

УДК 550.344

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ СЕЙСМОЛОГІЇ

Д. Малицький¹, В. Фурман²

¹Карпатське відділення Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України,
вулиця Наукова, 3-б, Львів, Україна,
e-mail: dmytro@cb-igph.lviv.ua

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
геологічний факультет, кафедра фізики Землі,
вулиця Грушевського, 4, 79005, Львів, Україна,
e-mail: fourman@franko.lviv.ua

Наведено розв'язок прямої задачі для поля переміщень на вільній поверхні шаруватого ізотропного середовища з використанням матричного методу. Результати прямої задачі використано для визначення тензора сейсмічного моменту. Введено часову функцію вогнища землетрусу.

Ключові слова: сейсмічне поле, тензор сейсмічного моменту, вогнище землетрусу, ізотропне середовище.

У праці описано головні результати моделювання хвильового поля в шаруватому півпросторі за допомогою матричного методу Томсона–Хаскела та можливості розв'язування оберненої задачі щодо вогнища землетрусу. Одержані напрацювання в теоретичному та прикладному аспектах знайшли застосування для побудови механізмів вогнищ землетрусів і мають перспективи для інших сейсмологічних задач, що доведено нижче.

Зрозуміло, що обернені задачі є некоректними і для їхнього розв'язування необхідні додаткові умови, які накладаються на фізичні параметри. Проте й за таких умов немає достовірності, що знайдено правильний розв'язок. Це означає, що може існувати достатньо багато різних систем шуканих параметрів, які задовольняють розв'язок прямої задачі. По суті, для більшості випадків сейсмологічна задача знаходження характеристик джерела сейсмічних хвиль чи досліджуваного середовища зводиться до методу підбирання [1], коли шукані параметри змінюються у відомих межах, зумовлених фізичними властивостями. Крім методу підбирання, відомі числові методи скінченних різниць і скінченних елементів, а також матричний метод, які також широко використовують для обернених задач. Ми, проаналізувавши достатньо багато методів розв'язування прямих та обернених задач, розробили декілька модифікацій матричного методу Томсона–Хаскела, зазначивши його переваги і недоліки, а також перспективи використання для багатьох задач сейсмології [3–7].

Пряма задача. Матричний метод застосовують в випадку поширення сейсмічних хвиль у горизонтально-шаруватому півпросторі, коли неоднорідне середовище моделюють системою однорідних ізотропних шарів з паралельними межами. Вогнище зем-

летрусу розміщене на довільній уявній межі й може бути представлене довільно орієнтованою силою або дев'ятьма парами сил (тензором сейсмічного моменту). У сучасній сейсмології таке зображення джерела знайшло застосування, а його опис сейсмічним тензором є найефективнішим, оскільки дислокаційну модель вогнища задано площиною розриву, яка орієнтована в просторі трьома кутами (рис. 1) і сейсмічним моментом M_0 , який визначає енергію землетрусу. Таке джерело сейсмічних хвиль є точковим у просторі, однак може бути розподілене у часі. Ми достатньо багато уваги приділяли саме такій моделі джерела [7]. Ще один важливий аспект полягає в тому, що для розв'язування оберненої задачі використано аналітичні співвідношення прямої задачі, тобто інверсію для сейсмічного тензора виконано завдяки використанню розв'язків для поля переміщень. Отже, формулювання прямої задачі полягає у визначенні хвильового поля на вільній поверхні шаруватого півпростору, коли вогнище землетрусу представлено, як точкове джерело в просторі, однак розподілене в часі. У такому випадку кожна компонента тензора сейсмічного моменту є функцією часу, тобто є згортокою сейсмічного тензора і так званої часової функції вогнища $STF(t)$. Зазначимо, що сьогодні немає єдиного підходу до визначення $STF(t)$. Це пов'язано знову ж таки з некоректністю обернених задач, а також, на нашу думку, з відомою методикою визначення сейсмічного тензора. Цей підхід потребує достатньо великої кількості сейсмічних станцій, які повинні бути розміщені навколо епіцентра землетрусу. Тоді за знаками вступів прямих P хвиль і за кутами їхнього виходу на фокальній площині будують дві нодальні площини, одна з яких є площиною розриву [2]. Такий метод дає змогу визначити орієнтацію площини розриву та скалярний сейсмічний момент M_0 за сейсмічними записами і знаходити за відомими формулами компоненти сейсмічного тензора. Однак зрозуміло, що фізичні процеси у вогнищі не відбуваються миттєво. Наприклад, час, протягом якого відбувається сейсмічна подія, може тривати від часток секунди для малих землетрусів до десятків хвилин для великих. У такому випадку введення часової функції вогнища $STF(t)$ є важливим кроком переходу від точкового до розподіленого джерела.

Нижче наведено головні результати математичного моделювання поширення сейсмічних хвиль у шаруватому півпросторі для джерела у вигляді сейсмічного тензора, отримані для різних модифікацій матричного методу [6]:

$$\begin{pmatrix} u_z^{(0)} \\ u_r^{(0)} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \int_0^{\infty} k^2 \mathbf{I}_i L^{-1} [M_i \mathbf{g}_i] dk, \quad u_{\varphi}^{(0)} = \sum_{i=5}^6 \int_0^{\infty} k^2 J_i L^{-1} [M_i \mathbf{g}_{i\varphi}] dk;$$

$$\mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{g}_i = \begin{pmatrix} g_{iz} \\ g_{ir} \end{pmatrix}, \quad J_5 = J_0, \quad J_6 = J_1. \quad (1)$$

Для тестування коректності розв'язку прямої задачі (1) використано результати проекту Source Inversion Validation (SIV), коли для відомого середовища моделювали синтетичні сейсмограми різними методами (рис. 2). Унизу наведено результат, отриманий за цією методикою. На рис. 1 синтетичні сейсмограми отримані за допомогою восьми методів для моделі середовища: дев'ять шарів на півпросторі, коли джерело сейсмічних хвиль розміщене на глибині 10 км, а часова функція вогнища є П-імпульс тривалістю 0,2 с. Порівняльний аналіз синтетичних сейсмограм засвідчує, що запропонована авторами модифікація матричного методу для визначення поля переміщень на вільній поверхні шаруватого півпростору може бути використана для моделювання хвильових полів.

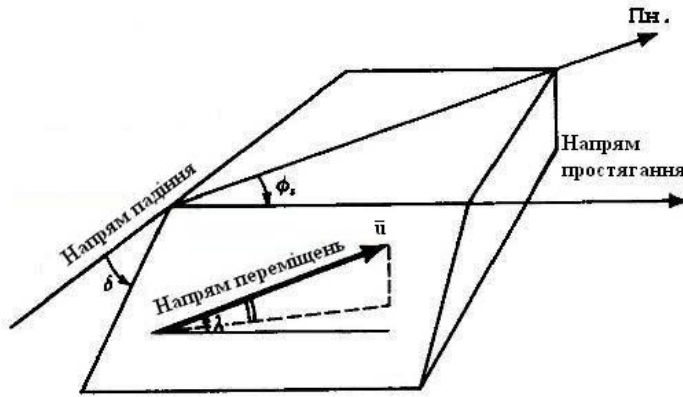


Рис. 1. Дислокаційна модель вогнища землетрусу.

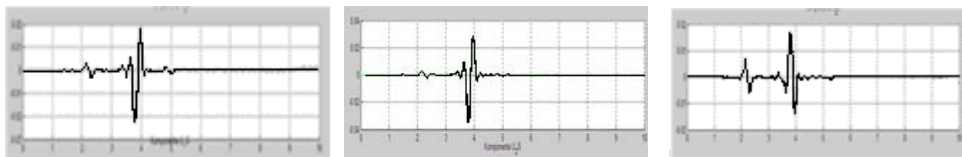
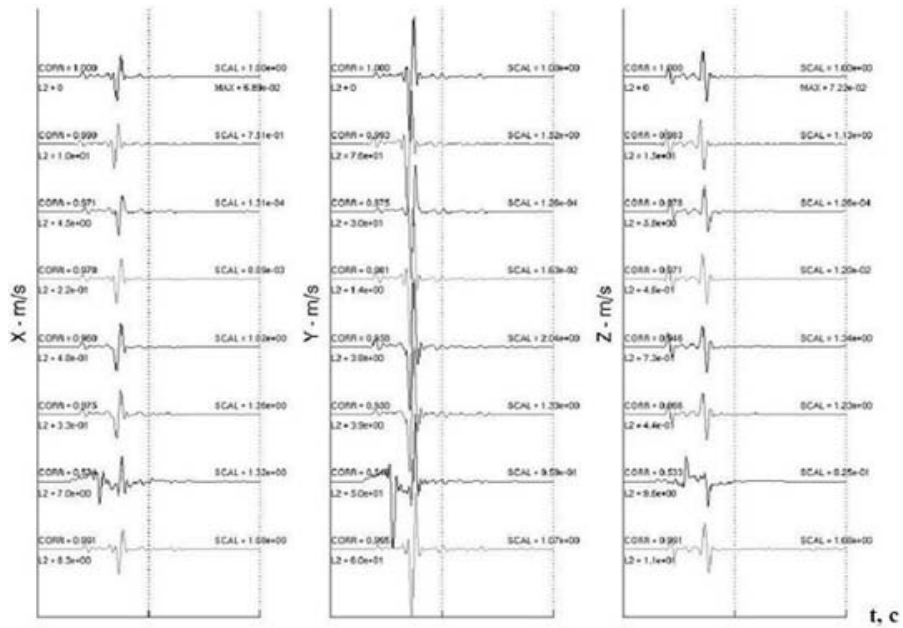


Рис. 2. Компоненти швидкості переміщень на вільній поверхні середовища, обчислені різними методами згідно з проектом SIV та запропонованою авторами модифікацією матричного методу.

Обернена задача. У ході розв'язування прямої задачі введено ті параметри джерела, які потрібно визначати в оберненій задачі. Знову ж таки наголосимо, що вогнище землетрусу задане точковим джерелом, яке описане сейсмічним тензором M_{ij} , а також уведено функцію $STF(t)$. Отже, ми визначимо компоненти тензора сейсмічного моменту як функції часу. У праці [7] розроблено метод виділення прямих P - і S -хвиль з повного хвильового поля. Ми наведемо головні теоретичні результати, а також застосування методики на модельних прикладах. Можна довести, що з використанням задачі на власні значення і власні вектори із співвідношень (1) отримано ту частину хвильового поля, яка відповідає за поширення тільки прямих P - і S -хвиль, а саме [7]:

$$u_z^{(0)} = u_z^{(0)p} + u_z^{(0)s}, u_r^{(0)} = u_r^{(0)p} + u_r^{(0)s}, u_\varphi^{(0)} = u_\varphi^{(0)s}.$$

У праці [7] наведено таке матричне рівняння в декартовій системі координат:

$$\mathbf{U}_s^{(0)} = \left(U_s^{(0)p}, U_s^{(0)s}, U_y^{(0)p}, U_y^{(0)s}, U_z^{(0)p}, U_z^{(0)s} \right)^T = \mathbf{K} \cdot \mathbf{M} \quad (2)$$

Матричне рівняння (2) записане через систему шести алгебричних рівнянь із шістьма невідомими, що є компонентами тензора сейсмічного моменту M_{ij} ($ij=xz, yz, zz, xx, uy, xy$). Із рівняння (2) знаходимо компоненти тензора сейсмічного моменту:

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}_s^{(0)}, \quad (3)$$

де матриця \mathbf{K} визначена параметрами шаруватої моделі середовища:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{11}^P & K_{12}^P & K_{13}^P & K_{14}^P & K_{15}^P & K_{16}^P \\ K_{21}^S & K_{22}^S & K_{23}^S & K_{24}^S & K_{25}^S & K_{26}^S \\ K_{31}^P & K_{32}^P & K_{33}^P & K_{34}^P & K_{35}^P & K_{36}^P \\ K_{41}^S & K_{42}^S & K_{43}^S & K_{44}^S & K_{45}^S & K_{46}^S \\ K_{51}^P & K_{52}^P & K_{53}^P & K_{54}^P & K_{55}^P & K_{56}^P \\ K_{61}^S & K_{62}^S & K_{63}^S & K_{64}^S & K_{65}^S & K_{66}^S \end{pmatrix}. \quad (4)$$

На практиці ми не маємо точної швидкісної моделі. Тому треба використовувати більше станцій для інтерпретації тензора \mathbf{M} . Нехай для визначеної події маємо N станцій, на яких записано сейсмограми для конкретного землетрусу. Тоді для кожної станції запишемо рівняння (2) так:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 \mathbf{M} &= \mathbf{U}_{S1}^{(0)} \\ \mathbf{K}_2 \mathbf{M} &= \mathbf{U}_{S2}^{(0)} \\ &\dots \\ \mathbf{K}_N \mathbf{M} &= \mathbf{U}_{SN}^{(0)} \end{aligned} \quad (5)$$

Система матричних рівнянь (5) є перевизначеною щодо шести компонент тензора \mathbf{M} . Її перепишемо у вигляді

$$\mathbf{GM} = \mathbf{U}_S^{(0)}, \quad (6)$$

де матриця $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{K}_N \end{pmatrix}$ має розмірність $6 \cdot 6N$, бо кожна з матриць \mathbf{K}_i ($i = 1, N$) має

розмірність $6 \cdot 6$. Вектор $\mathbf{U}_S^{(0)}$ має розмірність $1 \cdot 6N$, бо кожний вектор $\mathbf{U}_{S_i}^{(0)}$ ($i = 1, N$) має розмірність $1 \cdot 6$.

Зведемо перевизначену систему лінійних рівнянь (6) до такого вигляду, помноживши зліва і справа на матрицю $\tilde{\mathbf{G}}^*$, яка щодо матриці \mathbf{G} є комплексно-спряженою і транспонованою:

$$\tilde{\mathbf{G}}^* \mathbf{GM} = \tilde{\mathbf{G}}^* \mathbf{U}_S^{(0)}, \quad (7)$$

або

$$\mathbf{M} = (\tilde{\mathbf{G}}^* \mathbf{G})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}^* \mathbf{U}_S^{(0)}. \quad (8)$$

Розв'язок (8) для тензора \mathbf{M} називатимемо розв'язком узагальненої оберненої задачі в сенсі середньоквадратичного, за якого мінімізується норма

$$|\mathbf{U}_S^{(0)} - \mathbf{GM}|^2$$

Отже, найліпший розв'язок отримано, якщо записи на станціях будуть без шумів і для швидкісних моделей, наближених до реальних під кожною станцією, що зареєструвала подію. Зазначимо, що отриманий метод для визначення сейсмічного тензора \mathbf{M} є ефективним для слабких місцевих землетрусів.

На завершення наведемо результати визначення сейсмічного тензора для такої модельної задачі: задамо середовище у вигляді двох шарів на півпросторі, джерело розміщене на глибині $h_s = 5000$ м (параметри другого і третього шарів однакові). Тензор сейсмічного моменту задано у вигляді

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5,0 & -1,4 & -7,0 \\ -1,4 & 4,52 & -8,3 \\ -7,0 & -8,3 & -9,52 \end{pmatrix} * 10^{14} \text{ Н}^* \text{ м}. \quad (9)$$

Часову функцію у вогнищі $STF(t)$ задано у вигляді загасальної синусоїди (рис. 3, а). Компоненти сейсмічного тензора як функції часу показані на рис. 3, б.

Розв'язок оберненої задачі (8) за розробленою методикою (рис. 3, в) отримано для значень вектора $\mathbf{U}_S^{(0)}$, які беруть із сейсмічних записів $u_z^{(0)}(r, z, \varphi, t)$, $u_r^{(0)}(r, z, \varphi, t)$, $u_\varphi^{(0)}(r, z, \varphi, t)$ виділенням на кожній компоненті прямих P - і S -хвиль.

Отже, проаналізовано отриманий узагальнений розв'язок оберненої задачі, а також описано спосіб визначення часової функції вогнища STF . Про важливість визначення цього параметра і його використання в сучасній сейсмології тривають дискусії серед вітчизняних і зарубіжних сейсмологів. Сьогодні цій проблемі присвячено достатньо багато конференцій і симпозіумів. Зокрема, у проекті Source Inversion Validation бере участь багато відомих вчених. З цього випливає, що обернена задача сейсмології щодо визначення параметрів вогнища землетрусу є актуальною, потребує розроблення нових

методів і є перспективною для подальших досліджень. Ми розглядаємо можливості введення анізотропного середовища для моделювання поширення сейсмічних хвиль з метою виявлення впливу анізотропії на хвильове поле. Така задача потребує розв'язування, оскільки відомо, що реальне середовище є анізотропним і його вплив на розв'язок оберненої задачі також потрібно досліджувати.

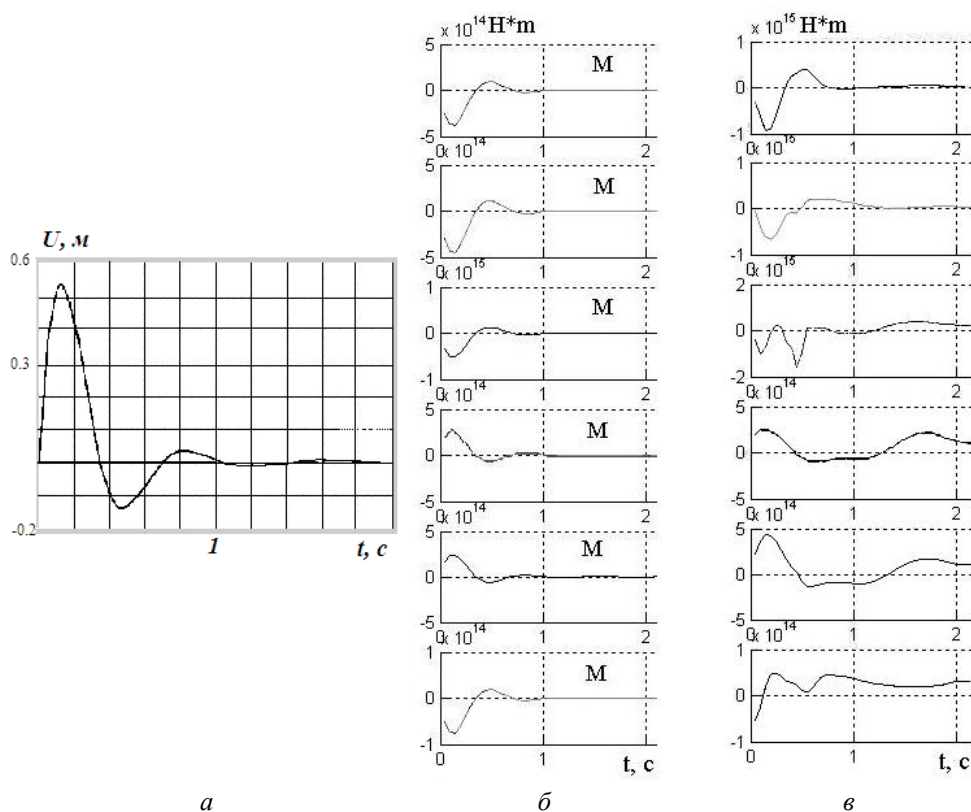


Рис. 3. Часова функція вогнища STF (а); компоненти тензора сейсмічного моменту як функції часу (пряма задача) (б); результати оберненої задачі (в).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вербицкий Т.З.* Математическое моделирование в сейсморазведке / Т.З. Вербицкий, Р.С. Починайко, Ю.П. Стародуб, О.С. Федоришин. – Киев : Наук. думка, 1985. – С. 275.
2. *Аки К.* Количественная сейсмология. Теория и методы: в 2 т. / К. Аки, П. Ричардс. – М. : Мир, 1983. – 520 с.
3. *Малицький Д.В.* Основні принципи розв'язання динамічної задачі сейсмології на основі рекурентного підходу / Д.В. Малицький // Геофіз. журн. – 1998. – № 5. – С. 96–98.

4. Малицький Д. В. Рекуррентный метод решения обратной динамической задачи сейсморазведки в вертикально-неоднородной среде / Д.В. Малицький // Геофиз. журн. – 1994. – Т. 16. – № 3.
5. Малицький Д. В. Про джерело сейсмічних хвиль / Д.В. Малицький // Геофиз. журн. – 2005. – Т. 27. – № 2. – С. 304–308.
6. Малицький Д.В. Про застосування матричного методу і його модифікацій для дослідження поширення сейсмічних хвиль у шаруватому середовищі // Теоретичні та прикладні аспекти геоінформатики / Д.В. Малицький, О.О. Муйла – К., 2007. – С. 124–136.
7. Малицький Д.В. Аналітично-числові підходи до обчислення часової залежності компонент тензора сейсмічного моменту / Д.В. Малицький // Геоінформатика. – 2010. – Т. 1. – С. 79–86.

*Стаття: надійшла до редакції 08.06.2012
доопрацьована 17.09.2012
прийнята до друку 10.10.2012*

THE MATHEMATICS MODELLING IN SEISMOLOGY PROBLEMS

D. Malytskyi¹, V. Fourman²

¹*Carpathians branch of Institute of geophysics the name S.I. Subbotin of NAS Ukraine,
Naukova Street, 3-a, Lvov, Ukraine,
e-mail: dmytro@cb-igph.lviv.ua*

²*Ivan Franko National University of Lviv,
geological faculty, department of physics of the Earth,
Hrushevskij Street, 4, 79005, Lviv, Ukraine,
e-mail: fourman@franko.lviv.ua*

The solution of the direct problem for the displacement field on the free surface of layered isotropic medium using the matrix method is presented. The results of the direct problem are used to form the seismic moment tensor. The source time function of an earthquake is considered.

Key words: seismic field, seismic moment tensor, hearth of earthquake, isotropic environment.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ СЕЙСМОЛОГИИ

Д. Малицкий¹, В. Фурман²

¹*Карпатское отделение Института геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины,
улица Научная, 3-б, Львов, Украина,
e-mail: dmytro@cb-igph.lviv.ua*

²*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
геологический факультет, кафедра физики Земли,
улица Грушевского, 4, 79005, Львов, Украина,
e-mail: fourman@franko.lviv.ua*

Представлено решения прямой задачи для поля перемещений на свободной поверхности слоистой изотропной среды с использованием матричного метода. Результаты прямой задачи использовано для определения тензора сейсмического момента. Введено временную функцию очага землетрясения.

Ключевые слова: сейсмическое поле, тензор сейсмического момента, очаг землетрясения, изотропная среда.