

УДК 517.977

**О. Б. Мокін, д. т. н., проф.; В. Б. Мокін, д. т. н., проф.;**  
**Б. І. Мокін, акад. НАПН України, д. т. н., проф.; І. О. Чернова**

## МЕТОД ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПРОЦЕСІВ У БАГАТОВИМІРНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТАХ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ЛІНЕАРИЗАЦІЮ, МАТЕМАТИЧНИМИ МОДЕЛЯМИ НЕ ВИЩЕ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ, ЕКВІВАЛЕНТНИМИ ЗА ЧАСТОТОЮ ЗРІЗУ

*Запропоновано метод ідентифікації процесів у багатовимірних динамічних об'єктах, що допускають лінеаризацію і працюють у режимі прямої передачі сигналу, математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за частотою зрізу. Алгоритм методу ґрунтується на системі рівнянь, одна частина яких синтезується з урахуванням граничних умов, що задаються частотою зрізу, а інша частина синтезується за стандартною процедурою методу найменших квадратів відносно логарифмічних частотних характеристик.*

**Ключові слова:** динамічна система, математична модель, частота зрізу, диференціальне рівняння, еквівалентування, метод найменших квадратів.

### Постановка завдання й вихідні передумови

У роботі [1] визначено умови, за яких процеси в динамічних об'єктах, що допускають лінеаризацію та описуються диференціальними рівняннями високих порядків, тобто диференціальними рівняннями, що мають вигляд

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = Kx, \quad n > 3, \quad (1)$$

у діапазоні зміни координат руху можна еквівалентно (без внесення суттєвих похибок) описувати диференціальними рівняннями з порядком, не вищим третього, тобто диференціальними рівняннями, що мають вигляд

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_3 x, \quad (2)$$

або вигляд

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_2 x, \quad (3)$$

чи навіть вигляд

$$a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_1 x. \quad (4)$$

Ці умови зводяться до того, що лише для тих динамічних об'єктів, під час подачі на вхід яких одиничного вхідного сигналу

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (5)$$

для їхньої реакції  $y(t)$  є справедливими вирази:

$$y'(0) \neq 0, \quad (6)$$

$$y''(t) \neq 0, \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (7)$$

у якості еквівалентної моделі можна використовувати диференціальні рівняння вигляду (4).

Якщо ж для реакції  $y(t)$  динамічного об'єкта є справедливими вирази:

$$y'(0) = 0 \quad (8)$$

$$y''(t_n) = 0, \quad t_n \in [0, \infty), \quad (9)$$

то в якості еквівалентної моделі можна використовувати диференціальні рівняння вигляду (3). А якщо для реакції  $y(t)$  динамічного об'єкта є справедливими вирази (6) і (9), то в якості еквівалентної моделі можна використовувати диференціальні рівняння вигляду (2).

У тій же роботі [1] показано, що для синтезу еквівалентних моделей багатовимірних динамічних об'єктів у класах рівнянь (2) – (4) умови (6) – (9) є необхідними, але не достатніми, і визначено достатні умови еквівалентування динамічних об'єктів із використанням їхніх логарифмічних частотних характеристик — амплітудної (ЛАЧХ)  $L(\omega)$  та фазової (ЛФЧХ)  $\varphi(\omega)$  [2], які для динамічного об'єкта, рух якого в загальному вигляді описують диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку (1), орієнтовно можна представити так, як показано на рис. 1.

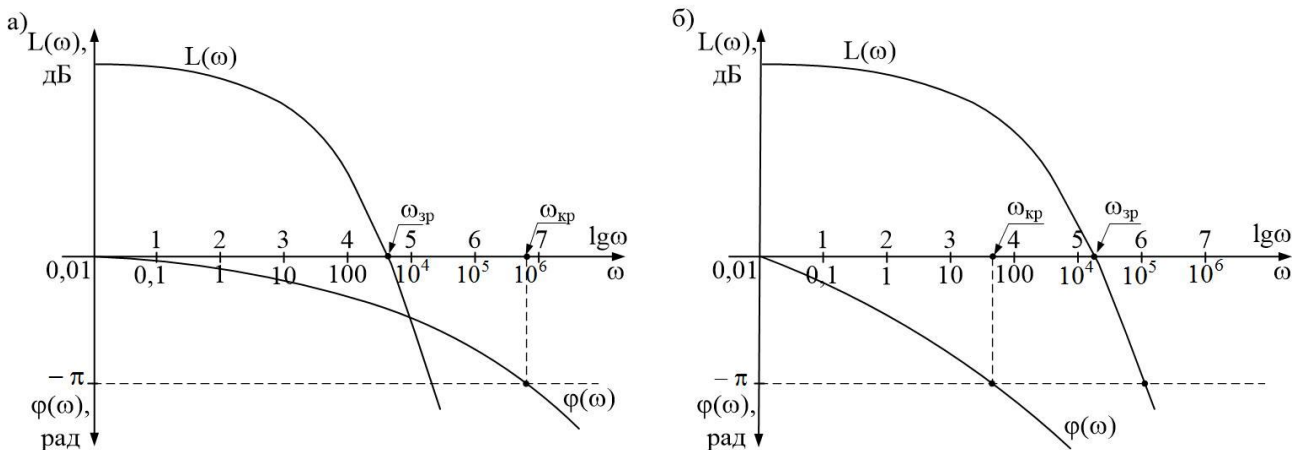


Рис. 1. Орієнтовні графіки ЛАЧХ та ЛФЧХ динамічного об'єкта  $n$ -го порядку

Нагадаємо про те, що, перетворюючи диференціальні рівняння (1) – (4) за Лапласом [2], можемо перейти до їхніх еквівалентів на комплексній площині — передаточних функцій — у вигляді:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{K}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}, \quad (10)$$

$$W_1(p) = \frac{K_1}{a_1 p + 1}, \quad (11)$$

$$W_2(p) = \frac{K_2}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \quad (12)$$

$$W_3(p) = \frac{K_3}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \quad (13)$$

для яких справедливо:

$$W_i(j\omega) = W_i(p) \Big|_{p=j\omega} = R_i(\omega) + jQ_i(\omega) = A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (14)$$

$$A_i(\omega) = \sqrt{R_i^2(\omega) + Q_i^2(\omega)}, \quad \varphi_i(\omega) = \arctg \frac{Q_i(\omega)}{R_i(\omega)}, \quad (15)$$

$$L_i(\omega) = 20 \lg A_i(\omega). \quad (16)$$

Нагадаємо також про те, що у виразах (16) для ЛАЧХ і ЛФЧХ прирости кругової частоти  $\omega$  відкладаються на частотній осі в декадах.

Як відомо з роботи [2], для ЛАЧХ і ЛФЧХ є характерними дві частоти — частота зрізу  $\omega_{зр}$  та критична частота  $\omega_{кр}$ , які знаходять із рівнянь:

$$L(\omega_{зр}) = 0, \quad (17)$$

$$\varphi(\omega_{кр}) = -\pi \quad (18)$$

та мають графічну інтерпретацію, представлену на рис. 1.

Згідно з критерієм Найквіста [2], якщо, як показано на рис. 1а, для стійкого динамічного об'єкта виконується умова

$$\omega_{зр} < \omega_{кр}, \quad (19)$$

тоді він залишається стійким і після замикання його одиничним від'ємним зворотним зв'язком. Тобто в такому об'єкті характер процесів до його замикання одиничним від'ємним зворотним зв'язком і після замикання не змінюється.

Якщо для динамічного об'єкта, стійкого в розімкненому стані, виконується умова (див. рис. 1б),

$$\omega_{зр} > \omega_{кр}, \quad (20)$$

то він стає нестійким після замикання його одиничним від'ємним зворотним зв'язком. Тобто у такому об'єкті характер процесів до його замикання одиничним від'ємним зворотним зв'язком і після замикання змінюється.

Тож лише у разі виконання умови (19) для багатовимірною динамічного об'єкта можна використовувати для описання процесів у ньому еквівалентні моделі у вигляді (3) і (4), оскільки для першої із них, як відомо [2], справедливою є нерівність

$$\varphi_1(\omega) > -\frac{\pi}{2}, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (21)$$

а для другої із них справедливою є нерівність

$$\varphi_2(\omega) > -\pi, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (22)$$

Якщо ж для багатовимірною динамічного об'єкта виконується умова (20), то для описання процесів у ньому не можна використовувати еквівалентні моделі (3), (4), а необхідно використовувати еквівалентну модель (2), оскільки лише для неї справедливою є система нерівностей

$$\begin{aligned} \varphi_3(\omega) &\geq -\pi, & \forall \omega \in [0, \omega_{кр}], \\ \varphi_3(\omega) &< -\pi, & \forall \omega \in (\omega_{кр}, \infty), \end{aligned} \quad (23)$$

з якою збігається нерівність (20) в околі критичної частоти  $\omega_{кр}$ .

Із рис. 1 видно, що для динамічного об'єкта  $n$ -го порядку справедливою є система нерівностей

$$\begin{aligned} L(\omega) &\geq 0, & \forall \omega \in [0, \omega_{zp}], \\ L(\omega) &< 0, & \forall \omega \in (\omega_{zp}, \infty). \end{aligned} \quad (24)$$

Верхня нерівність із системи (24) свідчить про те, що на частотах до частоти зрізу динамічний об'єкт веде себе як підсилувач, для якого є справедливою нерівність

$$A(\omega) \geq 1, \quad (25)$$

а нижня нерівність із системи (24) свідчить про те, що за значень частоти, більшої частоти зрізу, динамічний об'єкт веде себе як фільтр, для якого є справедливою нерівність

$$A(\omega) < 1. \quad (26)$$

Із вищевикладеного випливає, що під час синтезу еквівалентної математичної моделі для багатовимірного динамічного об'єкта, який функціонує в режимі перетворювача вхідного сигналу у вихідний без необхідності його замикання одиничним від'ємним зворотним зв'язком, обов'язково необхідно враховувати умови (25), (26). А під час синтезу еквівалентної математичної моделі для багатовимірного динамічного об'єкта, керування яким здійснюватиметься з використанням одиничного від'ємного зворотного зв'язку, обов'язково необхідно враховувати умови (20), (23).

У цій статті ми представляємо метод синтезу еквівалентної математичної моделі для багатовимірного динамічного об'єкта, який функціонує в режимі перетворювача вхідного сигналу у вихідний, а метод синтезу еквівалентної математичної моделі для багатовимірного динамічного об'єкта, керування яким здійснюватиметься з використанням одиничного від'ємного зворотного зв'язку, буде представлений у нашій наступній статті.

### Розв'язання поставленої задачі

Оскільки для багатовимірного динамічного об'єкта, що функціонує в режимі передачі сигналу зі входу на вихід, під час його еквівалентування необхідно забезпечити однаковість характеру розв'язків основної математичної моделі (1) та еквівалентної моделі із множини (2) – (4), якими ми описуватимемо процеси в цьому об'єкті як у частотній області підсилення сигналів, так і в частотній області їхньої фільтрації, то і графіки ЛАЧХ  $L(\omega)$  основної моделі (1), і графіки асимптотичних ЛАЧХ  $L_1(\omega)$ ,  $L_2(\omega)$ ,  $L_3(\omega)$  еквівалентних моделей (2) – (4) повинні починатися з однієї і тієї ж точки за найменшого початкового значення  $\omega_n$  частоти  $\omega$ , у якій

$$L(\omega_n) = L_1(\omega_n) = L_2(\omega_n) = L_3(\omega_n), \quad (27)$$

і проходити через одну й ту ж точку на частоті зрізу  $\omega_{zp}$ , тобто мати орієнтовний вигляд, показаний на рис. 2.

Для подальшого розв'язання задачі вважатимемо, що в нас є можливість подати на вхід динамічного об'єкта, еквівалентну математичну модель якого ми синтезуємо, одиничний сходиноквий сигнал (5), реакція на який дозволяє визначити, які з вимог (6) – (9) виконуються, і є можливість експериментально зняти амплітудну  $A(\omega)$  та фазову  $\varphi(\omega)$  частотні характеристики об'єкта у вигляді послідовностей  $A(\omega_s)$ ,  $\varphi(\omega_s)$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$  за допомогою стандартного комплексу приладів, що серійно випускають і який складається з генератора синусоїдальних сигналів, подвійного пікового вольтметра та частотоміра-фазометра та доповнюється пристроями спряження цих приладів зі входом і виходом динамічного об'єкта. А до логарифмічних частотних характеристик об'єкта нам допомагають перейти співвідношення (16). Тож, маючи ЛАЧХ  $L(\omega)$ , за допомогою співвідношення (17) ми легко знаходимо частоту зрізу  $\omega_{zp}$  динамічного об'єкта.

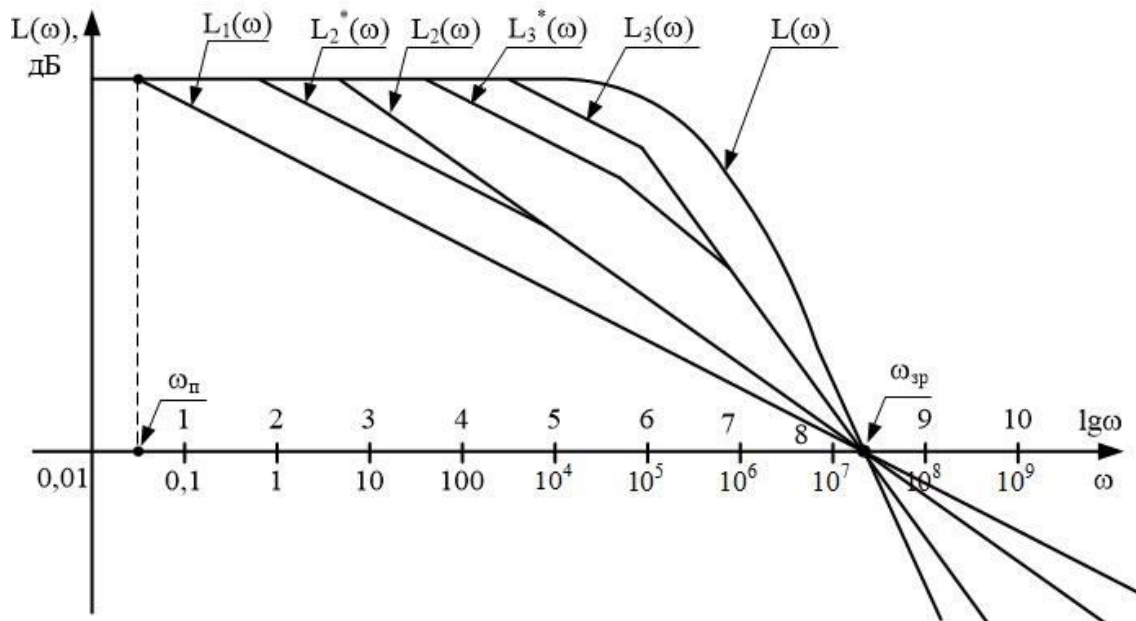


Рис. 2. Орієнтовний вигляд графіка ЛАЧХ основної моделі багатовимірного динамічного об'єкта та графіків асимптотичних ЛАЧХ його еквівалентних моделей

Як відомо з теорії автоматичного керування [2] і показано на рис. 2, графік асимптотичної ЛАЧХ  $L_1(\omega)$  математичної моделі першого порядку має лише два прямолінійних відрізки — початковий із нульовим нахилом і кінцевий з нахилом 20 дБ на декаду. Графік асимптотичної ЛАЧХ математичної моделі другого порядку має або два прямолінійних відрізки (якщо полюсами передаточної функції (12) є пара комплексно спряжених чисел), перший із яких має нульовий нахил, а другий має нахил 40 дБ на декаду — це графік  $L_2(\omega)$  на рис. 2, або три прямолінійних відрізки (якщо полюсами передаточної функції (12) є пара дійсних від'ємних чисел), перший із яких має нульовий нахил, другий має нахил 20 дБ на декаду, а третій — нахил 40 дБ на декаду (це графік  $L_2^*(\omega)$  на рис. 2). Графік асимптотичної ЛАЧХ математичної моделі третього порядку має або три прямолінійних відрізки (якщо полюсами передаточної функції (13) є одне дійсне від'ємне число і два комплексно спряжених чисел), перший із яких має нульовий нахил, другий має нахил 20 дБ на декаду (або 40 дБ на декаду), а третій має нахил 60 дБ на декаду (це графік  $L_3(\omega)$  на рис. 2), або чотири прямолінійних відрізки (якщо полюсами передаточної функції (13) є три дійсні від'ємні числа), перший із яких має нульовий нахил, другий має нахил 20 дБ на декаду, третій має нахил 40 дБ на декаду, а четвертий має нахил 60 дБ на декаду (це графік  $L_3^*(\omega)$  на рис. 2). Із цього всього запам'ятемо лише те, що нахил останнього прямолінійного відрізка графіка асимптотичної ЛАЧХ, який перетинає частотну вісь у точці  $\omega_{zp}$  для об'єкта з моделлю 1-го порядку (4) дорівнює 20 дБ на декаду, для об'єкта з моделлю 2-го порядку (3) дорівнює 40 дБ на декаду, а для об'єкта 3-го порядку (2) дорівнює 60 дБ на декаду.

А далі, скориставшись виразами (11) – (16), знайдемо, що

$$\begin{aligned} L_1(\omega) &= 20 \lg A_1(\omega) = 20 \lg K_1 - 10 \lg(1 + a_1^2 \omega^2), \\ \varphi_1(\omega) &= -\arctg(a_1 \omega); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} L_2(\omega) &= 20 \lg A_2(\omega) = 20 \lg K_2 - 10 \lg[(1 - a_2 \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2], \\ \varphi_2(\omega) &= -\arctg \frac{a_1 \omega}{1 - a_2 \omega^2}; \end{aligned} \quad (29)$$

$$L_3(\omega) = 20 \lg A_3(\omega) = 20 \lg K_3 - 10 \lg \left[ (1 - a_2 \omega^2)^2 + (a_1 \omega - a_3 \omega^3)^2 \right],$$

$$\varphi_3(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{a_1 \omega - a_3 \omega^3}{1 - a_2 \omega^2}. \quad (30)$$

Згідно із загальноприйнятим підходом у теорії ідентифікації [3] в якості критеріїв еквівалентування в нашій задачі ми теж скористаємося стандартними критеріями найменших квадратів у нашому випадку відносно експериментально знятої ЛАЧХ багатовимірного об'єкта  $L(\omega_s)$ ,  $s=1, 2, \dots, N$  та ЛАЧХ еквівалентних моделей  $L_1(\omega)$ ,  $L_2(\omega)$ ,  $L_3(\omega)$ , тобто скористаємося функціоналами:

$$\Sigma_1 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - L_1(\omega_s))^2, \quad (31)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - L_2(\omega_s))^2, \quad (32)$$

$$\Sigma_3 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - L_3(\omega_s))^2, \quad (33)$$

підставляючи в які вирази для  $L_1(\omega)$ ,  $L_2(\omega)$ ,  $L_3(\omega)$ , взяті із співвідношень (28) – (30), матимемо:

$$\Sigma_1 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - 20 \lg K_1 + 10 \lg(1 + a_1^2 \omega_s^2))^2, \quad (34)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - 20 \lg K_2 + 10 \lg((1 - a_2 \omega_s^2)^2 + a_1^2 \omega_s^2))^2, \quad (35)$$

$$\Sigma_3 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - 20 \lg K_3 + 10 \lg((1 - a_2 \omega_s^2)^2 + (a_1 \omega_s - a_3 \omega_s^3)^2))^2. \quad (36)$$

Далі згідно зі стандартною процедурою метода найменших квадратів у разі, якщо ми в якості еквівалентної математичної моделі вибираємо диференціальне рівняння (4), то повинні були б узяти частинні похідні від  $\Sigma_1$  за невідомими коефіцієнтами  $K_1$ ,  $a_1$ , прирівняти ці похідні до нуля і, розв'язавши отриману систему двох рівнянь відносно двох невідомих  $K_1$ ,  $a_1$ , отримати числові значення цих двох невідомих коефіцієнтів.

Аналогічно в разі, якщо ми в якості еквівалентної математичної моделі вибираємо диференціальне рівняння (3), то повинні були б узяти частинні похідні від  $\Sigma_2$  за невідомими коефіцієнтами  $K_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , прирівняти ці похідні до нуля і, розв'язавши отриману систему трьох рівнянь відносно трьох невідомих  $K_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , отримати числові значення цих невідомих коефіцієнтів.

А якщо ми в якості еквівалентної математичної моделі вибираємо диференціальне рівняння (2), то повинні були б узяти частинні похідні від  $\Sigma_3$  за невідомими коефіцієнтами  $K_3$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , прирівняти ці похідні до нуля і, розв'язавши отриману систему чотирьох рівнянь відносно чотирьох невідомих  $K_3$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , отримати числові значення цих невідомих коефіцієнтів.

Але якщо ми так вчинимо, то отримаємо моделі процесів у динамічних об'єктах, розв'язки яких наблизатимуться до реальних процесів у середньому квадратичному, не збігаючись зі значеннями реальних процесів на кінцях діапазонів, які в частотній області

задаватимуться частотами  $\omega_n$  та  $\omega_{zp}$  і для яких повинні виконуватися вимоги (17) та (27), які під час еквівалентування повинні виконуватись обов'язково.

Тож виходить, що під час еквівалентування математичної моделі багатовимірного динамічного об'єкта математичною моделлю (4), що містить лише два невідомих параметри  $K_1$ ,  $a_1$ , для їх визначення потрібно мати систему лише із двох рівнянь, яку можна побудувати й без узяття частинних похідних від виразу (34), а скориставшись граничними умовами (17), (27), адже із (27) через малість  $\omega_n$  витікає, що

$$L(\omega_n) = 20 \lg K_1, \quad (37)$$

а із (17) витікає, що

$$20 \lg K_1 - 20 \lg a_1 - 20 \lg \omega_{zp} = 0. \quad (38)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (37), (38), матимемо:

$$K_1 = 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}, \quad a_1 = \frac{1}{\omega_{zp}} 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}. \quad (39)$$

Однак під час еквівалентування математичної моделі багатовимірного динамічного об'єкта математичною моделлю (3), що містить три невідомих параметри  $K_1$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , для їх визначення потрібно мати систему із трьох рівнянь, яку побудувати, скориставшись лише граничними умовами (17), (27), уже не вдасться, оскільки ці граничні умови дають нам лише два рівняння, а саме:

$$L(\omega_n) = 20 \lg K_2, \quad (40)$$

$$20 \lg K_2 - 20 \lg a_2 - 40 \lg \omega_{zp} = 0, \quad (41)$$

із яких матимемо:

$$K_2 = 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}, \quad a_2 = \frac{1}{\omega_{zp}^2} 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}. \quad (42)$$

А що ж до третього невідомого параметра  $a_1$ , то в цьому разі для його визначення вже необхідно брати частинну похідну за ним від виразу (35) і отримувати, прирівнявши цю похідну до нуля, у доповнення до рівнянь (42) ще й третє рівняння —

$$\sum_{i=1}^N \left[ L(\omega_i) - \lg \frac{10K_2^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_i^2 + a_2^2\omega_i^4} \right] \frac{\omega_i^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_i^2 + a_2^2\omega_i^4} = 0 \quad (43)$$

нелінійне, але з одним невідомим  $a_1$ , для розв'язання якого, наприклад, у пакеті прикладних програм Mathcad, закладено стандартну процедуру.

Що ж до еквівалентування математичної моделі багатовимірного динамічного об'єкта математичною моделлю (2), що містить чотири невідомих параметри  $K_1$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , то для їх визначення потрібно мати систему із чотирьох рівнянь, яку побудувати, скориставшись лише граничними умовами (17), (27), теж не вдасться, оскільки ці граничні умови дають нам лише два рівняння, а саме:

$$L(\omega_n) = 20 \lg K_3, \quad (44)$$

$$20 \lg K_3 - 20 \lg a_3 - 60 \lg \omega_{zp} = 0, \quad (45)$$

із яких матимемо:

$$K_3 = 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}, \quad a_3 = \frac{1}{\omega_{3p}^3} 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}. \quad (46)$$

А що ж до ще двох невідомих параметрів  $a_1, a_2$ , то в цьому разі для їх визначення вже необхідно брати дві частинні похідні за ними від виразу (36) й отримувати, прирівнявши ці похідні до нуля, у доповнення до рівнянь (46) ще два рівняння:

$$\sum_{s=1}^N \left\{ \left[ L(\omega_s) - \lg \frac{10K_3^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} \right] \cdot \frac{a_1\omega_s^2 - a_3\omega_s^4}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} \right\} = 0, \quad (47)$$

$$\sum_{s=1}^N \left[ L(\omega_s) - \lg \frac{10K_3^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} \right] \frac{\omega_s^2 - a_2\omega_s^4}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} = 0, \quad (48)$$

розв'язавши які як систему двох нелінійних рівнянь з двома невідомими за стандартною процедурою в пакеті прикладних програм Mathcad ми й отримаємо в доповнення до вже знайдених раніше за виразами (46) чисельних значень параметрів  $K_3, a_3$  також і чисельні значення параметрів  $a_1, a_2$ .

Але визначенням повної множини параметрів еквівалентних моделей (2), (3) чи (4) не завершується процедура синтезу еквівалентної математичної моделі багатовимірного динамічного об'єкта, адже потрібно оцінити ще й похибку еквівалентування, до процедури побудови методики визначення якої ми й перейдемо.

### Оцінювання похибки еквівалентування

Як видно з рис. 3, похибку еквівалентування моделями (2) – (4) багатовимірного динамічного об'єкта в частотній області можна записати так:

$$\begin{aligned} \Delta Y_i(j\omega) &= Y(j\omega) - Y_i(j\omega) = W(j\omega)X(j\omega) - W_i(j\omega)X(j\omega) = \\ &= (W(j\omega) - W_i(j\omega))X(j\omega) = W_{\Delta i}(j\omega)X(j\omega), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (49)$$

де АФЧХ динамічного об'єкта за похибкою еквівалентування  $W_{\Delta i}(j\omega)$  може бути представленою й так:

$$\begin{aligned} W_{\Delta i}(j\omega) &= W(j\omega) - W_i(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} - A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)} = \\ &= [A(\omega)\cos\varphi(\omega) - A_i(\omega)\cos\varphi_i(\omega)] + j[A(\omega)\sin\varphi(\omega) - A_i(\omega)\sin\varphi_i(\omega)] = A_{\Delta i}(\omega)e^{j\varphi_{\Delta i}(\omega)}, \quad (50) \\ & \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

де амплітудна частотна характеристика (АЧХ) динамічного об'єкта за похибкою еквівалентування — це:

$$A_{\Delta i}(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + A_i^2(\omega) - 2A(\omega)A_i(\omega)\cos(\varphi(\omega) - \varphi_i(\omega))}, \quad (51)$$

а фазова частотна характеристика (ФЧХ) — це:

$$\varphi_{\Delta i} = \arctg \frac{A(\omega)\sin\varphi(\omega) - A_i(\omega)\sin\varphi_i(\omega)}{A(\omega)\cos\varphi(\omega) - A_i(\omega)\cos\varphi_i(\omega)}. \quad (52)$$



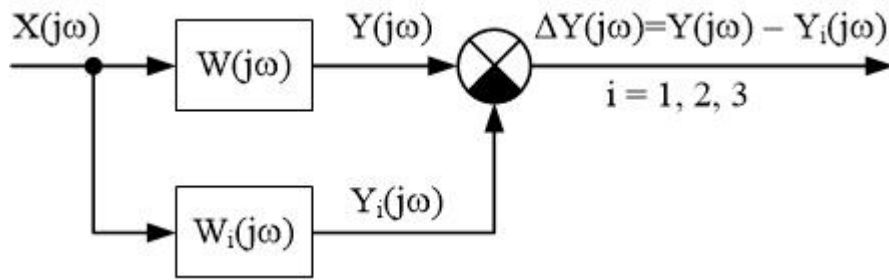


Рис. 3. Структурна схема формування похибки еквівалентування багатовимірного динамічного об'єкта

Якщо у виразі (49) задати всі комплексні величини в показниковій формі, то отримаємо вираз —

$$\Delta Y_i(\omega) e^{j\varphi_{\Delta Y_i}(\omega)} = A_{\Delta i}(\omega) X(\omega) e^{j(\varphi_{\Delta i}(\omega) + \varphi_X(\omega))}, \quad (53)$$

із якого витікає, що АЧХ динамічного об'єкта за похибкою еквівалентування  $\Delta Y_i(\omega)$  дорівнюватиме —

$$\Delta Y_i(\omega) = A_{\Delta i}(\omega) X(\omega), \quad (54)$$

де  $X(\omega)$  — АЧХ вхідного сигналу динамічного об'єкта.

Як відомо [4], використовуючи рівність Парсеваля, середній квадрат похибки  $\overline{\Delta y_i(t)}$ , який характеризує її середню потужність, можна визначити з виразу:

$$\overline{\Delta y_i(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\Delta Y_i(\omega)]^2 d\omega, \quad (55)$$

підставляючи в який вираз (54) та замінюючи інтеграл сумою значень у точках дискретизації спектра, отримаємо:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta y_i(t)} &\approx \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A_{\Delta i}(\omega_s) X(\omega_s)]^2 = \\ &= \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A^2(\omega_s) + A_i^2(\omega_s) - 2A(\omega_s)A_i(\omega_s) \cos(\varphi(\omega_s) - \varphi_i(\omega_s))] X^2(\omega_s), \end{aligned} \quad (56)$$

де  $\Delta\omega$  — інтервал дискретизації за частотою в логарифмічному масштабі,  $\omega_{\max}$  — верхня частота смуги пропускання динамічного об'єкта, а кількість дискрет  $m$  знаходять із виразу:

$$m = \frac{\omega_{\max} - \omega_n}{\Delta\omega}. \quad (57)$$

Найбільшою середня похибка  $\overline{\Delta y_i(t)}$  буде під час відпрацювання динамічним об'єктом стрибкоподібного вхідного сигналу (5), для якого

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (58)$$

Підставляючи  $X(\omega)$  із (58) у (56), матимемо:

$$\overline{\Delta y_i(t)} \approx \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A_{\Delta i}(\omega_s) X(\omega_s)]^2 =$$

$$= \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m \left[ A^2(\omega_s) + A_i^2(\omega_s) - 2A(\omega_s)A_i(\omega_s) \cos(\varphi(\omega_s) - \varphi_i(\omega_s)) \right] \frac{1}{\omega_s^2}. \quad (59)$$

За аналогією з виразами (55), (56), (58) та (59) середню потужність  $\overline{y(t)}$  вихідного сигналу  $y(t)$  динамічного об'єкта як його реакцію на вхідний одиничний сигнал (5) можна представити у вигляді —

$$\overline{y(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [Y(\omega)]^2 d\omega \approx \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A(\omega_s)X(\omega_s)]^2 = \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m A^2(\omega_s) \frac{1}{\omega_s^2}. \quad (60)$$

З урахуванням виразів (59) і (60) відносний середній квадрат похибки еквівалентування  $\delta y_i(t)$ , виражений у процентах, можна представити у вигляді —

$$\overline{\delta y_i(t)} = \frac{\overline{\Delta y_i(t)}}{\overline{y(t)}} 100\%, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (61)$$

Розраховуючи за виразом (61) з урахуванням виразів (59) і (60) відносний середній квадрат похибки еквівалентування, ми і прийматимемо рішення задовольняє нас вибрана еквівалентна модель багатовимірного динамічного об'єкта чи ні.

### Висновки

1. Запропоновано метод ідентифікації процесів у багатовимірних динамічних об'єктах, що допускають лінеаризацію і працюють у режимі прямої передачі сигналу, математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за частотою зрізу.

2. Алгоритм методу ґрунтується на системі рівнянь, одна частина яких синтезується з урахуванням граничних умов, що задаються частотою зрізу, а інша частина синтезується за стандартною процедурою методу найменших квадратів відносно логарифмічних частотних характеристик.

3. У якості критерію можливості еквівалентування багатовимірного динамічного об'єкта вибраною еквівалентною математичною моделлю запропоновано використовувати відносний середній квадрат похибки еквівалентування, для якого отримано обчислювальну форму.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мокін О. Б. Визначення умов, за яких рух динамічних об'єктів з порядком математичних моделей, вищим трьох, можна описувати еквівалентними моделями з порядком, не вищим трьох / О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2014. — №4. — С. 7 – 15.
2. Макаров И. М. Линейные автоматические системы / И. М. Макаров, Б. М. Менский. — М.: Машиностроение, 1977. — 464 с.
3. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации / Цыпкин Я. З. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
4. Бабак В. П. Обробка сигналів / В. П. Бабак, В. С. Хандецький, Е. Шрюфер. — К.: Либідь, 1999. — 496 с.

**Мокін Олександр Борисович** – д. т. н., професор, завідувач кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів (ВЕТЕСК), e-mail: abmokin@gmail.com.

**Мокін Віталій Борисович** – д. т. н., професор, завідувач кафедри комп'ютерного еколого-економічного моніторингу та інженерної графіки, e-mail: vbmokin@gmail.com.

**Мокін Борис Іванович** – акад. Національної АПН України, д. т. н., проф., професор кафедри ВЕТЕСК.

**Чернова Ірина Олександрівна** – інженер науково-дослідної частини.  
Вінницький національний технічний університет.

**O. B. Mokin, Dr. Sc. (Eng.), Prof.; V. B. Mokin, Dr. Sc. (Eng.), Prof.;**  
**B. I. Mokin, Acad. NAPSU, Dr. Sc. (Eng.), Prof.; I. O. Chernova**

## **METHOD OF PROCESSES IDENTIFICATION IN MULTIDIMENSIONAL DYNAMIC OBJECTS, PERMITTING LINEARIZATION, BY NOT HIGHER THAN THIRD ORDER MATHEMATICAL MODELS, EQUIVALENT BY THE CUT-OFF FREQUENCY**

*Method of processes identification in multidimensional dynamic objects, permitting linearization and operating in direct signal transmission mode, by mathematical models of not higher than third order, equivalent by the cut-off frequency is suggested. Algorithm of the method is based on the system of equations, one part of which is synthesized, taking into account limiting conditions, set by cut-off frequency, and the second part is synthesized by the standard procedure of the method of least squares relatively logarithmic frequency characteristics.*

**Key words:** dynamic system, mathematic model, cut frequency, differential, making equivalent, method of least squares.

### **Problem set-up and initial preconditions**

In [1] conditions are determined, under which processes in dynamic objects, permitting linearization and described by differential equations of high orders, i. e., differential equations, having the form

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = Kx, \quad n > 3, \quad (1)$$

in the range of motion coordinates change can equivalently (without introducing substantial errors) be described by means of differential equations of the order, not greater than third, i. e. differential equations that have the form

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_3 x \quad (2)$$

or form

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_2 x, \quad (3)$$

or even the form

$$a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_1 x \quad (4)$$

These conditions are the following: only for these dynamic objects, when single input signal is sent to their input

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (5)$$

for their reaction  $y(t)$  expressions are valid:

$$y'(0) \neq 0, \quad (6)$$

$$y''(t) \neq 0, \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (7)$$

as equivalent model differential equation of the form (4) can be used.

If for  $y(t)$  reaction of the dynamic objects the expressions are valid:

$$y'(0) = 0 \quad (8)$$

$$y''(t_n) = 0, \quad t_n \in [0, \infty), \quad (9)$$

then as the equivalent model differential equations of the form (3) can be used. And if for  $y(t)$  reaction of the dynamic object expressions (6) and (9) are valid, then as the equivalent model differential equation of the form (2) can be used.

In the same research [1] it is shown, that for the synthesis of the equivalent models of multidimensional dynamic objects in the classes of equations (2 – 4) conditions (6 – 9) are necessary but not sufficient and sufficient conditions of equalization of dynamic objects, using their logarithmic frequency characteristics — amplitude (LAFC)  $L(\omega)$  and phase (LPFC)  $\varphi(\omega)$  [2] which for dynamic object, motion of which in general form is described by differential equation of the  $n^{\text{th}}$  order (1) approximately may be presented as it is shown in Fig. 1.

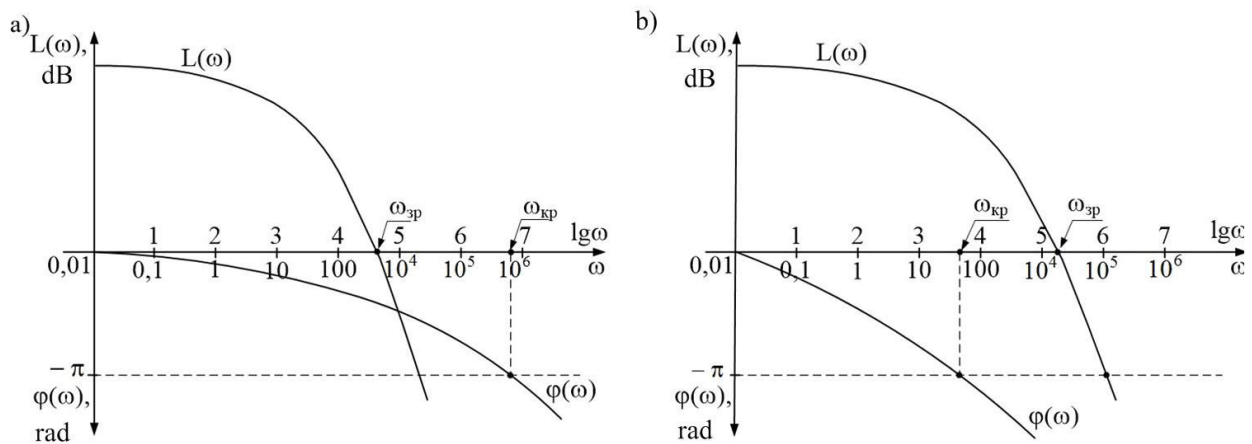


Fig. 1. Approximate LAFC and LPFC graphs of dynamic object of  $n^{\text{th}}$  order

It should be noted, that transforming differential equations (1 – 4) by Laplace transform [2], we may pass to their equivalents on the complex plane – transfer functions – in the form:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{K}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}, \quad (10)$$

$$W_1(p) = \frac{K_1}{a_1 p + 1}, \quad (11)$$

$$W_2(p) = \frac{K_2}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \quad (12)$$

$$W_3(p) = \frac{K_3}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \quad (13)$$

for which it is valid:

$$W_i(j\omega) = W_i(p) \Big|_{p=j\omega} = R_i(\omega) + jQ_i(\omega) = A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (14)$$

$$A_i(\omega) = \sqrt{R_i^2(\omega) + Q_i^2(\omega)}, \quad \varphi_i(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q_i(\omega)}{R_i(\omega)}, \quad (15)$$

$$L_i(\omega) = 20 \lg A_i(\omega), \quad (16)$$

It should be remembered that in the expressions (16) for LAFC and LPFC the increments of angular velocity  $\omega$  are laid off on frequency axis in decades.

As it is known from [2], for LAFC and LPFC two frequencies are characteristic — frequency of the cut-off  $\omega_c$  and critical frequency  $\omega_{cr}$ , found from the equations:

$$L(\omega_c) = 0, \quad (17)$$

$$\varphi(\omega_{cr}) = -\pi \quad (18)$$

and have geographical interpretation, shown in Fig. 1.

According to Nyquists criterion [2], if, as it is shown in Fig. 1a, for stable dynamic object the condition is satisfied

$$\omega_c < \omega_{cr}, \quad (19)$$

then it remains stable after closing it by a single negative feedback. That is, in such an object the character of processes to its closing by a single negative feedback and after closing does not change.

If for dynamic object, stable in open state, the condition is satisfied (see Fig. 1b),

$$\omega_c > \omega_{cr}, \quad (20)$$

then it becomes instable after closing it by a single negative feedback. That is, in such an object character of processes to its closing by a single negative feedback and after closing changes.

That is why if the condition (19) is satisfied for multidimensional dynamic object equivalent models in the form (3) and (4) can be used, as for the first of them, as it is known [2] inequality is valid

$$\varphi_1(\omega) > -\frac{\pi}{2}, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (21)$$

and for the second inequality is valid

$$\varphi_2(\omega) > -\pi, \quad \forall \omega \in [0, \infty) \quad (22)$$

If for multidimensional dynamic object the condition (20) is satisfied, then for the description of the processes taking place in it equivalent models (3), (4), cannot be used, but it is necessary to use the equivalent model (2), as the system of inequalities is valid for it

$$\begin{aligned} \varphi_3(\omega) &\geq -\pi, & \forall \omega \in [0, \omega_{cr}], \\ \varphi_3(\omega) &< -\pi, & \forall \omega \in (\omega_{cr}, \infty), \end{aligned} \quad (23)$$

with which an inequality (20) coincides near critical frequency  $\omega_{cr}$ .

From Fig. 1 it is seen that for dynamic object of  $n^{\text{th}}$  order the following system of inequalities is valid

$$\begin{aligned} L(\omega) &\geq 0, & \forall \omega \in [0, \omega_c], \\ L(\omega) &< 0, & \forall \omega \in (\omega_c, \infty). \end{aligned} \quad (24)$$

Upper inequality from the system (24) testifies that the dynamic object behaves as an amplifier on the frequencies up to the frequency of the cut-off, the following inequality is valid for it

$$A(\omega) \geq 1, \quad (25)$$

and lower inequality from the system (24) testifies that at the values of frequency, greater than frequencies of the cut, the dynamic object behaves like a filter, for which the following inequality is valid

$$A(\omega) < 1 \quad (26)$$

It follows from the above-mentioned, that while synthesis of the equivalent mathematical model for multidimensional dynamic object, which functions in the mode of input signal converter into output signal without the necessity of its closing by a single negative feedback, the conditions (25), (26) must be taken into account. While synthesis of the equivalent mathematical model for multidimensional dynamic object, control of which will be performed by means a single negative feedback, conditions (20), (23) must be taken into account.

In the given paper we present the method of equivalent mathematic model synthesis for multidimensional dynamic object, that functions in the mode of input signal converter into output signal, and the method of equivalent mathematical model synthesis for multidimensional dynamic object, the control over which will be performed using single negative feedback, we will present in our next paper.

### Solution of the set-up problem

As for multidimensional dynamic object, functioning in signal transmission mode from the input to output, while its equivalenting it is necessary to provide identical character of the main mathematical model solution (1) and equivalent model from the set (2 – 4), by which we will describe processes in this object, both in frequency region of signal amplification and in frequency region of their filtration, then the graphs of LAFC  $L(\omega)$  of the basic model (1) and graphs of asymptotic LAFC  $L_1(\omega)$ ,  $L_2(\omega)$ ,  $L_3(\omega)$  of the equivalent models (2) – (4) must start from one and the same point at the least initial value  $\omega_n$  of the frequency  $\omega$ , in which

$$L(\omega_n) = L_1(\omega_n) = L_2(\omega_n) = L_3(\omega_n), \quad (27)$$

and pass across one and the same point at the frequency cut  $\omega_c$ , i. e., have approximate form, shown in Fig. 2.

For further solution of the problem we will assume that we have the possibility to provide at the input of dynamic object equivalent mathematic model of which we synthesis, single stepwise signal (5), response to which allows us to determine, which of the requirements (6)–(9) are realized and there is a possibility to measure experimentally amplitude  $A(\omega)$  and phase  $\varphi(\omega)$  frequency characteristics of the object in the form of sequences  $A(\omega_s)$ ,  $\varphi(\omega_s)$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$  by means of standard set instruments, that comprises sinusoidal signals generator, double peak voltmeter, frequency meter-phase meter and is equipped with intercoupler devices with input and output of dynamic object. Relations (16) will help up to pass to logarithmic frequency characteristics of the object. That is why, having LAFC  $L(\omega)$ , by means of relation (17) we easily find cut-off frequency  $\omega_c$  of the dynamic object.

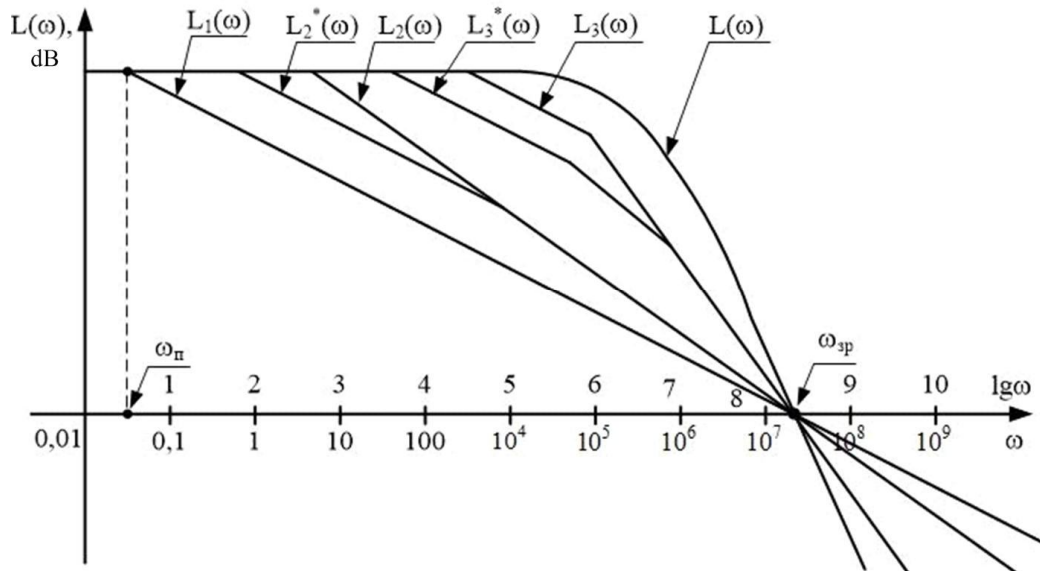


Fig. 2. Approximate view of LAFC graph of the basic model of multidimensional dynamic object and graphs of asymptotic LAFC of its equivalent models

As it is known from the theory of automatic control [2] and is shown in Fig. 2, the graph of asymptotic LAFC  $L_1(\omega)$  of mathematical model of the first order has only two straight line segments — initial with zero slope and final with 20 dB slope per decade. Graph of asymptotic LAFC of the second order mathematical model has either two straight line segments (if the poles of transfer function (12) is the pair of complex conjugate numbers), the first of which has zero slope, and the second one has the slope of 40 dB per decade — this is graph  $L_2(\omega)$  in Fig. 2 or three straight line segments (if the poles of transfer function (12) is the pair of real negative numbers), the first of which has zero slope, the second has 20 dB slope per decade and the third one has 40 dB slope per decade — this is graph  $L_2^*(\omega)$  in Fig. 2. The graph of asymptotic LAFC of the mathematical model of the third order has two or three straight line segments (if the poles of the transfer function (13) is one real negative number and two complex conjugate numbers) the first of which has zero slope, the second had 20 dB slope per decade (or 40 dB per decade) and the third has 60 dB slope per decade — this is graph  $L_3(\omega)$  in Fig. 2, or four straight line segments (if poles of the transfer function (13) are three real negative numbers), the first of which has zero slope, the second has 20 dB slope per decade, the third has 40 dB slope per decade, and the fourth has 60 dB slope per decade — this is graph  $L_3^*(\omega)$  in Fig. 2. We will only remember that the slope of the last straight line segment of asymptotic LAFC graph, crossing frequency axis in point  $\omega_c$  for the object with the first order model (4) equals 20 dB per decade, for the object with second order model (3) equals 40 dB per decade and for the third order object (2) equals 60 dB per decade.

Further, using the expressions (11) – (16), we will find that

$$\begin{aligned} L_1(\omega) &= 20 \lg A_1(\omega) = 20 \lg K_1 - 10 \lg(1 + a_1^2 \omega^2), \\ \varphi_1(\omega) &= -\arctg(a_1 \omega); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} L_2(\omega) &= 20 \lg A_2(\omega) = 20 \lg K_2 - 10 \lg[(1 - a_2 \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2] \\ \varphi_2(\omega) &= -\arctg \frac{a_1 \omega}{1 - a_2 \omega^2}; \end{aligned} \quad (29)$$

$$L_3(\omega) = 20 \lg A_3(\omega) = 20 \lg K_3 - 10 \lg \left[ (1 - a_2 \omega^2)^2 + (a_1 \omega - a_3 \omega^3)^2 \right]$$

$$\varphi_3(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{a_1 \omega - a_3 \omega^3}{1 - a_2 \omega^2}. \quad (30)$$

In accordance with generally adopted approach in the theory of identification [3], as equivalent criteria in our problem we will make use of standard criteria of the least squares, in our case, relatively experimentally measured LAFC of multidimensional object  $L(\omega_s)$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$  and LAFC of equivalent models  $L_1(\omega)$ ,  $L_2(\omega)$ ,  $L_3(\omega)$ , that is, we will make use of the functionals:

$$\Sigma_1 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - L_1(\omega_s))^2, \quad (31)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - L_2(\omega_s))^2, \quad (32)$$

$$\Sigma_3 = \sum_{s=1}^N (L(\omega_s) - L_3(\omega_s))^2, \quad (33)$$

substituting in which the expressions for  $L_1(\omega)$ ,  $L_2(\omega)$ ,  $L_3(\omega)$ , taken from the relations (28) – (30), we will obtain:

$$\Sigma_1 = \sum_{s=1}^N \left( L(\omega_s) - 20 \lg K_1 + 10 \lg(1 + a_1^2 \omega_s^2) \right)^2, \quad (34)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{s=1}^N \left( L(\omega_s) - 20 \lg K_2 + 10 \lg((1 - a_2 \omega_s^2)^2 + a_1^2 \omega_s^2) \right)^2, \quad (35)$$

$$\Sigma_3 = \sum_{s=1}^N \left( L(\omega_s) - 20 \lg K_3 + 10 \lg((1 - a_2 \omega_s^2)^2 + (a_1 \omega_s - a_3 \omega_s^3)^2) \right)^2. \quad (36)$$

Further, according to standard procedure of the least square method, in case if we select as equivalent mathematic model differential equation (4), then partial derivatives from  $\Sigma_1$  with respect to unknown coefficients  $K_1$ ,  $a_1$ , would have to be taken, equated with zero, and having solved the obtained system of two equations with respect to two unknown  $K_1$ ,  $a_1$ , obtain numerical values of these two unknown coefficients.

Similarly, in case, when we select as the equivalent mathematical model differential equation (3), then, we would have to take partial derivatives from  $\Sigma_2$  with respect to unknown coefficients  $K_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , equate these derivatives with zero and having solved the obtained system of three equations with respect to three unknown  $K_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , and obtain numerical values of these unknown coefficients.

If we select as the equivalent mathematical model differential equation (2), we would have to take partial derivatives from  $\Sigma_3$  with respect to unknown coefficients  $K_3$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , equate these derivatives with zero and having solved the obtained system of four equations with respect to four unknown  $K_3$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , and obtain numerical values of these unknown coefficients.

But if we act in this way, then we will obtain models of the processes, taking place in dynamic objects, solutions of which will approach to real processes in root-mean-square, not coinciding with the values of real processes at the end of ranges, which in frequency area will be set by the



frequencies  $\omega_i$  and  $\omega_c$ , for which the requirements (17) and (27) must be satisfied, that at equivalenting, must be satisfied obligatory.

That is why, it follows that while equivalenting mathematical model of multidimensional dynamic object by mathematical model (4), containing only two unknown parameters  $K_1, a_1$ , for their definition we should have the system, consisting only of two equations, that can be built without taking partial derivative with respect to the equation (34), but making use of limiting conditions (17), (27), because from (27) due to the small value of  $\omega_i$ , it follows, that

$$L(\omega_i) = 20 \lg K_1, \quad (37)$$

from (17) it follows that

$$20 \lg K_1 - 20 \lg a_1 - 20 \lg \omega_c = 0. \quad (38)$$

Solving the system of equations (37), (38), we will obtain:

$$K_1 = 10^{\frac{L(\omega_i)}{20}}, \quad a_1 = \frac{1}{\omega_c} 10^{\frac{L(\omega_i)}{20}}. \quad (39)$$

However, while equivalenting mathematical model of multidimensional dynamic object by mathematical model (3), containing three unknown parameters  $K_1, a_1, a_2$ , for their determination we must have the system, consisting of three equations, but we can not build this system using only limiting conditions (17), (27), as these conditions give us only two equations, namely:

$$L(\omega_n) = 20 \lg K_2, \quad (40)$$

$$20 \lg K_2 - 20 \lg a_2 - 40 \lg \omega_c = 0, \quad (41)$$

from which we will get:

$$K_2 = 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}, \quad a_2 = \frac{1}{\omega_c^2} 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}. \quad (42)$$

Regarding the third unknown parameter  $a_1$ , in this case for its determination partial derivatives must be taken from the expression (35) and obtain, having put this derivative to zero, in addition to equations (42), still the third equation —

$$\sum_{i=1}^N \left[ L(\omega_i) - \lg \frac{10K_2^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_i^2 + a_2^2\omega_i^4} \right] \frac{\omega_i^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_i^2 + a_2^2\omega_i^4} = 0 \quad (43)$$

non-linear equation, but with one unknown, for solution of which, for instance, standard procedure is put in the package of applied programs Mathcad

Regarding equivalenting mathematical model of multidimensional dynamic object by mathematical model (2), containing four unknown parameters  $K_1, a_1, a_2, a_3$ , for their determination we must have the system consisting of four equations, which can not be built using only limiting conditions (17), (27), as these conditions give us only two equations, namely:

$$L(\omega_n) = 20 \lg K_3, \quad (44)$$

$$20 \lg K_3 - 20 \lg a_3 - 60 \lg \omega_c = 0, \quad (45)$$

we will get from them:

$$K_3 = 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}, \quad a_3 = \frac{1}{\omega_c^3} 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}} \quad (46)$$

Regarding two unknown parameters  $a_1, a_2$ , in this case for their determination two partial derivatives must be taken with respect to expression (36) and obtain, having put these derivatives equal to zero, in addition to equations (46) two equations more:

$$\sum_{s=1}^N \left\{ \left[ L(\omega_s) - \lg \frac{10K_3^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} \right] \cdot \frac{a_1\omega_s^2 - a_3\omega_s^4}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} \right\} = 0, \quad (47)$$

$$\sum_{s=1}^N \left[ L(\omega_s) - \lg \frac{10K_3^2}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} \right] \frac{\omega_s^2 - a_2\omega_s^4}{1 + (a_1^2 - 2a_2)\omega_s^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3)\omega_s^4 + a_3^2\omega_s^6} = 0, \quad (48)$$

having solved them as the system of two non-linear equations with two unknown, using standard procedure in the package of applied programs Mathcad, we obtain in addition to already found by the expressions (46) numerical values of parameters  $K_3, a_3$  numerical values of parameters  $a_1, a_2$ .

But the procedure of the synthesis of the equivalent mathematical model of multidimensional dynamic object is not over when the full set of equivalent models (2), (3) (4) parameters have been determined, the error of equivalenting must be evaluated, we will pass to the procedure of determination technique construction.

### Evaluation of equivalenting error

As it is seen from Fig. 3 equivalenting error by models (2) – (4) of multidimensional dynamic object in frequency region, can be written as:

$$\begin{aligned} \Delta Y_i(j\omega) &= Y(j\omega) - Y_i(j\omega) = W(j\omega)X(j\omega) - W_i(j\omega)X(j\omega) = \\ &= (W(j\omega) - W_i(j\omega))X(j\omega) = W_{\Delta i}(j\omega)X(j\omega), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (49)$$

where APFC of dynamic object by equivalenting error  $W_{\Delta i}(j\omega)$  may be presented as:

$$\begin{aligned} W_{\Delta i}(j\omega) &= W(j\omega) - W_i(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} - A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)} = \\ &= [A(\omega)\cos\varphi(\omega) - A_i(\omega)\cos\varphi_i(\omega)] + j[A(\omega)\sin\varphi(\omega) - A_i(\omega)\sin\varphi_i(\omega)] = A_{\Delta i}(\omega)e^{j\varphi_{\Delta i}(\omega)}, \\ & \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (50)$$

where amplitude frequency characteristic (AFC) of dynamic object by equivalenting error – it is:

$$A_{\Delta i}(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + A_i^2(\omega) - 2A(\omega)A_i(\omega)\cos(\varphi(\omega) - \varphi_i(\omega))} \quad (51)$$

and phase frequency characteristic (PFC) —it is:

$$\varphi_{\Delta i} = \arctg \frac{A(\omega)\sin\varphi(\omega) - A_i(\omega)\sin\varphi_i(\omega)}{A(\omega)\cos\varphi(\omega) - A_i(\omega)\cos\varphi_i(\omega)} \quad (52)$$

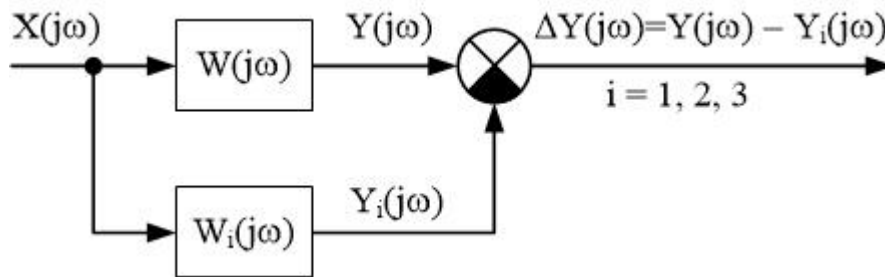


Fig. 3. Structural diagram of equivalent error formation of multidimensional dynamic object

If all complex values in demonstrative form are set in the expression (49), then we obtain the expression –

$$\Delta Y_i(\omega) e^{j\varphi_{\Delta Y_i}(\omega)} = A_{\Delta i}(\omega) X(\omega) e^{j(\varphi_{\Delta i}(\omega) + \varphi_X(\omega))}, \quad (53)$$

from which it follows that AFC of the dynamic object by equivalent error  $\Delta Y_i(\omega)$  will be equal to –

$$\Delta Y_i(\omega) = A_{\Delta i}(\omega) X(\omega), \quad (54)$$

where  $X(\omega)$  – AFC of dynamic object input signal.

As it is known [4], applying Parseval equality, root-mean-square error  $\overline{\Delta y_i(t)}$ , characterizing its average power, can be determined from the expression:

$$\overline{\Delta y_i(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\Delta Y_i(\omega)]^2 d\omega, \quad (55)$$

substituting in it the expression (54) and replacing the integral by the sum of values in the points of spectrum quantization, we obtain:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta y_i(t)} &\approx \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A_{\Delta i}(\omega_s) X(\omega_s)]^2 = \\ &= \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A^2(\omega_s) + A_i^2(\omega_s) - 2A(\omega_s)A_i(\omega_s) \cos(\varphi(\omega_s) - \varphi_i(\omega_s))] X^2(\omega_s) \end{aligned}, \quad (56)$$

where  $\Delta\omega$  — quantization interval by frequency in logarithmic scale,  $\omega_{\max}$  — upper frequency of the bandwidth of the dynamic object, the number of discretizes  $m$  is found from the expression:

$$m = \frac{\omega_{\max} - \omega_n}{\Delta\omega}. \quad (57)$$

Mean error  $\overline{\Delta y_i(t)}$  will be the greatest while processing by the dynamic object jump-like input signal (5), for which

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (58)$$

Substituting  $X(\omega)$  from (58) into (56) we will have:

$$\overline{\Delta y_i(t)} \approx \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A_{\Delta i}(\omega_s) X(\omega_s)]^2 =$$

$$= \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m \left[ A^2(\omega_s) + A_i^2(\omega_s) - 2A(\omega_s)A_i(\omega_s) \cos(\varphi(\omega_s) - \varphi_i(\omega_s)) \right] \frac{1}{\omega_s^2} \quad (59)$$

By analogy with the expressions (55), (56), (58) and (59) average power  $\overline{y(t)}$  of initial signal  $y(t)$  of the dynamic object as its reaction on the input single signal (5) can be presented in the form

$$\overline{y(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [Y(\omega)]^2 d\omega \approx \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m [A(\omega_s)X(\omega_s)]^2 = \frac{\Delta\omega}{\pi} \sum_{s=1}^m A^2(\omega_s) \frac{1}{\omega_s^2} \quad (60)$$

Taking into account the expressions (59) and (60), relative root-mean-square error of equivalent  $\overline{\delta y_i(t)}$ , expressed in per cent, may be presented in the form —

$$\overline{\delta y_i(t)} = \frac{\overline{\Delta y_i(t)}}{\overline{y(t)}} 100\%, \quad i = 1, 3 \quad (61)$$

Calculating by the expression (61), taking into account the expressions (59) and (60) relative root-mean-square of equivalent error, we will take a decision if the selected equivalent model of multidimensional dynamic object satisfies us or not.

### Conclusions

1. Method of processes identification in multidimensional objects, allowing linearization and operating in direct signal transmission mode, by means of mathematical models of not higher than the third order, equivalent by the cut-off frequency is suggested.

2. Algorithm of the method is based on the system of equations, one part of which is synthesized, taking into account limiting conditions, set by the frequency of the cut-off and the second part is synthesized by the standard procedure of the least square method relatively logarithmic frequency characteristics.

3. As the criterion of equivalent possibility of multidimensional dynamic object by the selected equivalent mathematical model it is suggested to use relative root-mean-square of equivalent error, for which computational form is obtained.

### REFERENCES

1. Мокін О. Б. Визначення умов, за яких рух динамічних об'єктів з порядком математичних моделей, вищим трьох, можна описувати еквівалентними моделями з порядком, не вищим трьох / О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2014. — №4. — С. 7 – 15.
2. Макаров И. М. Линейные автоматические системы / И. М. Макаров, Б. М. Менский. — М.: Машиностроение, 1977. — 464 с.
3. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации / Цыпкин Я. З. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
4. Бабак В. П. Обробка сигналів / В. П. Бабак, В. С. Хандецький, Е. Шрюфер. — К.: Либідь, 1999. — 496 с.

**Mokin Oleksandr** – Doctor of Science (Eng), Professor, Head of the Chair of Renewable Power and Transport Electric Systems and Complexes (RETESC), e-mail: [abmokin@gmail.com](mailto:abmokin@gmail.com).

**Mokin Vitaliy** – Doctor of Science (Eng), Professor, Head of the Chair of Computer Ecological and Economic Monitoring and Engineering Graphics (CEEMEG), [vbmokin@gmail.com](mailto:vbmokin@gmail.com).

**Mokin Borys** – Academician of NAPSU, Doctor of Science (Eng), Professor, Department of Renewable Power and Transport Electric Systems and Complexes.

**Chernova Iryna** – Engineer of the Research Department.  
Vinnytsia National Technical University.