – стала тонкої структури.

2 Енергія основного стану

Згідно з формулами (18)-(19) роботи [4], енергію основного стану моделі можна представити у вигляді

$$E = E_e + N_n\omega + E_{\text{конф}} + E_{\text{комп}}, \quad (1)$$

де E_e – енергія однорідного взаємодіючого електронного газу, N_n – число ядер, ω – енергія поляризації однорідної електронної рідини одним ядром (енергія впровадження), $E_{\text{конф}}$ – сума енергій багаточастинкових ефективних взаємодій, $E_{\text{комп}}$ – внесок компенсуючого фону, пов'язаний із компонентами потенціалів при $\mathbf{q} = 0$.

Енергію базисної системи розрахуємо за допомогою двочастинкової кореляційної функції

$$E_e = E_e^0 + (2\beta V)^{-1} \sum_{\mathbf{q}, \nu} V_q \int_0^1 \mu_2^\lambda(q, \nu) d\lambda, \quad (2)$$

де E_e^0 – енергія ідеальної системи, а

$$\mu_2^\lambda(q, \nu) = \tilde{\mu}_2^0(q, \nu) \left\{ 1 + \lambda \frac{V_q}{V} \tilde{\mu}_2^0(q, \nu) [1 - G^\lambda(q, \nu)] \right\}^{-1} \quad (3)$$

кореляційна функція допоміжної системи з потенціалом взаємодії λV_q , $G^\lambda(q, \nu)$ – поправка на локальне поле, $\tilde{\mu}_2^0(q, \nu)$ – динамічна двочастинкова кореляційна функція ідеальної моделі (без взаємодії) [4], $V_q = 4\pi e^2/q^2$ – зображення Фур'є потенціалу Кулона. Виділяючи внесок Гартрі-Фока, представимо E_e у традиційному вигляді

$$E_e = E_e^0 - \frac{1}{2V\beta} \sum_{\mathbf{q}, \nu} \tilde{\mu}_2^0(q, \nu) V_q + E_{\text{corr}}. \quad (4)$$

У наближенні Гелдарга-Тейлора поправка на локальне поле $G_{id}(q, \nu)$ [4] не залежить від константи зв'язку, тому у цьому наближенні

$$E_{\text{corr}} = \frac{1}{2V\beta} \sum_{\mathbf{q}, \nu} [1 - G_{id}(q, \nu)]^{-1} \left\{ \ln \varepsilon(q, \nu) - \frac{V_q}{V} \tilde{\mu}_2^0(q, \nu) (1 - G_{id}(q, \nu)) \right\}, \quad (5)$$

де

$$\varepsilon(q, \nu) = 1 + \frac{V_q}{V} \mu_2^0(q, \nu) [1 - G_{id}(q, \nu)]. \quad (6)$$

В одиницях m_0c^2

$$E_e = N_e m_0 c^2 \left\{ \varepsilon_0(y) - \frac{3}{4\pi} \alpha_0 y + \alpha_0^2 \varepsilon_c(y) \right\}. \quad (7)$$

Тут

$$\varepsilon_0(y) = (2y)^{-3} \{ 3y(1+y^2)^{1/2}(1+2y^2) - 8y^3 - 3 \ln [y + (1+y^2)^{1/2}] \} - \quad (8)$$

внесок ідеальної системи в розрахунку на один електрон: $y = \hbar k / m_0 c$ – параметр релятивізму, $3\alpha_0 y (4\pi)^{-1}$ – внесок взаємодій у наближенні Гартрі-Фока, $\alpha_0^2 \varepsilon_c(y)$ – кореляційний внесок. Доданок $\varepsilon_0(y)$ не залежить від сталої тонкої структури і має таку асимптотику відносно параметра релятивізму:

$$\varepsilon_0(y) = \begin{cases} \frac{3}{10} y^2 + \dots & \text{при } y \ll 1, \\ \frac{3}{4} y + \dots & \text{при } y \gg 1. \end{cases} \quad (9)$$

В області $y \lesssim 1$ величина $\alpha_0^2 \varepsilon_c(y)$ близька до кореляційної енергії нерелятивістської моделі, розрахованої методом Монте-Карло [9], але має лінійну залежність від параметра y при $y > 1$, як видно з рисунка 1. Згідно з нашими розрахунками вона може бути представлена у вигляді

$$\varepsilon_c(y) = -b_0 \int_0^y dt \frac{(b_1 a + t^{1/2})}{t^{3/2} + t b_1 a + b_2 t^{1/2} a^2 + b_3 a^3} \cdot \frac{1 + a_1 t + a_2 t}{1 + t d}, \quad (10)$$

$$a = (\alpha_0 \eta)^{1/2}; \quad a_1 = 1,21954; \quad a_2 = 1,33205; \quad d = 1,18934;$$

$$b_0 = 0,0621814; \quad b_1 = 9,81379; \quad b_2 = 2,82214; \quad b_3 = 0,73701.$$

Враховуючи співвідношення

$$m_0 c^2 \alpha_0^2 = \frac{e^2}{a_0}, \quad \frac{\alpha_0}{y} = \frac{r_s}{\eta}, \quad (11)$$

де $\eta = (9\pi/4)^{1/3}$, a_0 – радіус Бора, $r_s = \eta (k_F a_0)^{-1}$ – параметр Вігнера-Бракнера, бачимо, що при $a_1 = a_2 = d = 0$ вираз (10) збігається з кореляційною енергією нерелятивістської моделі, записаною через параметр r_s ,

$$\varepsilon_c(r_s) = -2b_0 \int_{\sqrt{r_s}}^{\infty} \frac{dx (b_1 + \frac{1}{x})}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}. \quad (12)$$

Цей вираз відповідає результату розрахунку методом Монте-Карло [9], а перехід від змінної t до змінної x виконується за допомогою підстановки $t = \alpha_0 \eta / x^2$. З формули (10) видно, що при великих значеннях параметра релятивізму $\varepsilon_c(y) \sim -2b_0 y$. Як впливає з формули (12) кореляційна енергія нерелятивістської моделі при великих значеннях параметра релятивізму має іншу асимптотику, а саме $\varepsilon_c(y) \sim -2b_0 \ln y$.

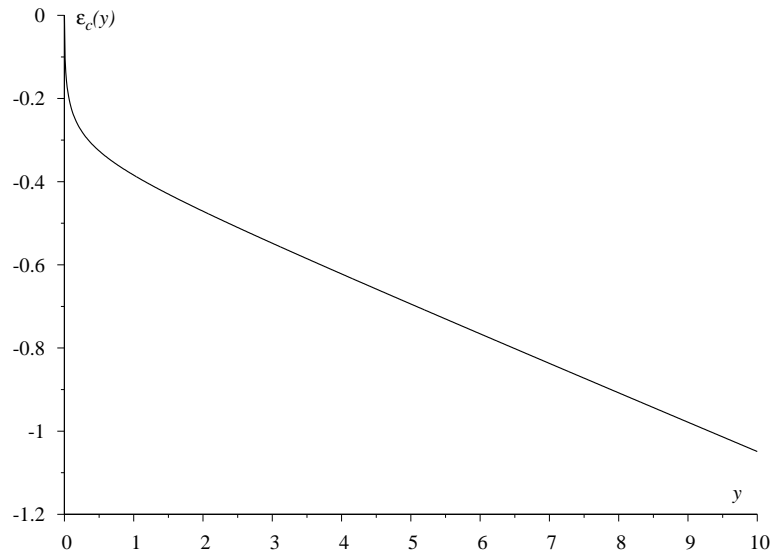


Рис. 1: Кореляційна енергія моделі електронної рідини в одиницях $m_0c^2\alpha_0^2$ на електрон як функція параметра релятивізму y .

Добутки структурних факторів ядерної підсистеми $S_{\mathbf{q}_1}S_{\mathbf{q}_2}\dots S_{\mathbf{q}_n}$ (див. ф. (19) роботи [4]) можна представити як суму частинкового фактора n -го порядку

$$\tilde{S}_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \sum_{j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_n=1}^{N_n} \exp\{i[(\mathbf{q}_1, \mathbf{R}_{j_1}) + (\mathbf{q}_2, \mathbf{R}_{j_2}) + \dots + (\mathbf{q}_n, \mathbf{R}_{j_n})]\} \quad (13)$$

та нижчих порядків згідно з такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{q}}S_{-\mathbf{q}} &= N_n + \tilde{S}_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}), \\ S_{\mathbf{q}_1}S_{\mathbf{q}_2}S_{-\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2} &= N_n + \tilde{S}_2(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1) + \tilde{S}_2(\mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) + \\ &+ \tilde{S}_2(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \tilde{S}_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2), \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Члени, пропорційні числу ядер, формують енергію поляризації:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_2 + \omega_3 + \dots, \\ \omega_2 &= -\frac{z^2}{2!V^2} \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}}^2 \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}), \\ \omega_3 &= -\frac{z^3}{3!V^3} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq \mathbf{q}_2} \mu_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2} V_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Тут $\mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ та $\mu_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$ – дво- та тричастинкова статичні кореляційні функції моделі електронної рідини [4]. Члени, пропорційні $\tilde{S}_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$, визначають

внесок у конфігураційну енергію двочастинкових ефективних взаємодій між ядрами

$$E_{\text{конф}}^{(2)} = \frac{1}{2!} \sum_{j_1 \neq j_2} V_2(\mathbf{R}_{j_1} - \mathbf{R}_{j_2}), \quad (16)$$

а члени, пропорційні $\tilde{S}_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, дають внесок тричастинкових кореляцій електронної рідини

$$E_{\text{конф}}^{(3)} = \frac{1}{3!} \sum_{j_1 \neq j_2 \neq j_3} V_3(\mathbf{R}_{j_1}, \mathbf{R}_{j_2}, \mathbf{R}_{j_3}). \quad (17)$$

Ефективні потенціали визначені такими співвідношеннями

$$\begin{aligned} V_2(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) &= \frac{z^2}{V} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ V_q \left[1 - \frac{V_q}{V} \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{V_q}{V^2} \sum_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1} \mu_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, -\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) + \dots \right\} \exp [i(\mathbf{q}, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)]; \\ V_3(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3) &= -\frac{z^3}{V^3} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3} \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3, 0} \mu_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \times \\ &\quad \times V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2} V_{\mathbf{q}_3} \exp \{i[(\mathbf{q}_1, \mathbf{R}_1) + (\mathbf{q}_2, \mathbf{R}_2) + (\mathbf{q}_3, \mathbf{R}_3)]\}; \dots \end{aligned} \quad (18)$$

У зв'язку з тим, що у сумах за векторами $\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \dots$ формул (18) присутні компоненти з $\mathbf{q} = 0$, виникає енергія компенсуючого фону

$$\begin{aligned} E_{\text{комп}} &= -\frac{z^2}{2} N_n (N_n - 1) \lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \left\{ \frac{V_q}{V} \left[1 - \frac{V_q}{V} \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{V_q}{V^3} \sum_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1} \mu_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, -\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) + \dots \right\} + \frac{z^3}{3!} N_n (N_n - 1) (N_n - 2) \times \\ &\quad \times \lim_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rightarrow 0} \{V^{-3} V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2} V_{-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2} \mu_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \dots\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Виділяючи внески дво- та тричастинкових кореляцій, запишемо енергію поляризації електронної рідини у вигляді

$$\begin{aligned} E_\omega &= N_n (\omega_2 + \omega_3 + \dots) = E_\omega^{(2)} + E_\omega^{(3)} + \dots, \\ E_\omega^{(2)} &= N_e m_0 c^2 z \alpha_0^{3/2} \varepsilon_\omega^{(2)}(y), \\ E_\omega^{(3)} &= N_e m_0 c^2 z^2 \alpha_0^{5/2} \varepsilon_\omega^{(3)}(y), \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Функцію $\varepsilon_\omega^{(2)}(y)$ розраховано у роботі [3] і зображено у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\omega^{(2)}(y) &= -\int_0^y dt \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3}; \\ c_0 &= 4,06151; \quad c_1 = 32,6118; \quad c_2 = -43,6587; \quad c_3 = 104,13; \\ d_1 &= 73,8252; \quad d_2 = -67,1028; \quad d_3 = 189,781. \end{aligned} \quad (21)$$

Функцію $\varepsilon_{\omega}^{(3)}(y)$, зумовлену тричастинковими кореляціями і розраховану нами чисельним методом, можна представити в аналогічній формі:

$$\varepsilon_{\omega}^{(3)}(y) = - \int_0^y dt \frac{p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3}{1 + g_1 t + g_2 t^2 + g_3 t^3}; \quad (22)$$

$p_0 = 0,127774; \quad p_1 = -0,94948; \quad p_2 = 3,56026; \quad p_3 = -2,7526;$
 $g_1 = -11,5297; \quad g_2 = 57,2066; \quad g_3 = -47,0036.$

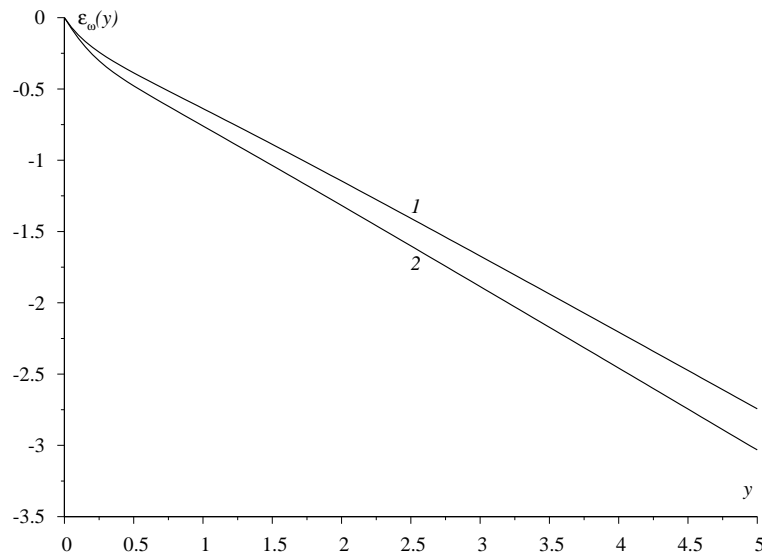


Рис. 2: Енергія поляризації електронної рідини, розрахована в наближенні локального поля, у відповідності до формул (21), (22) (крива 1 – $\varepsilon_{\omega}^{(2)}(y)$; 2 – $10 \cdot \varepsilon_{\omega}^{(3)}(y)$).

З метою порівняння внесків (21) і (22) на рис. 2 зображено залежність від параметра релятивізму функції $\varepsilon_{\omega}^{(2)}(y)$ (крива 1) та $10 \cdot \varepsilon_{\omega}^{(3)}(y)$ (крива 2). Як видно з рисунка, в області $y \gtrsim 0,5$ виконується співвідношення

$$\varepsilon_{\omega}^{(3)}(y) \approx 0,1 \varepsilon_{\omega}^{(2)}(y). \quad (23)$$

Згідно з формулами (20) внесок $E_{\omega}^{(3)}$ у випадку невеликого заряду ядер z має порядок $10^{-3} E_{\omega}^{(2)}$ і є нехтовно малим. Однак у випадку $z \approx 12$ внесок $E_{\omega}^{(3)}$ має порядок $10^{-2} E_{\omega}^{(2)}$.

На рис. 3 наведено залежність від параметра релятивізму функції:

$$f_1(y) = \varepsilon_c(y) \left\{ z^2 \alpha_0^{1/2} \varepsilon_{\omega}^{(3)}(y) \right\}^{-1} \quad (24)$$

при різних значеннях заряду ядра. Як видно з рисунка, при $z \geq 6$ внесок $E_{\omega}^{(3)}$ близький до внеску кореляційної енергії електронної рідини, при $z \geq 12$ доданок

$E_\omega^{(3)}$ перевищує кореляційну енергію електронної рідини у 5 разів, а при $z = 26$ – більш, ніж у 20 разів. Таблиця 1 дає точнішу інформацію про величину різних внесків до енергії основного стану моделі.

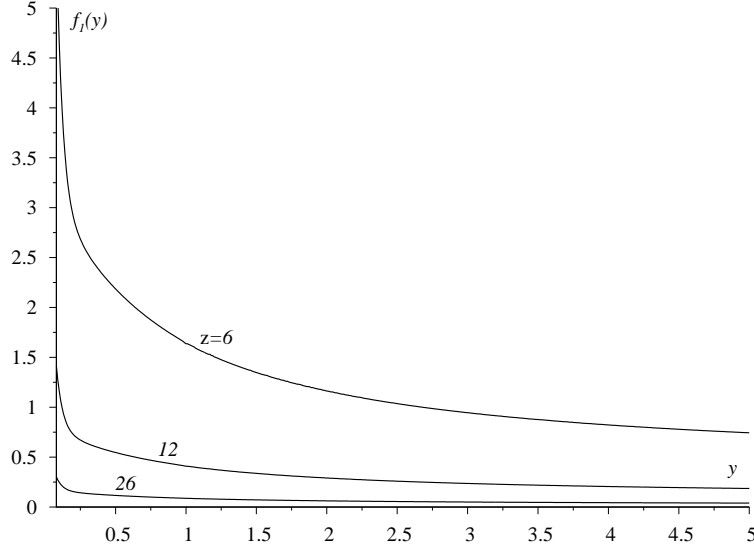


Рис. 3: Залежність функції $f_1(y)$ від параметра релятивізму y та заряду ядра z .

Згідно з формулами (18), ефективний двоядерний потенціал можна представити як суму внесків від дво- та тричастинкових електронних кореляцій:

$$V_2(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = V_2^{(2)}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) + V_2^{(3)}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2). \quad (25)$$

У роботі [3] конфігураційна енергія була розрахована у наближенні $V_2^{(2)}(R)$, який дуже мало відхиляється від виразу для екранованого потенціалу $\alpha_0 m_0 c^2 z^2 (R_*)^{-1} \exp(-R_*/R_*^0)$, у якому $R_* = Rk_F/y$, а $R_*^0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\alpha_0 y)^{-1/2} (1+y^2)^{-1/4}$ – безрозмірний радіус екранування.

Нами розраховано чисельним методом поправку $V_2^{(3)}(R)$, зумовлену тричастинковими кореляціями,

$$V_2^{(3)}(R) = m_0 c^2 \alpha_0^2 z^3 v_2^{(3)}(R_*), \quad (26)$$

$$v_2^{(3)}(R_*) = \frac{16}{\pi^3} \alpha_0 (yR_*)^{-1} \int_0^\infty \frac{dq_1}{q_1 \varepsilon(q_1)} \sin(q_1 R_*) \int_0^\infty \frac{dq_2}{\varepsilon(q_2)} \int_{-1}^1 dt \frac{\mathcal{J}_3(q_1, q_2, t)}{\varepsilon_{(q_1+q_2)} (q_1 + q_2)^2}, \quad (27)$$

де

$$\mathcal{J}_3(q_1, q_2, t) = (3N_e)^{-1} (m_0 c^2 y^2)^2 \mu_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \quad (28)$$

– безрозмірний множник статичної тричастинкової кореляційної функції. Безрозмірний потенціал $v_2^{(3)}(R_*)$ зображено на рис. 4 для декількох значень параметра релятивізму. Як видно з рисунка, поправка $v_2^{(3)}(R_*)$ дійсно є дуже малою і складає величину порядку $10^{-2}v_2^{(2)}(R_*)$ при $z \approx 12$. Конкретні розрахунки внесків в енергію від потенціала $v_2^{(3)}(R_*)$ розраховано для простої кубічної ґратки шляхом підсумовування за координаційними сферами.

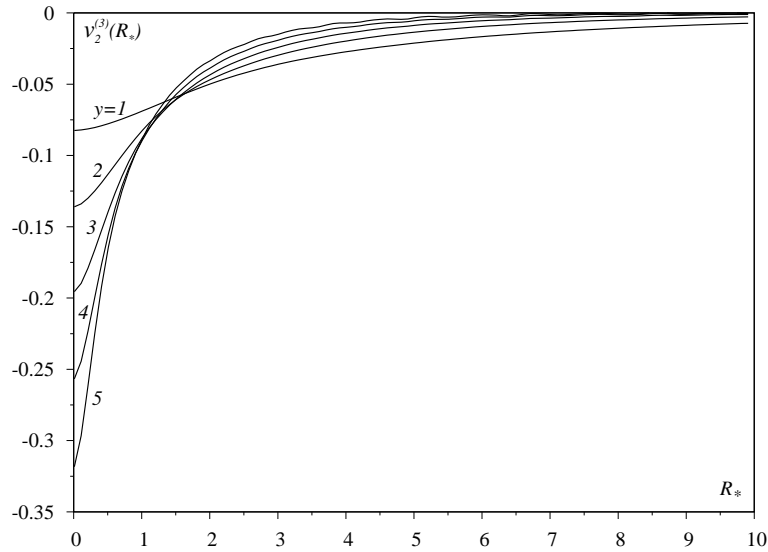


Рис. 4: Ефективний потенціал між'ядерної взаємодії $v_2^{(3)}(R_*)$ у наближенні локального поля при різних значеннях параметра релятивізму y (крива 1 – $y = 1$; 2 – $y = 2$; 3 – $y = 3$; 4 – $y = 4$; 5 – $y = 5$).

Енергія компенсуючого поля у наближенні двочастинкових кореляцій дорівнює

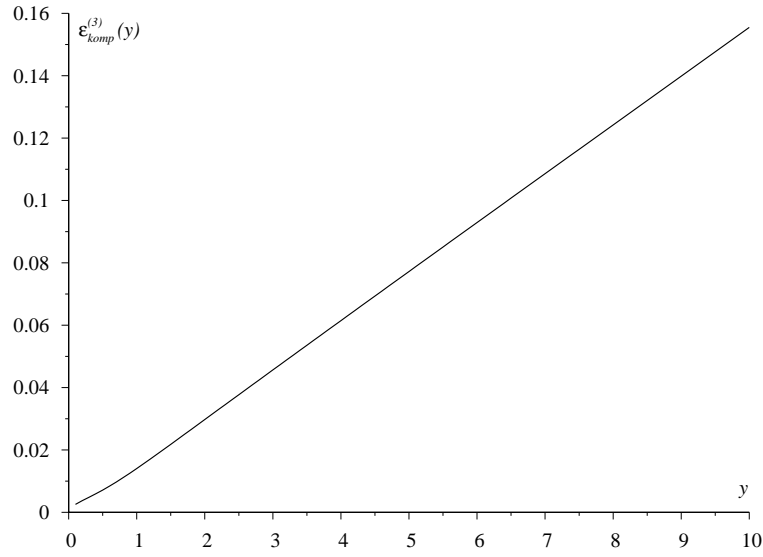
$$E_{\text{комп}}^{(2)} = -\frac{1}{6}N_e m_0 c^2 y^2 (1 + y^2)^{-1/2}. \quad (29)$$

Внесок компенсуючого поля, який відповідає потенціалу $V_2^{(3)}(R)$, можна представити у вигляді

$$E_{\text{комп}}^{(3)} = N_e z m_0 c^2 \alpha_0 \varepsilon_{\text{комп}}^{(3)}(y), \quad (30)$$

$$\varepsilon_{\text{комп}}^{(3)}(y) = \frac{4\alpha_0}{3\pi^2} (1 + y^2)^{-1/2} \int_0^\infty \frac{dq}{q^2} \frac{\mathcal{J}_3(q|y)}{\varepsilon_{(q)}^2}, \quad (31)$$

де $\mathcal{J}_3(q|y) = (3N_e)^{-1} (m_0 c^2 y^2)^2 \mu_3(\mathbf{q}, -\mathbf{q}, 0)$. Функція $\varepsilon_{\text{комп}}^{(3)}(y)$ зображена на рис. 5.

Рис. 5: Залежність функції $\varepsilon_{\text{комп}}^{(3)}(y)$ від параметра релятивізму y .

Як видно з розрахунків, конфігураційна енергія у наближенні двочастинкових кореляцій $E_{\text{конф}}^{(2)}$ і енергія компенсуючого поля у цьому ж наближенні $E_{\text{комп}}^{(2)}$ мають протилежні знаки і майже повністю компенсуються, так що їхня сума

$$E_L^{(2)}(y|z) = E_{\text{конф}}^{(2)} + E_{\text{комп}}^{(2)} \cong N_e m_0 c^2 z^{0,5894} \alpha_0 \varepsilon_L^{(2)}(y|z), \quad (32)$$

є малою величиною ($\sim \alpha_0 \cdot E_{\text{комп}}^{(2)}$). Безрозмірний множник $\varepsilon_L^{(2)}(y|z)$ зображено на рис. 6. Аналогічно величини $E_{\text{комп}}^{(3)}$ і $E_{\text{конф}}^{(3)}$ (яка відповідає сумі двочастинкових між'ядерних взаємодій з потенціалом $V_2^{(3)}(R)$) також у значній мірі компенсуються, а їхня сума

$$E_L^{(3)}(y|z) = E_{\text{конф}}^{(3)} + E_{\text{комп}}^{(3)} \cong N_e m_0 c^2 z^{3/2} \alpha_0^2 \varepsilon_L^{(3)}(y|z), \quad (33)$$

має порядок $N_e z m_0 c^2 \alpha_0^2 y$.

При малих значеннях заряду ядра z функція $E_L^{(3)}(y|z)$ є нехтовно малою величиною, але має порядок $N_e m_0 c^2 \alpha_0^{3/2} y$ при проміжних і великих значеннях z . На рис. 7 наведено залежність функції $\varepsilon_L^{(3)}(y|z)$ від параметра релятивізму при $z = 4; 6; 12$.

3 Рівняння стану моделі

Залежність енергії від параметра релятивізму та заряду ядра дає можливість розрахувати рівняння стану моделі – залежність внутрішнього тиску від цих змінних

$$P(y) = \frac{dE(y)}{dV} = \frac{y^4}{N_e} \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^3 (3\pi^2)^{-1} \frac{dE(y)}{dy}. \quad (34)$$

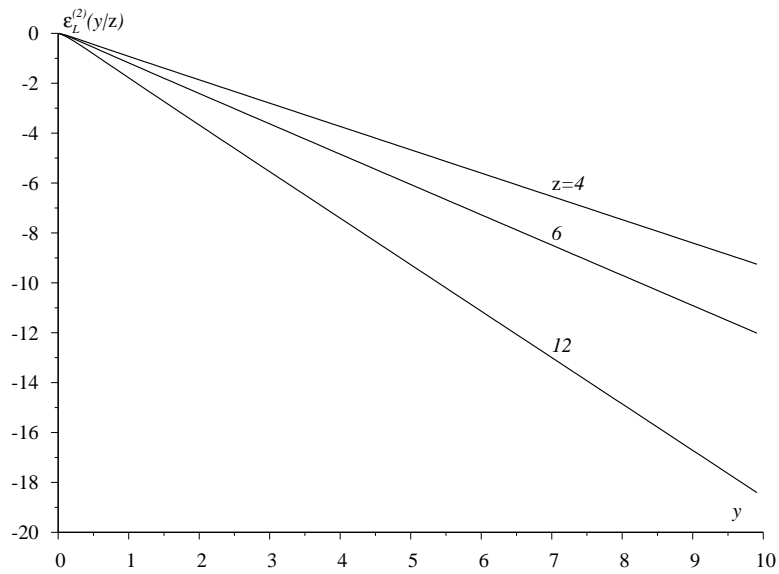


Рис. 6: Залежність граткової енергії $\epsilon_L^{(2)}(y/z)$ від заряду ядра z та параметра релятивізму y .

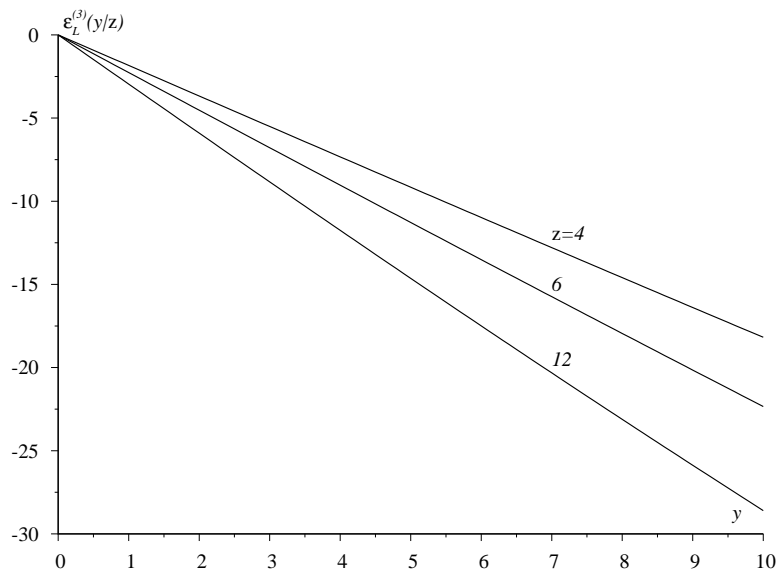


Рис. 7: Залежність граткової енергії $\epsilon_L^{(3)}(y/z)$ від заряду ядра z та параметра релятивізму y .

Згідно з формулами (7), (10), (20)-(22), (32), (33)

$$P(y) = \frac{\pi m_0^4 c^5}{3h^3} \{ \mathcal{F}(y) + f_2(y/z) + f_3(y/z) + \dots \}, \quad (35)$$

де

$$\mathcal{F}(y) = y(2y^2 - 3)(1 + y^2)^{1/2} + 3 \ln [y + (1 + y^2)^{1/2}] \quad (36)$$

– внесок ідеального виродженого релятивістського електронного газу,

$$f_2(y|z) = -2\alpha_0 y^4 \left\{ \pi^{-1} - \frac{4}{3} \left(z^{0,5894} \frac{d\varepsilon_L^{(2)}}{dy} + z\alpha_0^{1/2} \frac{d\varepsilon_\omega^{(2)}}{dy} + \alpha_0 \frac{d\varepsilon_c}{dy} \right) \right\} \quad (37)$$

– внесок взаємодій у наближенні двочастинкових кореляцій моделі електронної рідини,

$$f_3(y|z) = \frac{8}{3} \alpha_0^2 y^4 \left\{ z^2 \alpha_0^{1/2} \frac{d\varepsilon_\omega^{(3)}}{dy} + z^{3/2} \frac{d\varepsilon_L^{(3)}}{dy} \right\} \quad (38)$$

– внесок взаємодій при наближеному врахуванні тричастинкових кореляцій.

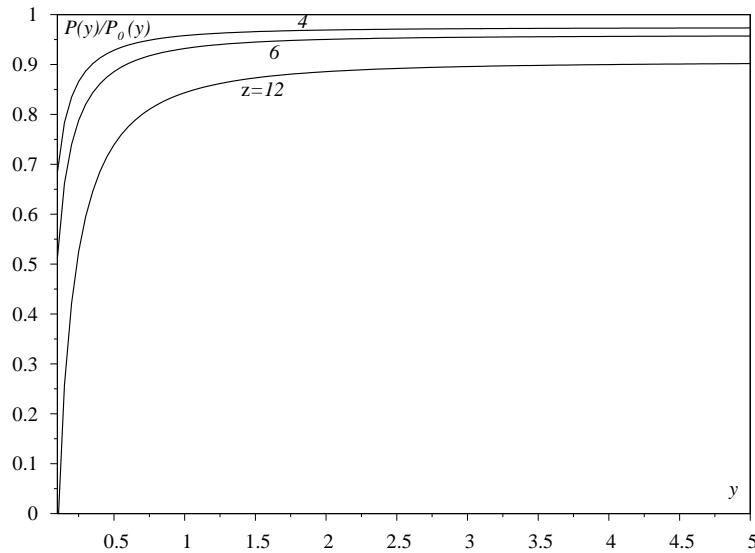


Рис. 8: Відношення тиску моделі із кулонівськими взаємодіями $P(y)$ до тиску ідеального виродженого релятивістського електронного газу $P_0(y)$ як функція параметрів y і z .

Всі доданки до енергії моделі, зумовлені взаємодіями, є від'ємними монотонно спадними функціями параметра релятивізму, тому поправки $f_2(y|z)$ та $f_3(y|z)$ є від'ємними величинами і приводять до зменшення тиску. В роботі [3] показано, що у наближенні двочастинкових кореляцій одержане рівняння стану дуже близьке до результату Е. Солпітера [2]. Отже, врахування тричастинкових кореляцій зумовлює більше відхилення наших результатів від рівняння стану роботи [3], що ілюструє таблиця 2, у якій наведено залежність від параметра релятивізму тиску ідеального електронного газу, а також поправки до тиску, зумовлені взаємодіями, які розраховано у наближенні дво- та тричастинкових електронних кореляцій.

Табл. 1: Залежність безрозмірних множників $\varepsilon_c(y)$, $\varepsilon_\omega^{(2)}(y)$, $\varepsilon_\omega^{(3)}(y)$ та $\varepsilon_L^{(3)}(y|z)$ від параметра релятивізму y згідно з формулами (10), (20)-(22), (33).

y	$\varepsilon_c(y)$	$\varepsilon_\omega^{(2)}(y)$	$\varepsilon_\omega^{(3)}(y)$	$\varepsilon_L^{(3)}(y z)$		
				$z = 4$	$z = 6$	$z = 12$
0.1	-0.223812	-0.149782	-0.0156694	-0.183711	-0.226448	-0.295893
0.2	-0.265053	-0.225046	-0.0296313	-0.36742	-0.452893	-0.591777
0.3	-0.290687	-0.286269	-0.0371366	-0.551126	-0.679333	-0.887641
0.4	-0.309973	-0.340927	-0.0429796	-0.734828	-0.905766	-1.18348
0.5	-0.325859	-0.392107	-0.0484706	-0.918524	-1.13219	-1.47927
0.6	-0.339658	-0.441536	-0.0538933	-1.10221	-1.3586	-1.77502
0.7	-0.352063	-0.49023	-0.059325	-1.28589	-1.585	-2.07071
0.8	-0.363481	-0.538772	-0.0647931	-1.46956	-1.81138	-2.36634
0.9	-0.374171	-0.587471	-0.0703227	-1.65322	-2.03774	-2.6619
1.0	-0.384305	-0.636478	-0.0763826	-1.83686	-2.26408	-2.95737
1.1	-0.394005	-0.685853	-0.0813496	-2.02049	-2.49039	-3.25276
1.2	-0.403359	-0.735608	-0.086811	-2.20411	-2.71668	-3.54805
1.3	-0.412423	-0.785729	-0.0925913	-2.38771	-2.94294	-3.84323
1.4	-0.421268	-0.836192	-0.098131	-2.57129	-3.16918	-4.1383
1.5	-0.429912	-0.886969	-0.103691	-2.75485	-3.39538	-4.43326
1.6	-0.438391	-0.93803	-0.109007	-2.93839	-3.62154	-4.72808
1.7	-0.44673	-0.989347	-0.114884	-3.1219	-3.84767	-5.02278
1.8	-0.454947	-1.0409	-0.120219	-3.3054	-4.07377	-5.31733
1.9	-0.46306	-1.09265	-0.125846	-3.48887	-4.29982	-5.61174
2.0	-0.471081	-1.1446	-0.131759	-3.67231	-4.52583	-5.906
2.1	-0.479022	-1.19672	-0.137131	-3.85572	-4.7518	-6.2001
2.2	-0.486891	-1.24899	-0.143066	-4.03911	-4.97772	-6.49403
2.3	-0.494697	-1.3014	-0.148454	-4.22247	-5.20359	-6.7878
2.4	-0.502446	-1.35394	-0.154398	-4.4058	-5.42942	-7.08138
2.5	-0.510145	-1.40659	-0.160079	-4.5891	-5.65519	-7.37479
2.6	-0.517797	-1.45935	-0.165764	-4.77236	-5.88091	-7.668
2.7	-0.525408	-1.51221	-0.171457	-4.95559	-6.10657	-7.96103
2.8	-0.532982	-1.56516	-0.177156	-5.13878	-6.33218	-8.25386
2.9	-0.540521	-1.61819	-0.182862	-5.32194	-6.55773	-8.54648
3.0	-0.548029	-1.6713	-0.18857	-5.50506	-6.78323	-8.8389
3.1	-0.555509	-1.72448	-0.194284	-5.68815	-7.00866	-9.1311
3.2	-0.562962	-1.77773	-0.200011	-5.87119	-7.23402	-9.42309
3.3	-0.570391	-1.83103	-0.205725	-6.0542	-7.45932	-9.71485
3.4	-0.577797	-1.8844	-0.21145	-6.23716	-7.68456	-10.0064
3.5	-0.585183	-1.93782	-0.21719	-6.42008	-7.90973	-10.2977
3.6	-0.59255	-1.99128	-0.222924	-6.60295	-8.13482	-10.5888
3.7	-0.599899	-2.0448	-0.228383	-6.78579	-8.35985	-10.8796
3.8	-0.607231	-2.09836	-0.234398	-6.96857	-8.58481	-11.1702
3.9	-0.614548	-2.15196	-0.24014	-7.15131	-8.80969	-11.4605
4.0	-0.62185	-2.2056	-0.245611	-7.33401	-9.03449	-11.7506
4.1	-0.629139	-2.25928	-0.251634	-7.51665	-9.25922	-12.0405
4.2	-0.636415	-2.31299	-0.25711	-7.69925	-9.48387	-12.3301
4.3	-0.64368	-2.36673	-0.263132	-7.8818	-9.70844	-12.6194
4.4	-0.650933	-2.42051	-0.268618	-8.06429	-9.93293	-12.9084
4.5	-0.658175	-2.47432	-0.274654	-8.24674	-10.1573	-13.1972
4.6	-0.665408	-2.52815	-0.280135	-8.42913	-10.3817	-13.4857
4.7	-0.672632	-2.58201	-0.286176	-8.61146	-10.6059	-13.774
4.8	-0.679846	-2.6359	-0.291661	-8.79375	-10.8301	-14.0619
4.9	-0.687052	-2.68981	-0.297706	-8.97598	-11.0541	-14.3496
5.0	-0.69425	-2.74374	-0.303159	-9.15815	-11.2781	-14.637

Табл. 2: Залежність функцій $\mathcal{F}(y)$, $f_2(y|z)$ та $f_3(y|z)$ від параметра релятивізму y у відповідності до формул (36), (37), (38).

y	$\mathcal{F}(y)$	$f_2(y z)$			$f_3(y z)$		
		$z = 4$	$z = 6$	$z = 12$	$z = 4$	$z = 6$	$z = 12$
0.5	0.046093	-0.00315938	-0.00497205	-0.0109246	-0.000131153	-0.000296975	-0.00109773
0.6	0.111126	-0.00652365	-0.0102974	-0.0227216	-0.000271944	-0.000615764	-0.00227582
0.7	0.231993	-0.0120364	-0.0190355	-0.0421285	-0.000503795	-0.00114073	-0.0042155
0.8	0.435865	-0.0204629	-0.0323975	-0.0718428	-0.000859438	-0.00194596	-0.00719012
0.9	0.755661	-0.032689	-0.0517818	-0.114966	-0.00137668	-0.00311703	-0.0115152
1.0	1.22991	-0.04972	-0.078775	-0.175006	-0.00209563	-0.00474478	-0.0175236
1.1	1.90259	-0.0726808	-0.115151	-0.255878	-0.00307115	-0.00695326	-0.0256769
1.2	2.82298	-0.102815	-0.162873	-0.361911	-0.00434955	-0.00984734	-0.0363563
1.3	4.04557	-0.141486	-0.224089	-0.497842	-0.00599054	-0.0135621	-0.0500594
1.4	5.62991	-0.190175	-0.301138	-0.668822	-0.00805694	-0.0182397	-0.067308
1.5	7.64053	-0.250482	-0.396544	-0.880418	-0.0106166	-0.0240334	-0.0886644
1.6	10.147	-0.324126	-0.513018	-1.13861	-0.0137422	-0.0311079	-0.114731
1.7	13.2236	-0.412945	-0.653459	-1.44978	-0.0175115	-0.0396389	-0.146152
1.8	16.9497	-0.518895	-0.820955	-1.82074	-0.0220073	-0.0498134	-0.18361
1.9	21.4094	-0.644052	-1.01878	-2.2587	-0.0273172	-0.0618298	-0.227828
2.0	26.6916	-0.790609	-1.25039	-2.77131	-0.0335339	-0.0758971	-0.279569
2.1	32.8901	-0.960878	-1.51944	-3.3666	-0.040755	-0.0922361	-0.339635
2.2	40.1035	-1.15729	-1.82976	-4.05303	-0.0490829	-0.111078	-0.408869
2.3	48.4351	-1.3824	-2.18538	-4.83948	-0.0586251	-0.132666	-0.48815
2.4	57.9931	-1.63887	-2.5905	-5.73524	-0.0694939	-0.157254	-0.578398
2.5	68.8905	-1.92948	-3.04952	-6.74999	-0.0818066	-0.185105	-0.680571
2.6	81.2451	-2.25716	-3.56703	-7.89387	-0.0956855	-0.216497	-0.795664
2.7	95.1793	-2.62491	-4.14779	-9.17738	-0.111257	-0.251715	-0.924712
2.8	110.821	-3.03589	-4.79677	-10.6115	-0.128654	-0.291057	-1.06878
2.9	128.301	-3.49335	-5.51911	-12.2075	-0.148013	-0.334833	-1.22899
3.0	147.758	-4.00068	-6.32015	-13.9772	-0.169475	-0.38336	-1.40648
3.1	169.332	-4.56138	-7.2054	-15.9328	-0.193187	-0.436969	-1.60243
3.2	193.171	-5.17906	-8.18057	-18.0869	-0.2193	-0.496001	-1.81807
3.3	219.426	-5.85746	-9.25155	-20.4525	-0.24797	-0.560809	-2.05464
3.4	248.252	-6.60044	-10.4244	-23.043	-0.279359	-0.631753	-2.31345
3.5	279.811	-7.41197	-11.7055	-25.8722	-0.313631	-0.709208	-2.59581
3.6	314.269	-8.29614	-13.1012	-28.9543	-0.350958	-0.793557	-2.90309
3.7	351.795	-9.25717	-14.6181	-32.3041	-0.391514	-0.885195	-3.23669
3.8	392.566	-10.2994	-16.2631	-35.9367	-0.43548	-0.984525	-3.59804
3.9	436.76	-11.4272	-18.0433	-39.8674	-0.483039	-1.09197	-3.9886
4.0	484.564	-12.6453	-19.9658	-44.1122	-0.534383	-1.20794	-4.40989
4.1	536.167	-13.9582	-22.038	-48.6874	-0.589704	-1.33289	-4.86343
4.2	591.763	-15.3709	-24.2674	-53.6098	-0.649202	-1.46725	-5.35079
4.3	651.552	-16.8882	-26.662	-58.8965	-0.713079	-1.61149	-5.87357
4.4	715.737	-18.5151	-29.2295	-64.5649	-0.781545	-1.76607	-6.43342
4.5	784.527	-20.2568	-31.9782	-70.6332	-0.854812	-1.93147	-7.032
4.6	858.137	-22.1187	-34.9164	-77.1196	-0.933097	-2.10818	-7.671
4.7	936.784	-24.106	-38.0526	-84.043	-1.01662	-2.2967	-8.35217
4.8	1020.69	-26.2244	-41.3955	-91.4226	-1.10562	-2.49753	-9.07726
4.9	1110.09	-28.4795	-44.954	-99.278	-1.20031	-2.71119	-9.84807
5.0	1205.21	-30.8769	-48.7371	-107.629	-1.30093	-2.93822	-10.6664

4 Висновки

- 1.) Вперше у рамках базисного підходу, адаптованого до опису виродженої релятивістської електронної підсистеми, розраховано енергію електрон-ядерної моделі в широкій області параметра релятивізму при абсолютному нулі температури, а на цій основі – рівняння стану такої моделі.
- 2.) Внески кулонівських міжчастинкових взаємодій до енергії основного стану та тиску, зумовлені двочастинковими електронними кореляціями, є визначальними і зростають при збільшенні заряду ядра.
- 3.) Аналогічні внески, зумовлені тричастинковими електронними кореляціями, є значно меншими, але перевищують внесок кореляційної енергії електронної рідини, особливо при великих значеннях заряду ядра. Як видно з таблиці 2, при $z = 6$ внесок тричастинкових кореляцій складає близько 5% від внеску двочастинкових кореляцій, а при $z = 12$ це відношення близьке до 10%.
- 4.) При коректних розрахунках характеристик вироджених карликів необхідно враховувати внески електрон-електронних, електрон-ядерних та між'ядерних кулонівських взаємодій у наближенні дво- та тричастинкових електронних кореляцій.

Список використаної літератури

1. *E.E. Salpeter*, *Astrophys. Journ.* **134**, 669 (1961).
2. *T. Hamada, E. Salpeter*, *Euro. Astrophys. Journ.* **133**, 683 (1961).
3. *М. В. Ваврух, Н. Л. Тишко, С. В. Смеречинський*, Вісник Львівського ун-ту. Серія фізична. **48**, 3 (2013).
4. *М. Ваврух, Д. Дзіковський, В. Солов'ян, Н. Л. Тишко*, Вісник Львівського ун-ту. Серія фізична. **50** (2015).
5. *М. В. Ваврух*, УФЖ., **36**, №1, 150 (1991).
6. *М. В. Ваврух, Т. Є. Крохмальський*, УФЖ., **36**, №2, 296 (1991).
7. *М. V. Vavrukh, T.E. Krokhmalskii*, *Phys. Stat. Sol. (b)*, **168**, №2, 519 (1991).
8. *М. V. Vavrukh, T.E. Krokhmalskii*, *Phys. Stat. Sol. (b)*, **169**, 451 (1992).
9. *D. Ceperley, B. Alder*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 566 (1980).

Стаття надійшла до редакції 10.03.2016

прийнята до друку 17.06.2016

THE STATISTICAL DESCRIPTION OF ELECTRON-NUCLEAR
MODEL IN THE DEGENERATE DWARFS THEORY. II. THE
ENERGY AND EQUATION OF STATE AT $T = 0K$ IN THE
PARAMAGNETIC PHASE

M. Vavruk, D. Dzikovskyi N. Tyshko,

*Ivan Franko National University of Lviv,
astrophysic department,
Kyrylo and Methodiy Str., 8, 79005 Lviv, Ukraine
e-mail: mvavruk@gmail.com*

The energy of the ground state of the macroscopic homogeneous binary electron-nuclear model is calculated in the reference system approach at high densities with taking into account the Coulomb interactions. We have used the approximation of the two-particle and the three-particle electron correlations in a wide range of the relativism parameter. A contributions to the equation of state of the main components of energy have been analyzed in the case of the crystal structure of a nuclear subsystem.

Key words: electron-nuclear model, Coulomb interactions, electron correlations, nuclear subsystem

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОН-ЯДЕРНОЙ
МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ВЫРОЖДЕННЫХ КАРЛИКОВ.
II. ЭНЕРГИЯ И УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ПРИ $T = 0K$ В
ПАРАМАГНИТНОЙ ФАЗЕ

М. Ваврух, Д. Дзиковский, Н. Тышко,

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко
кафедра астрофизики,
ул. Кирилла и Мефодия 8, 79005 Львов, Украина
e-mail: mvavruk@gmail.com*

В рамках базисного подхода рассчитана энергия основного состояния макроскопически однородной двухкомпонентной электрон-ядерной модели с кулоновскими взаимодействиями при высоких плотностях в приближении двух- и трехчастичных электронных корреляций в широкой области параметра релятивизма. Проанализированы вклады основных составляющих энергии к уравнению состояния модели в случае кристаллической структуры ядерной подсистемы.

Ключевые слова: электрон-ядерная модель, кулоновские взаимодействия, электронные корреляции, ядерная подсистема