

## Новий метод розрахунку рівноваги зір з осьовим обертанням

М. Ваврух, Н. Тишко, Д. Дзіковський,  
О. Стельмах

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
кафедра астрофізики, вул. Кирила і Мефодія, 8, 79005 Львів,  
Україна  
e-mail: mvavrukh@gmail.com*

Запропоновано інтегральну форму рівнянь рівноваги у теорії внутрішньої будови зір у рамках політропної моделі з осьовим обертанням. Досліджено залежність розв'язків цього рівняння, а також маси зорі та її форми від кутової швидкості. Оцінено межі стійкості зір-політроп відносно швидкості обертання.

**Ключові слова:** зорі-політропи, неоднорідні еліпсоїди, осьове обертання, рівняння рівноваги, стабільність зір.

### 1 Вступ

Наприкінці дев'ятого – на початку двадцятого століття працями Г. Ле-на [1], К. Емдена [2], Р. Фаулера [3], К. Ріттера [4], У. Кельвіна [5], А. Еддінгтона [6] та інших дослідників було закладено основи теорії внутрішньої будови зір. На першому етапі розглядали лише механічну рівновагу нормальних зір – рівновагу сил тяжіння і внутрішнього тиску у моделях сферичної симетрії, не беручи до уваги джерела енергії зір, невідомі на той час. Підсумком цього етапу стала книга К. Емдена [2] 1907 року. У пізніших роботах Е. Мілна [7], С. Чандрасекара [8], Р. Джеймса [9] та інших авторів, опублікованих у першій половині двадцятого століття, ця теорія була узагальнена на випадок політропних моделей з твердотільним осьовим обертанням. Відкриття термоядерних реакцій вирішило проблему джерел енергії зір. Сучасна теорія нормальних зір узагальнює політропну теорію і ґрунтується на системі рівнянь внутрішньої структури, що враховує як механічну, так і енергетичну рівновагу цих об'єктів.

Однак політропна теорія не втратила свого значення і тепер, бо її математичний апарат легко адаптується до опису внутрішньої структури компактних об'єктів, зокрема вироджених карликів. Адже рівняння стану електрон-ядерної моделі з виродженою релятивістською електронною підсистемою асимптотично (за високих та низьких густин речовини) має політропний характер. Через те розв'язки рівняння

рівноваги для зір-політроп (з обертанням чи без нього) відіграють роль нульового наближення для розв'язків рівняння механічної рівноваги вироджених карликів [10]. Осьове обертання немагнітних карликів є єдиною причиною збільшення їхньої маси. Тому однією з актуальних проблем теорії вироджених карликів є розрахунок максимальної маси та встановлення меж стійкості щодо кутової швидкості. Хоча цю проблему досліджували як шляхом чисельного інтегрування рівнянь рівноваги, так і за допомогою варіаційного методу [11], проблема ще далека від остаточного розв'язання.

У зв'язку з вищевикладеним актуальною задачею є знаходження розв'язків рівняння механічної рівноваги зір-політроп у широкій області зміни кутової швидкості та визначення меж стійкості на цій основі. Зазвичай використовують диференціальні рівняння рівноваги. У нашій роботі вони доповнені інтегральною формою цих рівнянь, що дає змогу строго визначати сталі інтегрування. Це дає також прямий спосіб знаходження залежності розв'язків рівнянь рівноваги і макроскопічних характеристик зорі від кутової швидкості.

## 2 Загальні співвідношення

У політропній теорії рівняння стану моделюється залежністю [12]

$$P(\mathbf{r}) = K\rho^\nu(\mathbf{r}) \equiv K\rho^{1+1/n}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

де  $P(\mathbf{r})$  – тиск у точці з радіус-вектором  $\mathbf{r}$ ,  $\rho(\mathbf{r})$  – густина, а  $K$  і  $\nu$  є сталими. Загалом (за наявності обертання) рівняння рівноваги записують в неінерційній (обертовій) системі координат у вигляді

$$\nabla P(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}) \{ \nabla \Phi_{grav}(\mathbf{r}) + \nabla \Phi_c(\mathbf{r}) \}, \quad (2)$$

де

$$\Phi_{grav}(\mathbf{r}) = -G \int \frac{d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3)$$

є гравітаційним потенціалом всередині зорі, а  $\Phi_c(\mathbf{r})$  – відцентровим. Якщо вісь  $Oz$  сферичної системи координат збігається з віссю обертання, то

$$\Phi_c(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (4)$$

Тут  $\theta$  – полярний кут,  $\omega$  – кутова швидкість системи відліку, яка вважається сталою.

Підставляючи вирази (1), (3) і (4) у рівняння (2) і використовуючи тотожність

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rho^{1/n-1}(\mathbf{r}) \nabla \rho(\mathbf{r}) = (1+n) \nabla \rho^{1/n}(\mathbf{r}), \quad (5)$$

надамо рівнянню рівноваги вигляду диференціального рівняння, що визначає розподіл густини,

$$K(1+n)\Delta \rho^{1/n}(\mathbf{r}) = -4\pi G \rho(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \omega^2 \Delta (r^2 \sin^2 \theta). \quad (6)$$

За наявності осьової симетрії ( $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r, \theta)$ ) оператор Лапласа записується у вигляді

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_\theta, \quad \Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad \Delta_\theta = \frac{\partial}{\partial t} (1 - t^2) \frac{\partial}{\partial t} \quad (7)$$

при  $t = \cos \theta$ , тому  $\Delta (r^2 \sin^2 \theta) = 4$ . Вводячи безрозмірну радіальну координату  $\xi = r/\lambda$ , а також використовуючи підстановку

$$\rho(r, \theta) = \rho_c Y^n(\xi, \theta), \quad (8)$$

$\rho_c$  – густина у центрі зорі, трансформуємо рівняння (6) до безрозмірної форми

$$\Delta(\xi, \theta) Y(\xi, \theta) = \Omega^2 - Y^n(\xi, \theta). \quad (9)$$

При цьому масштаб  $\lambda$ , безрозмірні кутова швидкість  $\Omega$  і лапласіан визначені співвідношеннями

$$K(1+n) = 4\pi G \lambda^2 \rho_c^{1-1/n}, \quad \Omega^2 = \omega^2 (2\pi G \rho_c)^{-1},$$

$$\Delta(\xi, \theta) = \Delta_\xi + \frac{1}{\xi^2} \Delta_\theta, \quad \Delta_\xi = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right). \quad (10)$$

Згідно з означенням (8)  $Y(0, \theta) = 1$ , а умова  $\partial Y(\xi, \theta)/\partial \xi = 0$  при  $\xi = 0$  відповідає розв'язкам, регулярним в околі  $\xi = 0$ . За великих значень  $\Omega$  можлива немонотонна залежність  $Y(\xi, \theta)$  від змінної  $\xi$  в області екватора і витікання речовини. Умови стійкості зорі в області екватора

$$Y\left(\xi, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} Y\left(\xi, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (11)$$

визначають максимально допустиме значення параметра  $\Omega_{max}^{(n)}$  і відповідне йому значення екваторіального радіуса  $\xi_e^{max}(n)$ . Згідно з означенням (8) фізичний зміст мають лише додатні розв'язки рівняння (9), що є двовимірним диференціальним рівнянням другого порядку у частинних похідних, в якому фігурують два безрозмірні параметри  $n, \Omega \geq 0$ .

Рівняння (9) подібне на рівняння Пуассона, тому його формально можна розглядати як рівняння для безрозмірного гравітаційного потенціалу, створеного розподілом безрозмірної густини  $(4\pi)^{-1} \{\Omega^2 - Y^n(\xi, \theta)\}$ . З огляду на це рівнянню надамо інтегральної форми

$$Y(\xi, \theta) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} C_{2l} \xi^{2l} P_{2l}(t) - \frac{1}{4\pi} \int \{\Omega^2 - Y^n(\xi', \theta')\} Q(\xi, \xi') d\xi', \quad (12)$$

де  $C_{2l}$  – сталі інтегрування,  $P_{2l}(t)$  – поліном Лежандра  $2l$ -го порядку, ядром рівняння є

$$Q(\xi, \xi') = \{|\xi - \xi'|^{-1} - (\xi')^{-1}\}, \quad (13)$$

а інтегрування проводиться за об'ємом зорі. Беручи до уваги тотожність

$$\Delta(\xi, \theta) \{\xi^l P_l(t)\} = 0, \quad (14)$$

легко переконатися, що рівняння (9) і (12) еквівалентні.

Корінь рівняння  $Y(\xi_0(\theta), \theta) = 0$  визначає рівняння кривої другого порядку, обертанням якої відносно осі  $Oz$  утворюється поверхня зорі. Вирази для маси і об'єму зорі є такими:

$$M(n, \Omega) = 2\pi\rho_c\lambda^3 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{\xi_0(\theta)} \xi^2 Y^n(\xi, \theta) d\xi, \quad (15)$$

$$V(n, \Omega) = \frac{2\pi}{3} \lambda^3 \int_0^\pi \sin\theta \xi_0^3(\theta) d\theta.$$

При довільному значенні індекса політропи  $n$  гравітаційний потенціал всередині зорі (3) пов'язаний з безрозмірним потенціалом

$$\Phi_n(\xi) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{Y^n(\xi')}{|\xi - \xi'|} d\xi' \quad (16)$$

таким співвідношенням

$$\Phi_{grav}(\mathbf{r}) = 4\pi G \lambda^2 \rho_c \Phi_n(\xi). \quad (17)$$

Переходячи у рівнянні (2) до безрозмірних змінних, одержуємо співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \Phi_n(\xi, \theta) + Y(\xi, \theta) \right\} = \frac{\Omega^2}{3} \xi \left\{ 1 - P_2(t) \right\}. \quad (18)$$

Рівняння (12) можна переписати у термінах  $Y(\xi, \theta)$ ,  $\Phi_n(\xi, \theta)$ , а саме

$$Y(\xi, \theta) + \{ \Phi_n(\xi, \theta) - \Phi_n(0, 0) \} = 1 + \sum_{l=1} C_{2l} \xi^{2l} P_{2l}(t) + \Omega^2 \{ \Phi_0(\xi, \theta) - \Phi_0(0, 0) \}, \quad (19)$$

де  $\Phi_0(\xi, \theta)$  – безрозмірний потенціал моделі зі сталою густиною. Це дає змогу перетворити рівняння (18) до такого вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \sum_{l=1} C_{2l} \xi^{2l} P_{2l}(t) + \Omega^2 [\Phi_0(\xi, \theta) - \Phi_0(0, 0)] \right\} = \xi \frac{\Omega^2}{3} (1 - P_2(t)). \quad (20)$$

Різницю потенціалів  $\Phi_0(\xi, \theta) - \Phi_0(0, 0)$  легко розрахувати, використовуючи розклади ядра  $Q(\xi, \xi')$  за поліномами Лежандра і виконуючи інтегрування за змінною  $\xi'$  в межах еліпсоїда обертання з ексцентриситетом  $e$  і екваторіальним радіусом  $\xi_e$ , які визначимо самоузгодженим чином пізніше. Таким способом відшукуємо, що

$$\begin{aligned} \Phi_0(\xi, \theta) - \Phi_0(0, 0) &= -\frac{1}{4\pi} \int d\xi' Q(\xi, \xi') = \\ &= \frac{\xi^2}{6} - \frac{\xi^2}{2} P_2(t) \int_{-1}^{+1} dt' P_2(t') \int_{\xi}^{\xi_0(t')} d\xi' / \xi', \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\xi_0(t') = \xi_e \left\{ 1 + (t')^2 \frac{e^2}{1 - e^2} \right\}^{-1/2}. \quad (22)$$

Інтегруванням за змінними  $\xi'$  і  $t'$  одержуємо остаточний вираз (див. [11]):

$$\begin{aligned} \Phi_0(\xi, \theta) - \Phi_0(0, 0) &= \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^2}{2} P_2(t) I(e), \\ I(e) &= \frac{2}{3} + \frac{1 - e^2}{e^2} - \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{e^3} \arcsin e. \end{aligned} \quad (23)$$

При зміні ексцентриситету в межах  $0 \leq e \leq 1$  функція  $I(e)$  змінюється в області  $2e^2/15 \leq I(e) \leq 2/3$ . Підставляючи вираз (23) у рівняння (20), одержуємо рівність

$$\sum_{l=1} C_{2l} 2l \xi^{2l-2} P_{2l}(t) = -\frac{\Omega^2}{3} P_2(t) (1 + 3 I(e)). \quad (24)$$

Згідно з ортогональністю поліномів Лежандра звідси робимо висновок, що

$$C_2 = -\frac{\Omega^2}{6} (1 + 3 I(e)), \quad (25)$$

а всі інші стали  $C_{2l} = 0$ .

Тому рівняння (12) за довільних значень індекса політропи  $n$  запишемо у вигляді

$$Y(\xi, \theta) = 1 + \frac{\Omega^2 \xi^2}{6} (1 - P_2(t)) + \frac{1}{4\pi} \int Y^n(\xi', \theta') Q(\xi, \xi') d\xi'. \quad (26)$$

### 3 Рівняння Емдена

Частковий випадок  $\Omega = 0$  відповідає зорі-політропі зі сферичною симетрією, а рівняння (9) стає одновимірним однопараметричним рівнянням

$$\Delta_\xi y(\xi) = -y^n(\xi) \quad (27)$$

з граничними умовами  $y(0) = 1$ ,  $dy/d\xi = 0$  при  $\xi = 0$ , а також фізичною умовою  $y(\xi) \geq 0$ . Безрозмірний радіус зорі є коренем рівняння  $y(\xi_1) = 0$ . Всі характеристики зорі визначаються індексом політропи  $n \geq 0$ . Значення  $n = 5$  є критичним: при  $n < 5$  розв'язки рівняння (27) є знакозмінними функціями  $\xi$ , а при  $n \geq 5$  вони є додатними в усій області  $0 \leq \xi \leq \infty$  і гранична умова на поверхні зорі не може реалізуватися ( $\xi_1(5) = \infty$ , що відповідає зорі без зовнішньої границі). Надалі розглядатимемо лише моделі з  $n \leq 5$  ( $\nu \geq 6/5$ ). Після інтегрування за кутовими змінними ядра  $Q(\xi, \xi')$  рівняння (12) набуває вигляду

$$y(\xi) = 1 + \int_0^\xi \left\{ \frac{(\xi')^2}{\xi} - \xi' \right\} y^n(\xi') d\xi'. \quad (28)$$

Характерні особливості розв'язків рівнянь (27), (28) добре відомі [12]. Вони ілюструються точними аналітичними розв'язками при  $n = 0; 1; 5$ , а саме

$$\begin{aligned} y_0(\xi) &= 1 - \xi^2/6; & \xi_1(0) &= \sqrt{6}; & y_1(\xi) &= \frac{1}{\xi} \sin \xi; & \xi_1(1) &= \pi; \\ y_5(\xi) &= \{1 + \xi^2/3\}^{-1/2}; & \xi_1(5) &= \infty. \end{aligned} \quad (29)$$

Для інших значень індекса  $n$  розв'язок можна одержати чисельним інтегруванням рівнянь (27) або (28). В області невеликих значень змінної  $\xi$  функції Емдена мають такі розклади [12]:

$$y_n(\xi) = 1 - \frac{1}{3!} \xi^2 + \frac{n}{5!} \xi^4 - \frac{n(8n-5)}{3 \cdot 7!} \xi^6 + \dots \quad (30)$$

У випадку  $n \neq 0$  рівняння (27) можна "лінеаризувати", нехтуючи доданком  $y_n^n(\xi)$  в області поверхні зорі. Розв'язком рівняння  $\Delta_\xi y_n(\xi) = 0$  є функція

$$y_n(\xi) = \alpha_n \left( \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1(n)} \right) \simeq \frac{\alpha_n}{\xi_1^2(n)} \left( \xi_1(n) - \xi \right), \quad (31)$$

яка визначає асимптотику розв'язку в околі  $\xi_1(n)$ . При цьому

$$\alpha_n = \xi_1^2(n) \left. \frac{dy_n}{d\xi} \right|_{\xi_1(n)} \quad (32)$$

є характерним параметром політропної моделі, що визначає її масу та енергію. Важливою особливістю розв'язків рівняння рівноваги при  $n \neq 0$  є наявність точки перегину  $\xi_2(n)$ , у якій  $d^2 y_n / d\xi^2 = 0$ . Ця точка розділяє області змінної  $\xi$  з різним значенням другої похідної: при  $\xi < \xi_2(n)$  крива  $y_n(\xi)$  є опуклою, а в області  $\xi > \xi_2(n)$  – угнутою. У першій області справедливі розклади за степенями  $\xi^2$ , а в другій – розклади типу

$$y_n(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} (\xi_1(n) - \xi)^m. \quad (33)$$

Ці розклади справедливі також і в області  $\xi > \xi_1(n)$  і використовуються при описі зір з осьовим обертанням. Характер розв'язків рівнянь (27), (28) ілюструє рис. 1. У табл. 1 наведено залежність  $\xi_1(n)$ ,  $\xi_2(n)$  та  $\alpha_n$  від індекса політропи.

Табл. 1: Параметри політропних моделей Емдена

$n$	0	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$\xi_1(n)$	2,449	2,592	2,753	3,142	3,654	4,353	5,355	6,897
$\xi_2(n)$	–	2,478	2,347	2,081	1,878	1,721	1,597	1,496
$\alpha_n$	4,899	4,258	3,789	3,142	2,714	2,411	2,187	2,018

Як видно з формул (29), функція  $y_1(\xi)$  збігається зі сферичною функцією Бесселя першого роду  $j_0(\xi)$  [13]. Функції  $y_n(\xi)$  при  $n > 1$  в асимптотиці  $\xi \ll 1$  також

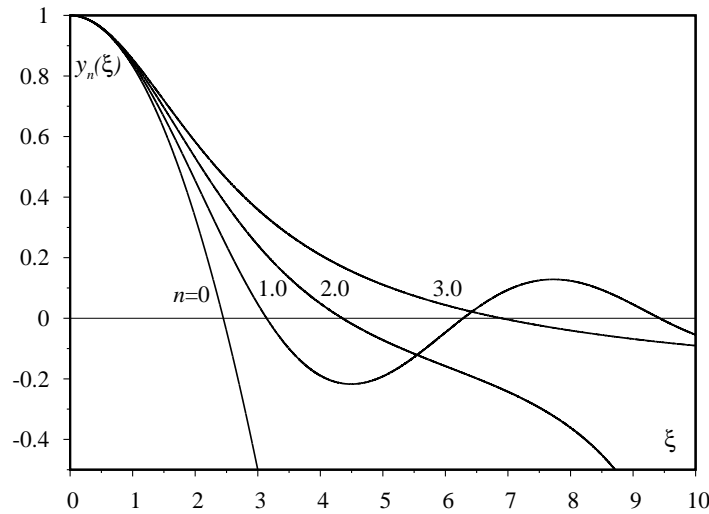


Рис. 1: Розв'язки рівняння Емдена для індекса політропи  $0 \leq n \leq 3,0$

співпадають з функцією  $j_0(\xi)$ . Як видно з рис. 1, розв'язки рівняння (27) є осцилюючими функціями  $\xi$  при непарних  $n$ . В цілому функції  $y_n(\xi)$  в області додатних значень є аналогами функції  $j_0(\xi)$ .

Згідно з формулами (15) маса і об'єм зорі-політропи без обертання визначаються співвідношеннями:

$$M(n) = 4\pi \rho_c \lambda^3 \int_0^{\xi_1(n)} \xi^2 y_n^n(\xi) d\xi = 4\pi \rho_c \lambda^3 \alpha_n; \quad (34)$$

$$V(n) = \frac{4\pi}{3} \left( \lambda \xi_1(n) \right)^3.$$

## 4 Моделі з осьовим обертанням. Лінійні рівняння

Щоб виявити основні відмінності розв'язків рівнянь (9) і (26) від функцій Емдена, розглянемо часткові випадки  $n = 0$  та  $n = 1$ , коли ці рівняння є лінійними і допускають розв'язки в аналітичній формі, на відміну від робіт [7, 8]. Зазначимо, що випадок  $n = 0$  в цих роботах не розглядався.

### 4.1 Політропа $n = 0$

Ця проста модель зі сталою густиною ( $\rho(\mathbf{r}) = \rho_c$ ) відповідає нестисливій рідині, а розв'язок рівняння рівноваги визначає лише форму і розміри об'єкта. Вона використовується в теорії однорідних сфероїдів та еліпсоїдів обертання [11]. Ми вважаємо незалежним параметром безрозмірну кутову швидкість (а не ексцентриситет)

і визначаємо масу та форму поверхні моделі в області допустимих значень кутової швидкості.

Згідно з формулами (23), (26) при  $n = 0$  розв'язок рівняння рівноваги набуває вигляду

$$Y_0(\xi, \theta) = y_0(\xi) + \frac{\xi^2}{6} \Omega^2 \left(1 - P_2(t)\right) - \frac{\xi^2}{2} P_2(t) I(e), \quad (35)$$

де  $y_0(\xi)$  – функція Емдена для політропи з індексом  $n = 0$ . З умови  $Y_0(\xi, \theta) = 0$  знаходимо рівняння поверхні

$$\xi_0(\theta) = \sqrt{6} \{1 - \Omega^2(1 - P_2(t)) + 3P_2(t) I(e)\}^{-1/2}. \quad (36)$$

Визначивши з цієї формули полярний і екваторіальний радіуси та скориставшись співвідношенням  $1 - e^2 = \xi_p^2/\xi_e^2$  одержуємо рівняння

$$e^2 + \left(3e^2 - \frac{9}{2}\right) I(e) = \frac{3}{2} \Omega^2, \quad (37)$$

яке визначає зв'язок ексцентриситету з кутовою швидкістю. У наближенні  $e^2 \ll 1$

$$I(e) = \frac{2}{15} e^2 + \frac{8}{105} e^4 + \dots, \quad e^2 = \frac{15}{4} \Omega^2 - \frac{225}{112} \Omega^4 + \dots, \quad I(e) = \frac{1}{2} \Omega^2 - \frac{2}{15} \Omega^4 + \dots \quad (38)$$

У цьому наближенні

$$\begin{aligned} \xi_0(\theta) &= \sqrt{6} \left\{ 1 - \Omega^2 + \frac{5}{2} P_2(t) \left[ \Omega^2 - \frac{4}{25} \Omega^4 \right] + \dots \right\}^{-1/2} = \\ &= \sqrt{6} \left\{ 1 + \frac{\Omega^2}{2} \left[ 1 - \frac{5}{2} P_2(t) \right] + \frac{3}{8} \Omega^4 \left[ 1 - \frac{67}{15} P_2(t) + \frac{25}{4} P_2^2(t) \right] + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

у зв'язку з чим

$$\xi_p \simeq \sqrt{6} \left\{ 1 - \frac{3}{4} \Omega^2 + \frac{167}{160} \Omega^4 + \dots \right\}, \quad \xi_e \simeq \sqrt{6} \left\{ 1 + \frac{9}{8} \Omega^2 + \frac{1151}{640} \Omega^4 + \dots \right\}. \quad (40)$$

Звідси впливає також, що маса і об'єм зорі-політропи з індексом  $n = 0$  визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} M(\Omega) &= M(0) f(\Omega), \quad V(\Omega) = V(0) f(\Omega), \\ f(\Omega) &\cong 1 + \frac{3}{2} \Omega^2 + \frac{11}{2} \Omega^4 + \dots, \end{aligned} \quad (41)$$

де  $M(0)$  і  $V(0)$  – маса і об'єм зорі без обертання. Щоб дослідити залежність характеристик зорі від швидкості обертання в ширшій області, ми знайшли розв'язок рівняння (37) відносно ексцентриситету чисельним методом. Виявляється, що дійсні розв'язки існують лише в області  $0 \leq \Omega \leq \Omega_{max} = 0,47399\dots$ , а ексцентриситет є неоднозначною функцією швидкості (рис. 2). Значенню  $\Omega_{max}$  відповідає  $e(\Omega_{max}) = 0,92995\dots$  Конфігурації, що належать області  $0 < e \leq e(\Omega_{max})$ , є типовими еліпсоїдальними структурами, а ті, що належать області  $e(\Omega_{max}) < e \leq 1,0$ ,



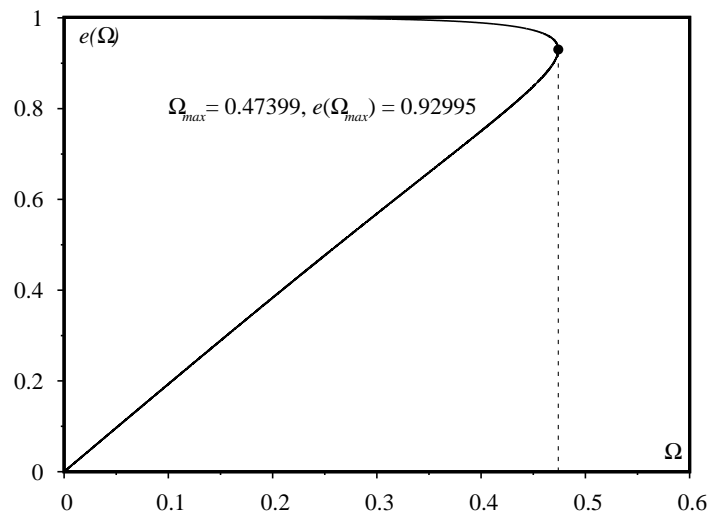


Рис. 2: Залежність ексцентриситету  $e(\Omega)$  від кутової швидкості  $\Omega$

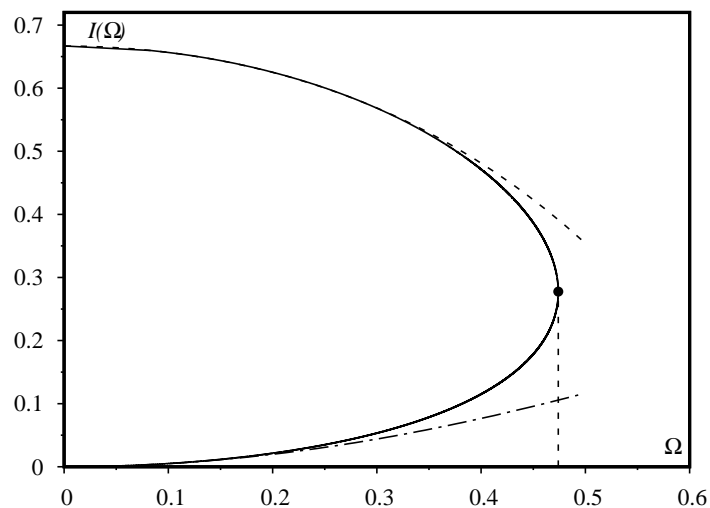


Рис. 3: Залежність функції  $I(\Omega)$  від кутової швидкості  $\Omega$ . Штрих-пунктирна крива відповідає малим швидкостям (малим значенням ексцентриситету), штрихова – малим швидкостям при великих значеннях ексцентриситету

подібні до дискових структур. На рис. 3 зображено залежність  $I(\Omega) \equiv I(e(\Omega))$  від швидкості обертання. При цьому  $I(e(\Omega_{max})) = 0,27698$ . Суцільна крива на рис. 3 відповідає залежності, зображеній на рис. 2, а пунктирна – наближенню малих швидкостей (ф. (38)).

Визначені зі співвідношення (36) екваторіальний та полярний радіуси

$$\xi_e(\Omega) = \sqrt{6} \left\{ 1 - \frac{3}{2} [\Omega^2 + I(\Omega)] \right\}^{-1/2}, \quad \xi_p(\Omega) = \sqrt{6} \left\{ 1 + 3I(\Omega) \right\}^{-1/2} \quad (42)$$

наведено на рис. 4 Суцільні криві відповідають числовим розрахункам в області

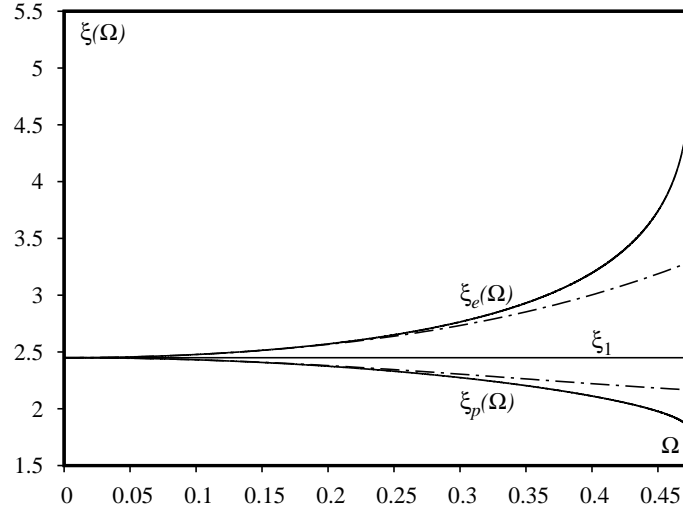


Рис. 4: Залежність екваторіального  $\xi_e(\Omega)$  та полярного  $\xi_p(\Omega)$  радіусів від швидкості обертання  $\Omega$  (штрих-пунктирні криві відповідають наближенню малих швидкостей)

$0 \leq e \leq e(\Omega_{max})$ , а штрих-пунктирні криві – наближенню малих швидкостей. Як видно з рисунка, наближення малих швидкостей застосовне в області  $\Omega \leq 0,5 \Omega_{max}$ .

Залежність маси зорі від швидкості обертання

$$M(\Omega) = M(0) \xi_e^2(\Omega) \xi_p(\Omega) \xi_1^{-3}(0) \quad (43)$$

наведено на рис. 5. При цьому штрих-пунктирна крива відповідає малим швидкостям згідно з формулою (41).

В області  $e(\Omega_{max}) \leq e \leq 1$

$$I(\Omega) \approx \frac{2}{3} - \Omega^2 - \Omega^4 + \dots, \quad (44)$$

що відображає штрихова крива на рис. 3. Тому згідно з формулами (42) в області великих значень ексцентриситету і малих значень швидкості обертання

$$\xi_e(\Omega) \Rightarrow \frac{2}{\Omega^2} + \dots, \quad \xi_p(\Omega) \Rightarrow \sqrt{2}, \quad (45)$$

що відповідає диску сталої товщини і великого радіуса.

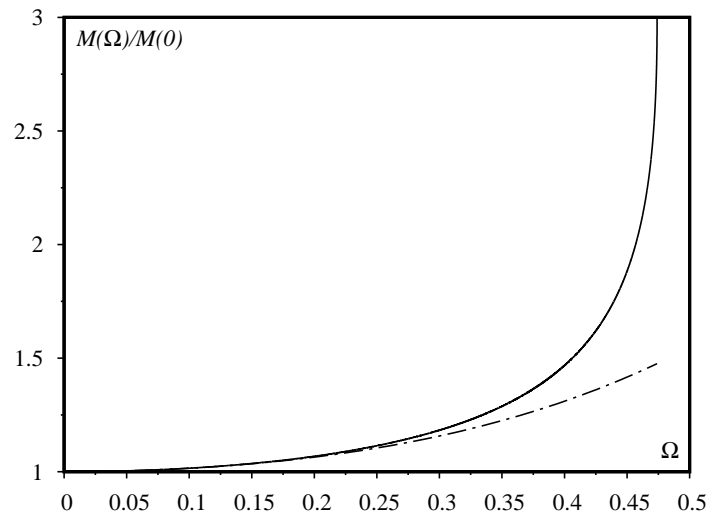


Рис. 5: Залежність маси зорі-політропи від швидкості обертання  $\Omega$  (штрих-пунктирна крива побудована за формулою (41)).

#### 4.2 Політропа $n = 1$

У цьому випадку ми використовуємо як диференціальну, так і інтегральну форму рівняння рівноваги. Рівняння (9) зручно переписати у вигляді неоднорідного рівняння

$$\begin{aligned} \Delta(\xi, \theta) \varphi(\xi, \theta) + \varphi(\xi, \theta) &= -\frac{\Omega^2}{4} \xi^2 \sin^2 \theta, \\ \varphi(\xi, \theta) &= Y_1(\xi, \theta) - \frac{\Omega^2}{4} \xi^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (46)$$

У відповідному однорідному рівнянні змінні розділяються, а його загальний розв'язок

$$\varphi(\xi, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_{2l} j_{2l}(\xi) P_{2l}(t), \quad (47)$$

де  $j_{2l}(\xi)$  – сферична функція Бесселя першого роду [13],  $B_{2l}$  – сталі інтегрування. Підстановка  $\varphi(\xi, \theta) = \Omega^2 \tilde{\varphi}(\xi, \theta)$  дає змогу звільнитись від параметра  $\Omega^2$  у рівнянні (46):

$$\Delta(\xi, \theta) \tilde{\varphi}(\xi, \theta) + \tilde{\varphi}(\xi, \theta) = -\frac{\xi^2}{4} \sin^2 \theta. \quad (48)$$

Частковий розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді

$$\tilde{\varphi}(\xi, \theta) = \sum_{l=2}^{\infty} b_{2l} [\xi \sin \theta]^{2l}. \quad (49)$$

Використовуючи рівність

$$\Delta(\xi, \theta) \{\xi \sin \theta\}^{2l} = (2l)^2 \{\xi \sin \theta\}^{2l-2}, \quad (50)$$

відшукуємо, що

$$b_{2l} = (-1)^{l-1} 2^{-2l} (l!)^{-2}, \quad (51)$$

тому

$$\frac{1}{4} \xi^2 \sin^2 \theta + \tilde{\varphi}(\xi, \theta) = 1 - J_0(\xi \sin \theta), \quad (52)$$

де  $J_0(z)$  – функція Бесселя першого роду нульового порядку [13]. З диференціального рівняння для функції  $Y_1(\xi, \theta)$  впливає асимптотика

$$Y_1(\xi, \theta) \Rightarrow 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\Omega^2 \xi^2}{4} \sin^2 \theta + \dots \quad (53)$$

при  $\xi \rightarrow 0$ , тому загальний розв'язок є таким:

$$Y_1(\xi, \theta) = y_1(\xi) + \Omega^2 \left\{ 1 - J_0(\xi \sin \theta) \right\} + \sum_{l=1}^{\infty} B_{2l} j_{2l}(\xi) P_{2l}(t), \quad (54)$$

де  $y_1(\xi) = j_0(\xi)$  – функція Емдена для політропи з індексом  $n = 1$ .

Як легко переконатися, функція  $J_0(\xi \sin \theta)$  має такий розклад за поліномами Лежандра ( $t = \cos \theta$ ) і сферичними функціями Бесселя:

$$J_0(\xi \sin \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} D_{2l} j_{2l}(\xi) P_{2l}(t); \quad D_0 = 1; \quad D_2 = \frac{5}{2}; \quad D_4 = \frac{27}{8}; \dots \quad (55)$$

З огляду на це розв'язок можна представити в еквівалентному вигляді, а саме

$$Y_1(\xi, \theta) = y_1(\xi) + \Omega^2 (1 - y_1(\xi)) + \sum_{l=1}^{\infty} A_{2l} j_{2l}(\xi) P_{2l}(t), \quad (56)$$

де введено нові сталі  $A_{2l} = B_{2l} - \Omega^2 D_{2l}$ .

З іншого боку, згідно з рівнянням (26)

$$Y_1(\xi, \theta) = 1 + \frac{\Omega^2 \xi^2}{6} (1 - P_2(t)) + \frac{1}{4\pi} \int Y_1(\xi', \theta') Q(\xi, \xi') d\xi'. \quad (57)$$

Через те, що рівняння (57) – неоднорідне, то його можна використати для знаходження сталих інтегрування  $A_{2l}$ . Підставляючи у нього вираз (56), одержуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} A_{2l} j_{2l}(\xi) P_{2l}(t) &= -P_2(t) \frac{\Omega^2 \xi^2}{6} \left\{ 1 + 3I(e) \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} A_{2l} \int j_{2l}(\xi') P_{2l}(t') Q(\xi, \xi') d\xi'. \end{aligned} \quad (58)$$

Інтегрування за змінними  $\xi', t', \varphi'$  виконаємо у рамках моделі еліпсоїда обертання з ексцентриситетом  $e$  і екваторіальним радіусом  $\xi_e$ , як і у випадку  $n = 0$ , розкладаючи ядро  $Q(\xi, \xi')$  у ряд за поліномами Лежандра:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} A_{2l} \int j_{2l}(\xi') P_2(t') Q(\xi, \xi') d\xi' = \\ & = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{A_{2l}}{4l+1} \frac{P_{2l}(t)}{\xi^{1+2l}} \int_0^{\xi} (\xi')^{2+2l} j_{2l}(\xi') d\xi' + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} A_{2l} P_{2l}(t) \xi^{2l} \int_{-1}^{+1} P_{2l}^2(t') dt' \int_{\xi}^{\xi_0(t')} j_{2l}(\xi') (\xi')^{1-2l} d\xi' + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^{\infty} A_{2l} P_{2m}(t) \xi^{2m} (1 - \delta_{m,l}) \int_{-1}^{+1} P_{2l}(t') P_{2m}(t') dt' \times \\ & \times \int_{\xi}^{\xi_0(t')} j_{2l}(\xi') (\xi')^{1-2m} d\xi', \end{aligned} \quad (59)$$

де  $\delta_{n,l}$  – символ Кронекера, а  $\xi_0(t')$  визначено формулою (22).

Інтегрування за змінною  $\xi'$  виконується в аналітичному вигляді, використовуючи рівняння для функцій  $j_{2l}(\xi)$ , а також рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} (4l+1) j_{2l}(\xi) &= \xi \{j_{2l+1}(\xi) + j_{2l-1}(\xi)\}; \\ \frac{d}{d\xi} j_l(\xi) &= j_{l-1}(\xi) - \frac{l+1}{\xi} j_l(\xi); \quad l \geq 1. \end{aligned} \quad (60)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових множниках  $\xi^{2l} P_{2l}(t)$  у лівій і правій сторонах співвідношення (58), одержуємо систему лінійних рівнянь для сталих  $A_{2l}$ :

$$\begin{aligned} A_2 S_{2,2} + A_4 S_{2,4} + A_6 S_{2,6} + \dots &= -\frac{\Omega^2}{6} \left(1 + 3I(e)\right); \\ A_2 B_{4,2} + A_4 S_{4,4} + A_6 B_{4,6} + \dots &= 0; \\ A_2 C_{6,2} + A_4 C_{6,4} + A_6 S_{6,6} + \dots &= 0; \dots \end{aligned} \quad (61)$$

Коефіцієнти  $S_{2l,2l}$ ,  $S_{2l,2n}$ ,  $B_{2n,2l}$ ,  $C_{2n,2l}, \dots$  є функціями параметрів  $e$ ,  $\xi_e$  і визначаються такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} S_{2l,2l} &= \int_0^1 P_{2l}^2(t) \xi_0^{1-2l} j_{2l-1}(\xi_0) dt; \\ S_{2,4} &= \int_0^1 P_2(t) P_4(t) \xi_0^{-1} \{j_3(\xi_0) + 2\xi_0^{-1} j_2(\xi_0)\} dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{2,6} &= \int_0^1 P_2(t)P_6(t) \xi_0^{-1} \{j_5(\xi_0) + 4\xi_0^{-1}j_4(\xi_0) + 8\xi_0^{-2}j_3(\xi_0)\} dt; \\
 B_{4,2} &= - \int_0^1 P_4(t)P_2(t) \left\{ \int_{\xi_1(n)}^{\xi_0} j_2(\xi')(\xi')^{-3} d\xi' \right\} dt; \\
 B_{4,6} &= \int_0^1 P_4(t)P_6(t) \xi_0^{-3} \{j_5(\xi_0) + 2\xi_0^{-1}j_4(\xi_0)\} dt; \\
 C_{6,2} &= - \int_0^1 P_6(t)P_2(t) \left\{ \int_{\xi_1(n)}^{\xi_0} j_2(\xi')(\xi')^{-5} d\xi' \right\} dt; \\
 C_{6,4} &= - \int_0^1 P_6(t)P_4(t) \left\{ \int_{\xi_1(n)}^{\xi_0} j_4(\xi')(\xi')^{-5} d\xi' \right\} dt \dots
 \end{aligned} \tag{62}$$

Як видно із співвідношень (62),

$$S_{2l,2l} \approx \tilde{S}_{2l,2l} = (4l + 1)^{-1} \xi_1^{-1} j_{2l-1}(\xi_1), \tag{63}$$

де  $\xi_1 = \pi$  є безрозмірним радіусом зорі у наближенні Емдена. Недіагональні коефіцієнти (62) є малими величинами, пропорційними до квадрата ексцентриситету (до  $\Omega^2$ ). Наближенню Е. Мілна–С. Чандрасекара [7, 8] відповідають

$$\tilde{A}_2 = -\frac{\Omega^2}{6} \{\tilde{S}_{2,2}\}^{-1}, \quad \tilde{A}_4 = \tilde{A}_6 = \dots = 0, \tag{64}$$

що означає повне нехтування зміною форми поверхні зорі за рахунок обертання при визначенні сталих  $A_{2l}$ .

Коефіцієнти  $A_{2l}$  є функціями кутової швидкості, а також ексцентриситету  $e$  та екваторіального радіуса  $\xi_e$ , які самі є функціями кутової швидкості. Тому виникає задача самоузгодженого визначення геометричних параметрів еліпсоїда обертання. З умови

$$\Omega^2 + (1 - \Omega^2) y_1(\xi_0(t)) + \sum_{l=1}^{\infty} A_{2l} j_{2l}(\xi_0(t)) P_{2l}(t) = 0, \tag{65}$$

знаходимо рівняння поверхні зорі при заданому значенні кутової швидкості  $\xi_0(t) \equiv \xi_0(t|\Omega)$ . Корінь цього рівняння при  $t = 1$  визначає полярний радіус  $\xi_p(\Omega) \equiv \xi_0(1|\Omega)$ , а корінь рівняння при  $t = 0$  дає екваторіальний радіус  $\xi_e(\Omega) \equiv \xi_0(0|\Omega)$  при  $0 \leq \Omega \leq \Omega_{max}$ . Рівняння

$$e^2(\Omega) = 1 - \left[ \frac{\xi_0(1|\Omega)}{\xi_0(0|\Omega)} \right]^2 \tag{66}$$

визначає залежність ексцентриситету від кутової швидкості,  $e(\Omega)$ . Система рівнянь (61), (65), (66), у якій  $\Omega$  є незалежним параметром, визначає залежність

$e(\Omega)$ ,  $\xi_e(\Omega)$ ,  $\xi_p(\Omega)$  та  $A_{2l}(\Omega)$  від кутової швидкості. Ця система розв'язується чисельно, методом послідовних наближень. Алгоритм послідовних ітерацій є таким. При початковому значенні  $\Omega_1 \ll 1$  у нульовому наближенні  $\xi_e(\Omega) = \xi_p(\Omega)$  визначаємо з рівняння (65) при  $A_{2l} = 0$ . Далі знаходяться величини  $S_{2l,2l}$ ,  $S_{2,4}, \dots, C_{6,4}$  і розв'язується система рівнянь (61). У наступній ітерації знаходимо  $\xi_p(\Omega)$  та  $\xi_e(\Omega)$  з рівняння (65) при знайдених коефіцієнтах  $A_{2l}$ , обчислюємо ексцентриситет  $e(\Omega)$ , знову розраховуємо  $S_{2l,2l}, \dots, C_{6,4}$  і т. д. Остаточні значення  $A_{2l}(\Omega_1)$  використовуються як нульове наближення для розрахунку характеристик при  $\Omega_2 = \Omega_1 + \Delta\Omega$  і т. д. Одержані таким способом сталі інтегрування та характеристики еліпсоїда наведено у табл. 2.

Максимальне значення кутової швидкості визначається з умови зникання розв'язку рівняння (65) при  $t = 0$ : при значенні  $\Omega_{max}$  екваторіальний радіус стає безмежним, а полярний залишається скінченним. Це точка нестійкості, при якій настає витікання речовини із околу екватора у відповідності до умови (11). У наближенні  $A_{2l} = 0$  при  $l \geq 2$  знаходимо, що  $\Omega_{max} = 0,29770\dots$ . При врахуванні  $A_2(\Omega)$ ,  $A_4(\Omega)$ ,  $A_6(\Omega)$  одержуємо значення  $\Omega_{max} = 0,24607\dots$ .

У табл. 2 наведено залежність  $e(\Omega)$ ,  $\xi_e(\Omega)$ ,  $\xi_p(\Omega)$ ,  $A_2(\Omega) - A_6(\Omega)$ , а також множника

$$\eta(\Omega) = M(\Omega)/M_E \quad (67)$$

від кутової швидкості. Тут  $M(\Omega)$  позначає масу еліпсоїда обертання у наближенні  $A_{2n} = 0$  при  $n \geq 4$ , а  $M_E$  є масою зорі-політропи без обертання. Крім того наведено залежність від кутової швидкості безрозмірного моменту інерції

$$\zeta(\Omega) = I(\Omega)/I(0), \quad (68)$$

де  $I(0) = 8\pi^2\lambda^5\rho_c(\pi^2 - 6)/3$  – момент інерції в моделі Емдена.

На рис. 6 зображено залежність екваторіального радіуса від швидкості обертання у різних наближеннях. Аналогічно на рис. 7 подано залежність полярного радіуса від швидкості обертання у тих самих наближеннях.

Крім того на рис. 8 подано переріз поверхні зорі-політропи відповідно до формули (65), а також поверхні еліпсоїда згідно з формулою (22) при  $\Omega = 0, 2$ , причому використано  $e(\Omega)$  та  $\xi_e(\Omega)$  з табл. 2. Як бачимо, є невелике відхилення форми зорі від точного еліпсоїда обертання.

## 5 Висновки і перспективи

Запропонований нами метод опису зір у політропній моделі, що ґрунтується на використанні інтегральної та диференціальної форми рівняння рівноваги, є замкнутим, не потребує додаткової інформації і забезпечує простий і прозорий алгоритм самоузгодженого розв'язання цієї задачі. У частковому випадку  $n = 0$  цей підхід дає можливість одержати точний аналітичний розв'язок рівняння рівноваги і дослідити залежність форми і розмірів зорі від кутової швидкості. Однак ця модель занадто проста і ми розглядаємо її насамперед для ілюстрації методу.

Модель політропи з індексом  $n = 1$  дає змогу записати аналітичний розв'язок двовимірного диференціального рівняння рівноваги у вигляді розкладу за поліномами Лежандра і сферичними функціями Бесселя першого роду, у якому фігурує

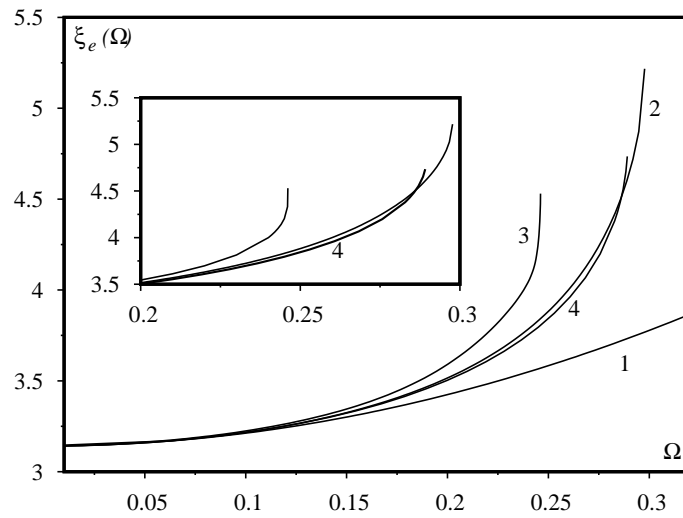


Рис. 6: Залежність екваторіального радіуса  $\xi_e(\Omega)$  від швидкості обертання  $\Omega$  у різних наближеннях. Крива 1 побудована за результатами роботи [8], криві 2 і 3 відповідають формулі (56): крива 2 відповідає наближенню  $A_{2l} = 0$  ( $l \geq 2$ ), крива 3 – врахуванню доданків з точністю до  $A_6$  включно. Крива 4 побудована за результатами роботи [9]

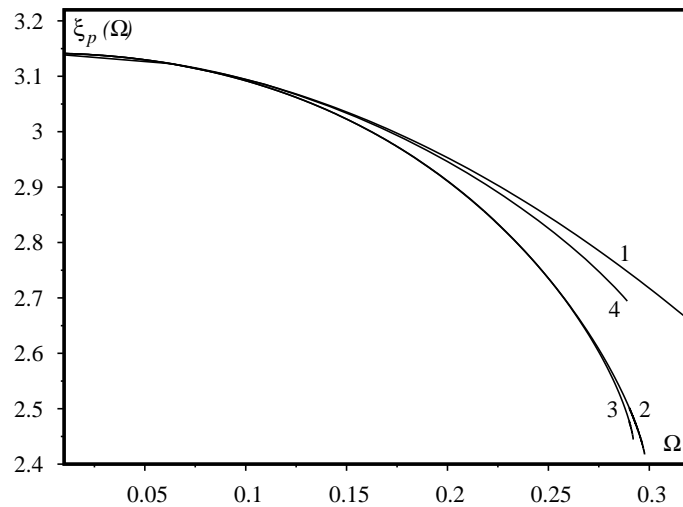


Рис. 7: Залежність полярного радіуса  $\xi_p(\Omega)$  від швидкості обертання  $\Omega$  у різних наближеннях. Крива 1 побудована за результатами роботи [8], криві 2 і 3 відповідають формулі (56): крива 2 відповідає наближенню  $A_{2l} = 0$  ( $l \geq 2$ ), крива 3 – врахуванню доданків з точністю до  $A_6$  включно. Крива 4 побудована за результатами роботи [9]



Табл. 2: Залежність характеристик політропи з індексом  $n = 1$  від кутової швидкості

$\Omega$	$\epsilon(\Omega)$	$\xi_p(\Omega)$	$\xi_e(\Omega)$	$A_2(\Omega)$	$A_4(\Omega)$	$A_6(\Omega)$	$\eta(\Omega)$	$\zeta(\Omega)$
0, 01000	0, 02739	3, 14112	3, 14230	-0, 00082	$6, 10775 \cdot 10^{-7}$	$-8, 02713 \cdot 10^{-10}$	1, 00023	1, 00062
0, 02000	0, 05478	3, 13971	3, 14443	-0, 00329	$9, 796 \cdot 10^{-6}$	$-5, 15628 \cdot 10^{-8}$	1, 00092	1, 00249
0, 03000	0, 08219	3, 13734	3, 14799	-0, 00743	$4, 97925 \cdot 10^{-5}$	$-5, 91249 \cdot 10^{-7}$	1, 00207	1, 00563
0, 04000	0, 10961	3, 13402	3, 15302	-0, 01324	0, 000158264	$-3, 3532 \cdot 10^{-6}$	1, 00369	1, 01006
0, 05000	0, 13706	3, 12973	3, 15955	-0, 02076	0, 000389238	$-1, 2947 \cdot 10^{-5}$	1, 00580	1, 01583
0, 06000	0, 16455	3, 12447	3, 16765	-0, 03003	0, 000814471	$-3, 92393 \cdot 10^{-5}$	1, 00839	1, 02298
0, 07000	0, 19208	3, 11820	3, 17737	-0, 04109	0, 00152534	-0, 00010072	1, 01150	1, 03158
0, 08000	0, 21967	3, 11092	3, 18880	-0, 05399	0, 00263535	-0, 000229121	1, 01513	1, 04172
0, 09000	0, 24733	3, 10259	3, 20205	-0, 06881	0, 00428336	-0, 000475679	1, 01933	1, 05351
0, 10000	0, 27507	3, 09318	3, 21725	-0, 08564	0, 00663789	-0, 000919578	1, 02410	1, 06707
0, 11000	0, 30291	3, 08266	3, 23456	-0, 10456	0, 00990262	-0, 00167936	1, 02951	1, 08256
0, 12000	0, 33087	3, 07097	3, 25416	-0, 12569	0, 0143237	-0, 00292837	1, 03557	1, 10016
0, 13000	0, 35900	3, 05807	3, 27632	-0, 14919	0, 0201994	-0, 00491599	1, 04237	1, 12011
0, 14000	0, 38731	3, 04388	3, 30131	-0, 17521	0, 0278935	-0, 00799698	1, 04994	1, 14270
0, 15000	0, 41586	3, 02832	3, 32953	-0, 20397	0, 0378538	-0, 0126729	1, 05839	1, 16830
0, 16000	0, 44471	3, 01127	3, 36147	-0, 23574	0, 0506373	-0, 0196514	1, 06782	1, 19736
0, 17000	0, 47394	2, 99259	3, 39779	-0, 27082	0, 0669518	-0, 0299343	1, 07834	1, 23047
0, 18000	0, 50367	2, 97208	3, 43938	-0, 30965	0, 0877136	-0, 0449518	1, 09014	1, 26843
0, 19000	0, 53407	2, 94946	3, 48752	-0, 35278	0, 11415	-0, 0667796	1, 10343	1, 31232
0, 20000	0, 56538	2, 92430	3, 54414	-0, 40103	0, 147978	-0, 0985096	1, 11855	1, 36371
0, 21000	0, 59802	2, 89594	3, 61237	-0, 45558	0, 191751	-0, 14496	1, 13597	1, 42496
0, 22000	0, 63273	2, 86321	3, 69793	-0, 51842	0, 249659	-0, 21424	1, 15648	1, 50007
0, 23000	0, 67114	2, 82368	3, 81334	-0, 59350	0, 329832	-0, 322202	1, 18158	1, 59696
0, 24000	0, 71852	2, 77019	4, 00008	-0, 69231	0, 455201	-0, 513924	1, 21544	1, 73805
0, 24100	0, 72446	2, 76320	4, 02826	-0, 70491	0, 472987	-0, 543279	1, 21980	1, 75727
0, 24200	0, 73086	2, 75562	4, 06018	-0, 71850	0, 492654	-0, 576426	1, 22449	1, 77830
0, 24300	0, 73793	2, 74724	4, 09737	-0, 73341	0, 514881	-0, 614842	1, 22964	1, 80179
0, 24400	0, 74604	2, 73767	4, 14281	-0, 75034	0, 54095	-0, 661368	1, 23546	1, 82894
0, 24500	0, 75612	2, 72593	4, 20403	-0, 77099	0, 574031	-0, 723247	1, 24249	1, 86270
0, 24600	0, 77450	2, 70593	4, 33124	-0, 80636	0, 634619	-0, 849421	1, 25413	1, 92196
0, 24601	0, 77507	2, 70536	4, 33555	-0, 80739	0, 63648	-0, 85372	1, 25445	1, 92369
0, 24602	0, 77563	2, 70481	4, 33977	-0, 80839	0, 638275	-0, 857875	1, 25477	1, 92537
0, 24603	0, 77626	2, 70418	4, 34461	-0, 80951	0, 640319	-0, 862636	1, 25512	1, 92728
0, 24604	0, 77702	2, 70344	4, 35043	-0, 81086	0, 64275	-0, 86836	1, 25554	1, 92955
0, 24605	0, 77800	2, 70249	4, 35808	-0, 81259	0, 645908	-0, 875871	1, 25608	1, 93248
0, 24606	0, 77959	2, 70100	4, 37053	-0, 81535	0, 650937	-0, 888039	1, 25693	1, 93714
0, 24607	0, 78685	2, 69478	4, 42985	-0, 82731	0, 672619	-0, 94297	1, 26065	1, 95773

набір сталих інтегрування  $A_{2l}$  (ф. (56)). Використання інтегральної форми рівняння рівноваги (57) повною мірою ілюструє переваги запропонованого методу, бо дає можливість одержати систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження сталих інтегрування, у зв'язку з чим виникає можливість самоузгодженого розрахунку геометричних характеристик еліпсоїда, а також встановлення області стійкості зорі щодо швидкості обертання. Точність розрахунку  $\Omega_{max}$ , як і всіх інших характеристик зорі, залежить від числа врахованих членів ряду (56) і точності розрахунку матричних елементів (62). Як видно з рис. 6, 7, наближення С. Чандрасекара [8], коли враховується лише доданок типу  $A_2 j_2(\xi) P_2(t)$ , а  $S_{2,2}$  визначається формулою (63), задовільно описує зміну полярного та екваторіального радіусів тільки в області малих кутових швидкостей ( $\Omega \leq 0, 5\Omega_{max}$ ).

Як видно з табл. 2, сталі інтегрування  $A_2(\Omega)$ ,  $A_4(\Omega)$ ,  $A_6(\Omega)$ , ... утворюють знакозмінний ряд, причому  $|A_{2l}(\Omega)| \sim \Omega^{2l}$ . Відносні внески доданків ряду (56) ілюструють рис. 6 – 8. Ряд (56) має добру збіжність, а більше число врахованих членів ряду забезпечує точніші значення характеристик. У цьому сенсі точність числових розрахунків у роботі [9] приблизно відповідає врахування доданка, пропорційного  $A_2(\Omega)$ , при не дуже точному розрахунку цієї сталої інтегрування. Загалом важливішим є точніший розрахунок  $A_2(\Omega)$ , ніж врахування доданків з  $A_4(\Omega)$ ,  $A_6(\Omega)$ .

Як впливає з наших розрахунків, максимальне значення кутової швидкості  $\Omega_{max}$  зменшується в 1,9 раза при переході  $n = 0$  до  $n = 1$ . З результатів роботи

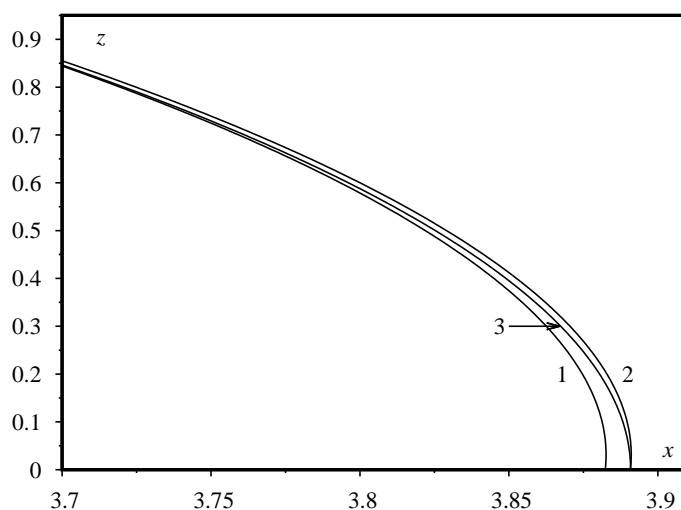


Рис. 8: Фрагмент перерізу еліпсоїда обертання в околі екватора при  $\Omega = 0,2$ . Крива 1 зображає переріз поверхні еліпсоїда у наближенні  $A_{2l}$  ( $l \geq 2$ ), крива 2 відповідає наближенню  $A_{2l}$  ( $l \geq 4$ ), крива 3 – частина еліпса, побудована у відповідності до формули (22), у якій використано  $\xi_e(\Omega)$  та  $e(\Omega)$ , взяті з табл. 2

Р. Джеймса [9], у якій розглянуто політропи з індексами  $n = 1, 3/2, 2, 3$ , можна зробити висновок, що  $\Omega_{max}$  має таку приблизну залежність від індекса політропи:  $\Omega_{max}(n) \approx \Omega_{max}(1) \cdot 2^{1-n}$ . Зменшення області зміни  $\Omega$  є підставою для того, щоби запропонований нами метод застосувати до опису рівноваги політроп з  $n > 1$ , лінеаризувавши рівняння (9) за допомогою підстановки

$$Y_n(\xi, \theta) = y_n(\xi) + \Psi_n(\xi, \theta), \quad (69)$$

враховуючи у правій стороні цього рівняння лише лінійні за  $\Psi_n(\xi, \theta)$  члени, згідно з методикою Е. Мілна [7].

#### Список використаної літератури

1. Homer Lane J. On the Theoretical Temperature of the Sun under the Hypothesis of a gaseous mass Maintining Its Volume by Its Internal Heat and Depending on the Law of Gases Known to Terrestrial Experiment / J. Homer Lane // Am. J. Sci. Arts. – 1870. – Vol. 50. – P. 57.
2. Emden K. Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie / K. Emden. – Leipzig, Berlin, 1907.
3. Fowler R. H. Emden's equation: The solutions of Emden's and similar differential equations / R. H. Fowler // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 1930. – Vol. 91. – P. 63.
4. Ritter A. Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Constitution gasförmiger Weltkörper / A. Ritter // Wiedemann Annalen. – 1878. – Vol. 5. – P. 543.
5. Kelvin W. Mathematical and Physical Papers. Vol. 3. / W. Kelvin. – Cambridge: Cambridge University Press, 1911. – P. 255.
6. Eddington A. S. The Internal Constitution of the Stars / A. S. Eddington. – Cambridge: Cambridge University Press, 1926.
7. Milne E. A. The equilibrium of a rotating star / E. A. Milne // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 1923. – Vol. 83. – P. 118.

8. Chandrasekhar S. The Equilibrium of Distorted Polytropes. I. The Rotational Problem / S. Chandrasekhar // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 1933. – Vol. 33. – P. 390.
9. James R. A. The Structure and Stability of Rotating Gas Masses / R. A. James // *Astrophys. J.* – 1964. – Vol. 140. – P. 552.
10. Vavruk M. V., Smerechynskiy S. V., Tyshko N. L. The microscopic parameters and the macroscopic characteristics of real degenerate dwarfs / M. V. Vavruk, S. V. Smerechynskiy, N. L. Tyshko // *J. of Phys. Stud.* – 2010. – Vol. 14. – P. 4901.
11. Shapiro S. L., Teukolsky S. A. Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars / S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky. – Cornell University, Ithaca, New York, 1983.
12. Chandrasekhar S. An Introduction to the Study of Stellar Structure / S. Chandrasekhar. – Chicago : University of Chicago Press, 1939.
13. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / M. Abramowitz, I. A. Stegun. – Washington: Government Printing Office, 1972.

## References

1. J. Homer Lane, *Am. J. Sci. Arts.* **50**, 57 (1870).
2. K. Emden, *Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie* (Leipzig, Berlin, 1907).
3. R. H. Fowler, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **91**, 63 (1930).
4. A. Ritter, *Wiedemann Annalen.* **5**, 543 (1878).
5. W. Kelvin, *Mathematical and Physical Papers* (Cambridge University Press, Cambridge, 1911), Vol. 3, p. 255.
6. A. S. Eddington, *The Internal Constitution of the Stars* (Cambridge University Press, Cambridge, 1926).
7. E. A. Milne, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **83**, 118 (1923).
8. S. Chandrasekhar, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **33**, 390 (1933).
9. R. A. James, *Astrophys. J.* **140**, 552 (1964).
10. M. V. Vavruk, S. V. Smerechynskiy and N. L. Tyshko, *J. of Phys. Stud.* **14**, 4901 (2010).
11. S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars* (Cornell University, Ithaca, New York, 1983).
12. S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (University of Chicago Press, Chicago, 1939).
13. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Government Printing Office, Washington, 1972).

## New method of calculation of stellar equilibrium with axial rotation

M. Vavruk, N. Tyshko, D. Dzikovskyi, O. Stelmakh

*Ivan Franko National University of Lviv,  
astrophysic department,  
Kyrylo and Methodiy Str., 8, 79005 Lviv, Ukraine  
e-mail: mvavruk@gmail.com*

New method for the calculation of equilibrium of stars with axial rotation was proposed in the frame of polytropic model. Our approach is based on the simultaneous use of differential and integral forms of equilibrium equation. The system of the equations is exactly determined and allows to calculate correctly integration constants. General method is illustrated in the case of linear equations describing the equilibrium of polytropes with indexes  $n = 0$  and  $n = 1$ . The solution of two-dimensional differential equations in partial derivatives were represented in analytical form. The dependence of surface shape, mass and volume of star on angular velocity were investigated in the case  $n = 0$ , it was showed the presence of two modes – ellipsoidal and disk and determined the critical value of velocity  $\Omega_{max}$ . For the polytrope with index  $n = 1$  the solution of the second order differential equation in partial derivatives can be represented in the form of expansion in series by spherical Bessel functions of first kind and Legendre polynomials of radial variable. Unlike works of E. Milne and S. Chandrasekhar, which are based on perturbation theory with respect to rotation, in our works integration constants are determined self-consistently with accurate consideration of the ellipsoidal shape of the stellar surface. The solution of linear system of algebraic equations for the integration constants are determined simultaneously with the eccentricity and equatorial radius by iteration method. The dependences of the characteristics of star (polar and equatorial radii, eccentricity, mass, volume, moment of inertia) on the value of dimensionless angular velocity  $\Omega$  were calculated. At small values  $\Omega$  our results coincide with the results of E. Milne, S. Chandrasekhar and R. James and are significantly different from them at small velocities, which are closed to the critical  $\Omega_{max}$ . The last one is approximately on 20% less than calculated by R. James. The results of numerical calculation were represented in the form of tables and figures.

**Key words:** polytropic-stars, heterogeneous ellipsoids, axial rotation, mechanical equilibrium equation, stability of stars.

Статтю отримано: 11.06.2019  
Прийнято до друку: 27.06.2019