

**В. М. Дубовой, д. т. н., проф.; І. В. Пилипенко; Р. С. Стець**

## **ЗАСТОСУВАННЯ МАРКОВСЬКОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ АНАЛІЗУ ВПЛИВУ ЦИКЛІЧНОСТІ НА УПРАВЛІННЯ РОЗГАЛУЖЕНИМ ТЕХНОЛОГІЧНИМ ПРОЦЕСОМ**

*У статті отримано неоднорідну марковську модель, яка дозволяє оцінити ризик варіантів реалізації циклічного розгалуженого технологічного процесу й обрати реалізацію з мінімальним ризиком. На основі розробленої моделі здійснено прогнозування щодо доцільності кількості повторень циклічного технологічного процесу. Розроблену модель застосовано до технологічного процесу тестування програмного забезпечення.*

**Ключові слова:** *циклічний технологічний процес, марковська модель, ризик.*

### **Вступ**

У багатьох галузях промисловості найбільшого поширення набули складні розгалужено-циклічні технологічні процеси (РЦТП) [1].

Циклічність – властивість РЦТП, за якої операція (або кілька операцій) повторюються. Тут важливе місце посідає прийняття рішення щодо припинення циклічності [1]. Наявність альтернативи повторення як окремого підпроцесу, так і групи підпроцесів і процесу загалом визначає особливість циклічних процесів.

Серед сучасної літератури важливе місце посідає моделювання циклічних економічних процесів [2]. Побудова адекватних математичних моделей економічних циклічних процесів визначає розвиток та застосування новітніх інформаційних технологій для задач автоматизованого аналізу та прогнозу економічних циклів. Серед основоположників математичного моделювання та аналізу економічних циклів такі відомі вчені, як Слуцький, Фріш, Лоуса. Цій тематиці присвячена значна кількість наукових праць, зокрема [3, 4].

Однак дотепер залишаються мало вивченими питання управління розгалуженими технологічними процесами з повторюваністю (циклічністю).

Задача моделювання циклічних РТП ускладнюється через невизначеність кількості повторень циклу, а також через залежність параметрів операцій наступних циклів від параметрів і характеристик попередніх, тому розв'язання задачі моделювання циклічних РТП є **актуальним**.

Хід і результати виконання окремих підпроцесів залежать від вхідних параметрів предмету виробництва і не залежать від того, якими засобами і як ці параметри предмету виробництва отримані. У циклічних РТП на хід виконання одного потоку операцій може впливати хід виконання циклічного потоку операцій, тому можна припустити, що циклічний РТП може бути описаний неоднорідною марковською моделлю [5, 6].

Модель управління розгалуженими технологічними процесами ґрунтується на невизначених циклічних графах і неоднорідних марковських ланцюгах [6,7].

**Мета роботи** полягає у побудові неоднорідної марковської моделі для циклічних РТП та застосуванні цієї моделі для аналізу впливу циклічності на управління розгалуженими технологічними процесами.

### **Алгоритм перетворення графа циклічного РТП на ациклічний**

Для спрощення застосування марковської моделі до циклічних процесів пропонуємо перетворення циклічного графа виконання операцій РЦТП на еквівалентний йому ациклічний. Схема такого перетворення показана на рис. 1.

Сутність перетворення полягає в поданні кожної реалізації циклу як відгалуженої частини процесу (підпроцесу), перехід до якої здійснюється в результаті прийняття рішення наприкінці попередньої реалізації. На рис. 1 пунктирними стрілками показано вплив операцій попередньої реалізації циклу на операції наступної реалізації.

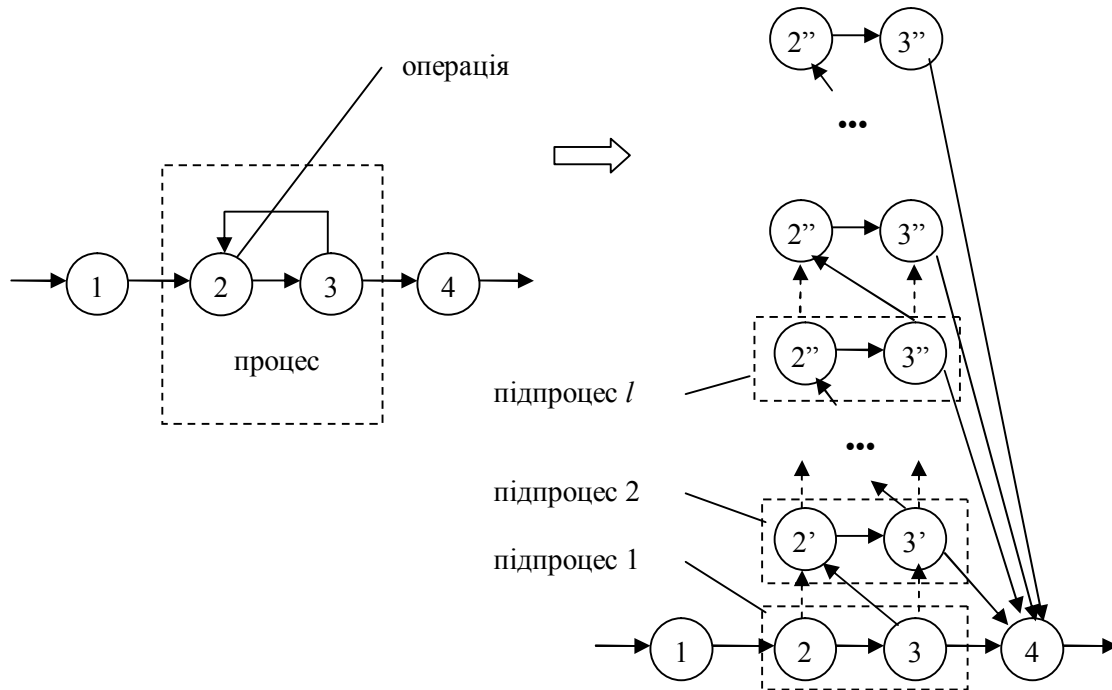


Рис. 1. Схема перетворення циклічного графа на ациклічний

На основі рис. 1 розроблено спосіб перетворення графа розгалуженого технологічного процесу на ациклічний з урахуванням допустимої кратності виконання підпроцесів, у якому за рахунок використання орієнтованих графів та врахування кратності циклів досягається можливість побудови структури технологічного процесу розгалуженого типу в умовах невизначеності входних параметрів, що призводить до зниження втрат та підвищення ефективності під час управління технологічними процесами.

Алгоритм перетворення циклічного графа РЦП зображено на рис. 2. На рисунку позначено:  $G$  – матриця суміжності графа;  $N$  – кількість вершин;  $C_i$  – цикл;  $\{C_i\}$  – множини циклів;  $m$  – кількість циклів;  $n_i$  – кількість вершин в  $i$ -ому циклі;  $k_i$  – максимальна кратність повторення  $i$ -го циклу.

### Застосування марковської моделі РТП до циклічних процесів

Представимо застосування марковської моделі РТП до циклічних процесів, ураховуючи перетворення циклічного графа на еквівалентний йому ациклічний.

Марковську модель технологічного процесу представимо як сукупність марковських моделей операцій і підпроцесів  $P_i$ . За основу візьмемо неоднорідну марковську модель [8].

На рис. 3 зображено приклад графа зміни станів операції. Під «станом» будемо розуміти сукупність значень параметрів операції.

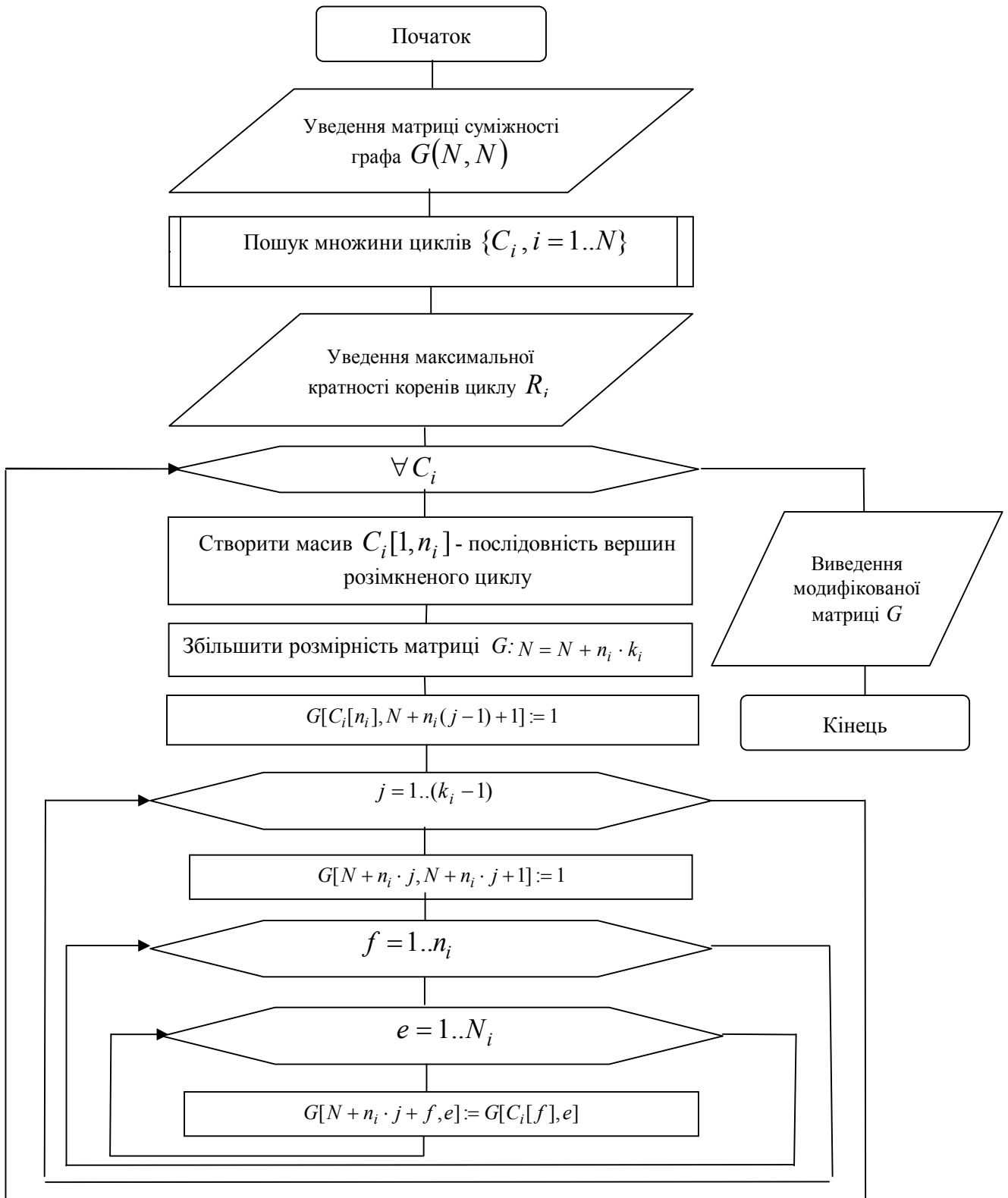


Рис. 2. Алгоритм перетворення графа РТП на ациклічний з урахуванням допустимої кратності виконання підпроцесів

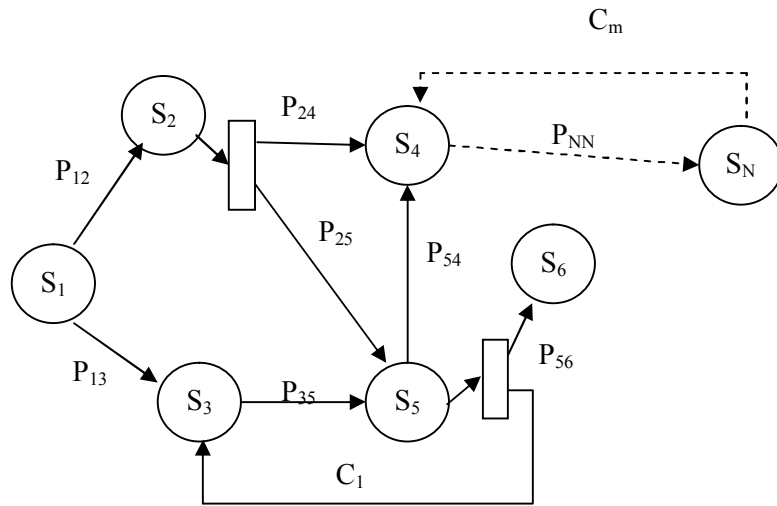


Рис. 3. Граф зміни станів операції

Нехай  $m$  – максимальна кількість станів операції циклічного РТП. Позначимо через  $b_{ij}$  вірогідність переходу операції зі стану  $S_i$  в стан  $S_j$ . Тоді вірогідності переходів операції з одного стану в інший описують матрицею

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Схема взаємозв'язку між станами операцій та зміст позначень зображено на рис. 4.

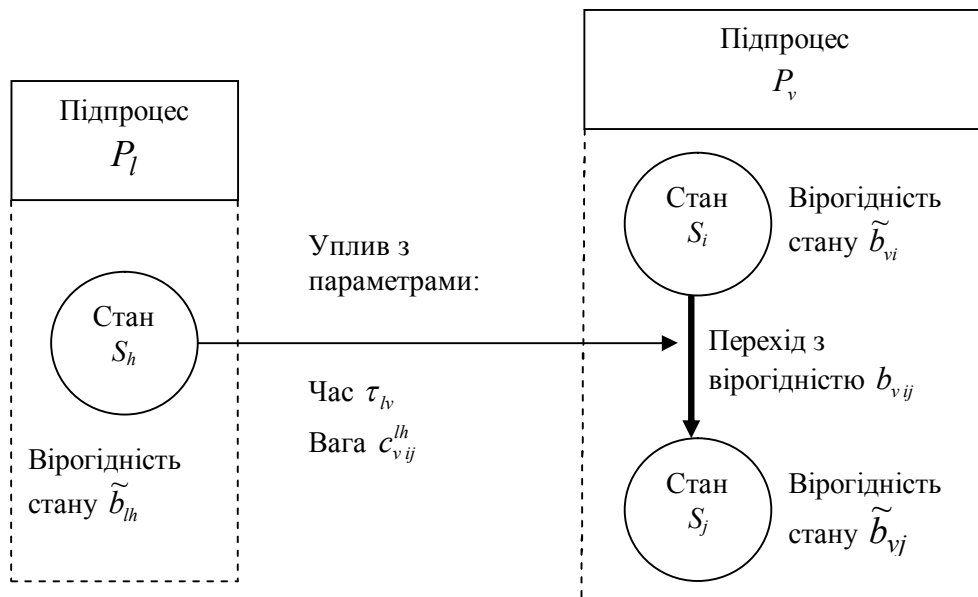


Рис. 4. Схема зв'язку параметрів марковської моделі операцій РТП

Оскільки перехідні вірогідності є змінними, що зумовлено взаємним впливом операцій

двох послідовних підпроцесів, то марковська модель циклічного РТП є неоднорідною.

В [8] також наведена лінеаризована модель для оцінювання вірогідності стану двох підпроцесів

$$\tilde{b}_{vj} = \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{b}_{vi} \cdot \left[ c_{vij}^{00} + \sum_{l=1}^n \sum_{h=1}^m (c_{vij}^{lh} \cdot \tilde{b}_{lh}) \right] \right\}, v=1..n, i, j=1..m, \quad (2)$$

де  $\tilde{B}^{(k)}$  – матриця вірогідностей станів підпроцесів;  $C_v$  – 4-вимірний масив вагових коефіцієнтів  $[n, m, n+1, m+1]$ .

Елемент матриці  $c_{vij}^{lh} \in C_v$  визначає вплив  $h$ -го стану  $l$ -го підпроцесу на вектор перехідних вірогідностей  $v$ -го підпроцесу. Елемент  $c_{vij}^{00}$  – вірогідність переходу  $v$ -го підпроцесу з  $i$ -го в  $j$ -й стан без урахування впливу інших підпроцесів.

Ураховуючи детермінований характер послідовності операцій РЦТП і те, що розглядається вплив операції попереднього підпроцесу на хід аналогічної операції наступного підпроцесу, тобто  $l = v - 1$ , модель (2) спрощується

$$\tilde{b}_{vj} = \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{b}_{vi} \cdot \left[ c_{vij}^{00} + \sum_{h=1}^m (c_{vij}^{(v-1),h} \cdot \tilde{b}_{(v-1),h}) \right] \right\}.$$

Будемо розглядати номер стану операції як вектор параметрів  $X$ . Тоді модель (2) матиме вигляд

$$\tilde{b}_v(X_j) = \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{b}_v(X_i) \cdot \left[ c_v^{00}(X_i, X_j) + \sum_{h=1}^m (c_v^{v-1,h}(X_i, X_j) \cdot \tilde{b}_{v-1}(X_h)) \right] \right\}. \quad (3)$$

Якщо врахувати вплив підпроцесу  $v-2$ , то отримаємо

$$\tilde{b}_{v-1}(X_h) = \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{b}_{v-1}(X_i) \cdot \left[ c_{v-1}^{00}(X_i, X_h) + \sum_{r=1}^m (c_{v-1}^{v-2,r}(X_i, X_h) \cdot \tilde{b}_{v-2}(X_r)) \right] \right\}. \quad (4)$$

Ураховуючи, що співвідношення (3) і (4) є моделями різних реалізацій одного і того ж підпроцесу, можна записати

$$\begin{aligned} c_v^{00}(X_i, X_j) &= c_{v-1}^{00}(X_i, X_j) = c_1; \\ c_v^{v-1,h}(X_i, X_j) &= c_{v-1}^{v-2,h}(X_i, X_j) = c_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Підставляємо (4) в (3) і з урахуванням (5) отримуємо

$$\tilde{b}_v(X_j) = \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{b}_v \cdot \left[ c_1 + \sum_{h=1}^m \left( c_2 \cdot \sum_{i=1}^m \{ \tilde{b}_{v-1} \cdot [c_1 + \sum_{r=1}^m (c_2 \cdot \sum_{i=1}^m \{ \tilde{b}_{v-2} \cdot [c_1 + \sum_{r=1}^m (c_2 \cdot \tilde{b}_{v-3}) \} \} \} \} \right) \right] \right\}. \quad (6)$$

Узагальнивши (6), отримуємо

$$\tilde{b}_v(X_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{h=1}^{v+1} \left\{ \sum \cdots \sum_{(h-1)} c_1 c_2^{h-1} \prod_{r=0}^{h-1} \tilde{b}_{v-h}(X_i) \right\}.$$

На основі марковської моделі можна визначити ризик реалізації циклічного РТП, що дасть змогу покращити якість рішень під час управління розгалужено-циклічними технологічними процесами.

### Застосування марковської моделі до процесу тестування програмного забезпечення

Запропонована модель застосована до процесу тестування програмного забезпечення

(ПЗ) як розгалужено-циклічного технологічного процесу. Схема процесу тестування зображена у вигляді графа на рис. 5.

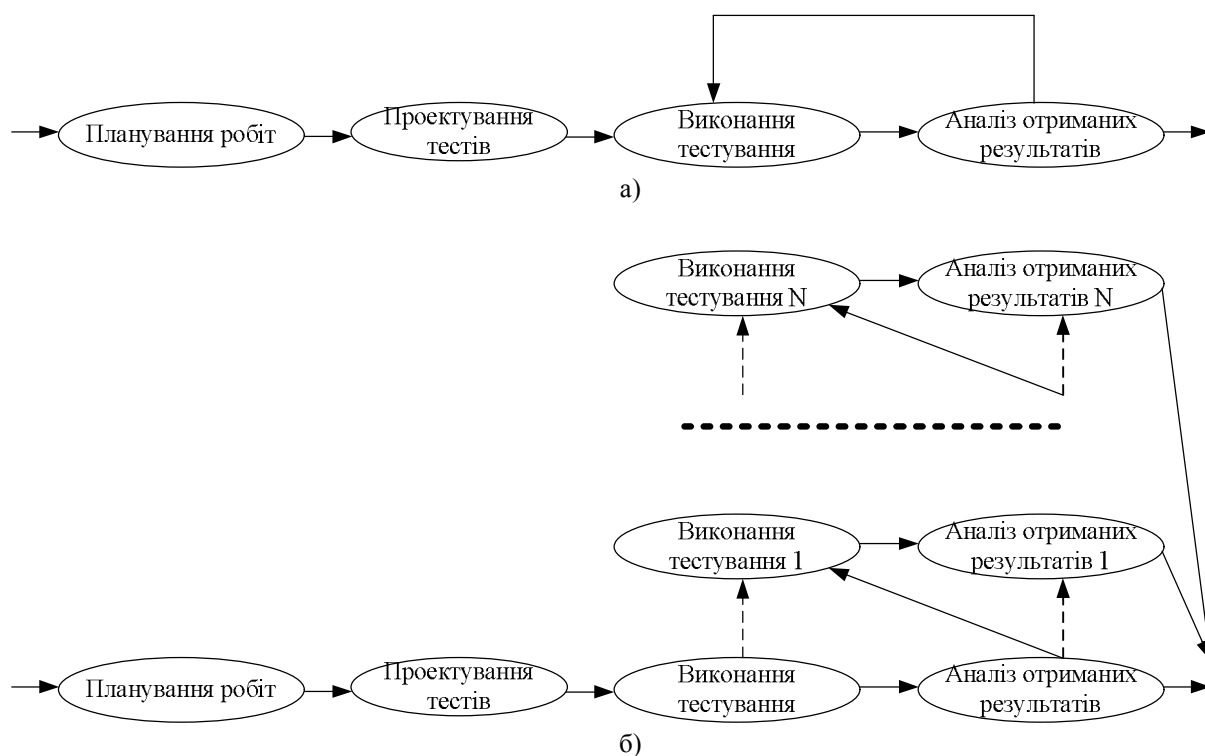


Рис. 5. Процес тестування ПЗ:

а) циклічний граф процесу;  
б) перетворення циклічного графа в ациклічну форму

Тестування – це одна з технік контролю якості, до якої входять:

- планування робіт (Test Management);
- проектування тестів (Test Design);
- виконання тестування (Test Execution);
- аналіз отриманих результатів (Test Analysis) [9].

Ці чотири етапи є операціями процесу тестування ПЗ. Кожна операція містить стани, які варіюються залежно від вхідних параметрів та параметрів виконання попередньої операції. Зокрема «Планування робіт (Test Management)» містить такі параметри, які впливають на стан операції:

- інформацію про структуру ПЗ або систему в документації («біла скринька»);
- тестові набори даних для перевірки правильності роботи компонентів і системи загалом без знання їхньої структури («чорна скринька»);
- граничні значення, таблиці прийняття рішень, потоки даних, статистику відмов і ін.;
- блок-схеми побудови програм і набори тестів для покриття системи цими тестами та ін.

Підпроцес «Виконання тестування» – «Аналіз отриманих результатів» виконується циклічно доти, доки виявлення дефектів стане мінімальним. При цьому після першого циклу виконання підпроцесу на операцію «Виконання тестування» впливатиме результат попереднього циклу, тобто результат операції «Аналізу». При цьому вхідні дані для виконання наступного циклу будуть варіюватися, оскільки вони залежать від результатів виконання процесу на попередньому циклі.

В залежності від того, яким чином буде знайдено дефект, стан операції знаходження

дефекту буде варіюватися:

- 1) ми дізнаємося (або вже знаємо) очікуваний результат;
- 2) ми дізнаємося (або вже знаємо) фактичний результат;
- 3) ми порівнюємо 1 та 2 пункти.

Стан операції також буде визначатися тестовими даними, які використовуються для перевірки роботи системи і складаються різними способами: генератором тестових даних, проектною групою на основі документів або наявних файлів, користувачем зі специфікації вимог та ін.

На основі відомої схеми зв'язків параметрів марковської моделі РТП показемо приклад розрахунку вірогідності стану підпроцесу системи на кількох операціях.

Маємо 2 підпроцеси  $P_1$  та  $P_2$ . Нехай підпроцес  $P_1$  має 1 стан –  $S_1$  із вірогідністю  $\tilde{b}_{11}$ ; а підпроцес  $P_2$  має 2 стани –  $S_1, S_2$  із відповідними вірогідностями  $\tilde{b}_{21}$  та  $\tilde{b}_{22}$ . Стан  $S_1$  підпроцесу  $P_2$  переходить у стан  $S_2$  із вірогідністю  $b_{212}$ . Стан  $S_1$  підпроцесу  $P_1$  впливає на перехід між станами  $S_1 - S_2$  підпроцесу  $P_2$ : вплив з часом  $\tau_{12}$ , вплив з вагою  $c_{212}^{11}$ . Складемо таблицю значень (табл. 1).

Таблиця 1

Параметри марковської моделі РТП тестування ПЗ

Цикл	Операція	Стан	Вірогідність стану	Уплив		Перехід із вірогідністю
				час	вага	
$P_1$	Операція 1	$S_1$	$b_{11} = 0,2$	$\tau_{12} = 2$	$c_{212}^{11} = 0,3$	$b_{212} = 0,7$
$P_2$	Операція 1	$S_1$	$b_{21} = 0,4$			
		$S_2$	$b_{22} = 0,6$			

Отже, розрахуємо вірогідність того, що 2-а ( $P_2$ ) операція системи після виконання 4 циклів буде у 2-му ( $S_2$ ) стані

$$\tilde{b}_{22}^{(4)} = \tilde{b}_{21}^{(4-1)} \cdot \left[ b_{11} + \left( c_{212}^{12} \cdot \tilde{b}_{11}^{(4-2)} \right) \right];$$

$$\tilde{b}_{22}^{(4)} = (0,4)^3 \cdot (0,2 + 0,3 \cdot 0,2^2) = 0,013568.$$

Після 3 циклів:

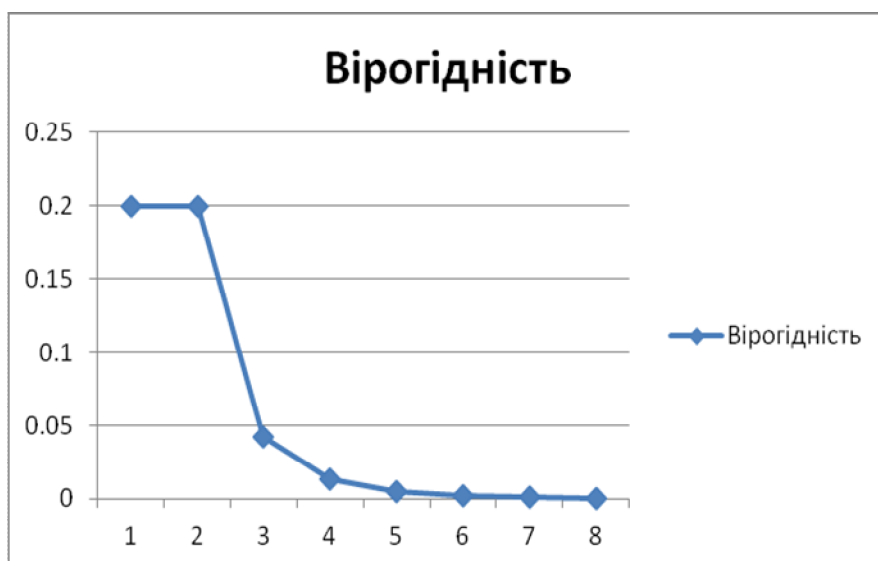
$$\tilde{b}_{22}^{(3)} = (0,4)^2 \cdot (0,2 + 0,3 \cdot 0,2^1) = 0,0416.$$

Після 2 циклів:

$$\tilde{b}_{22}^{(2)} = (0,4)^1 \cdot (0,2 + 0,3 \cdot 0,2^0) = 0,2.$$

Покажемо залежність вірогідності стану операції  $P_2$  системи від кількості циклів виконання на рис. 6.

К-сть циклів	Вірогідність
1	0.2
2	0.2
3	0.0416
4	0.01
5	0.00518144
6	0.002052915
7	0.000819593
8	0.000327711

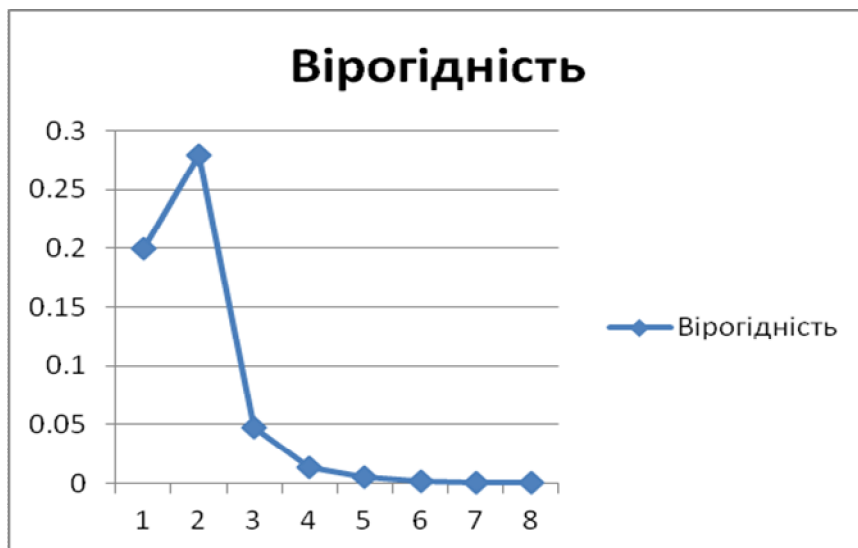
Рис. 6. Залежність вірогідності стану підпроцесу  $P_2$  від кількості операцій виконання

Побудуємо графіки для різних параметрів марковської моделі та проаналізуємо їхню природу.

Наприклад, будемо варіювати параметр марковської моделі вплив із вагою  $c_{212}^{11}$  (рис. 7).

$$c_{212}^{11}=0,5$$

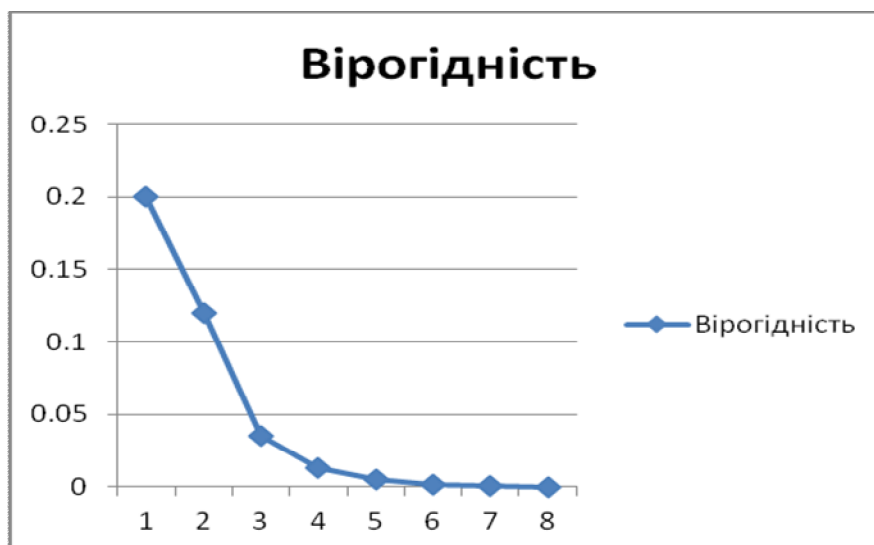
К-сть циклів	Вірогідність
1	0.2
2	0.28
3	0.048
4	0.01
5	0.0052224
6	0.002056192
7	0.000819855
8	0.000327732

Рис. 7. Залежність вірогідності стану операції  $P_2$  від кількості циклів виконання за варіації параметру ваги впливу



$$c_{212}^{11}=0,1$$

К-сть циклів	Вірогідність
1	0.2
2	0.12
3	0.0352
4	0.01
5	0.00514048
6	0.002049638
7	0.000819331
8	0.00032769



$$c_{212}^{11}=0,9$$

К-сть циклів	Вірогідність
1	0.2
2	0.44
3	0.0608
4	0.02
5	0.00530432
6	0.002062746
7	0.00082038
8	0.000327774

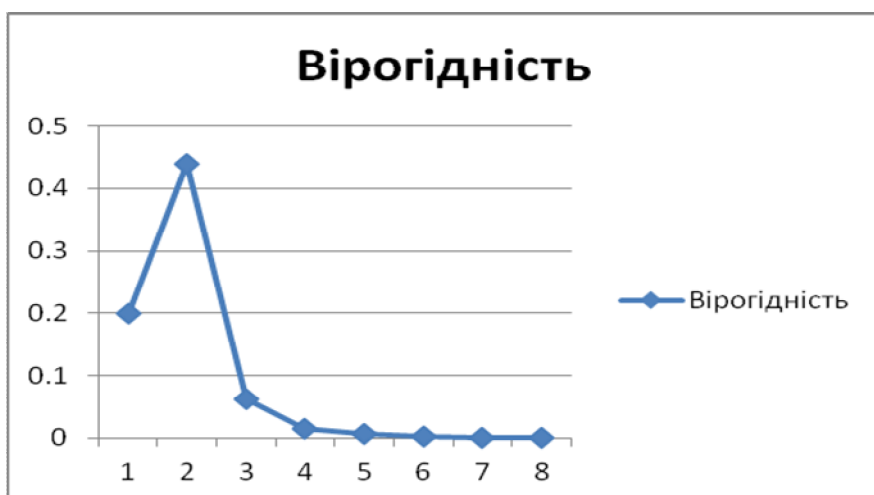


Рис. 7. Залежність вірогідності стану операції  $P_2$  від кількості циклів виконання за варіації параметру ваги впливу (продовження)

Отже, зі зростанням кількості циклів виконання підпроцесу вплив на вірогідність стану збільшується. Це зумовлено взаємним впливом підпроцесів, що визначає неоднорідність марковського ланцюга.

Для цього випадку стан  $S_1$  є бажаним для операції  $P_2$ , а стан  $S_2$  – небажаним, тобто вірогідність небажаного стану  $S_2$  зменшується зі зростанням кількості циклів виконання підпроцесу.

### Висновки

Побудовано неоднорідну марковську модель для циклічних РТП. Запропоновано застосування цієї моделі для аналізу впливу циклічності на управління розгалуженими технологічними процесами. Отриманий ациклічний граф разом із неоднорідною марковською моделлю дозволяють оцінити ризик варіантів реалізації циклічних РТП і обрати реалізацію з мінімальним ризиком.

Використання таких моделей в умовах невизначеності є перспективним для управління широким класом РЦТП.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовой В. М. Оцінювання ризику розгалужено-циклічних технологічних процесів / В. М. Дубовой, І. В. Пилипенко, А. В. Денисов // Вісник ХНУ. – 2011. – № 6. – С. 165 – 168.
2. Горкуненко А. Б. Математичне моделювання економічних циклічних процесів для їх автоматизованого аналізу та прогнозу / А. Б. Горкуненко, С. А. Лупенко, А. М. Луцків // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 269 – 275.
3. Слуцкий Е. Е. Сложение случайных причин как источник циклических процессов / Е. Е. Слуцкий // Вопр. Конъюнктуры. – 1997. – Т. 3, вып. 1. – С. 34 – 64.
4. Louçã F. Turbulence in Economics: An Evolutionary Appraisal of Cycles and Complexity in Historical Processes / Louçã F. – Cheltenham : Edward Elgar, 1997. – 400 p.
5. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения / А. Т. Баруча-Рид. – М. : «Наука», 1969. – 512 с.
6. Дубовой В. М. Марковська модель прийняття рішень розгалужено-циклічними технологічними процесами / В. М. Дубовой, І. В. Пилипенко, О. Д. Никитенко // Вісник ВПІ. – 2012. – № 6. – С. 130 – 135.
7. Dubovoy V. M. Uncertain graph as the model of branching technological processes / V. M. Dubovoy, I. V. Pylypenko, G. Y. Derman / Nauka i studia. – 2013. – № 17 (85). – P. 27 – 33.
8. Дубовой В. М. Моделі прийняття рішень в управлінні розподіленими динамічними системами : монографія / В. М. Дубовой, О. О. Ковалюк. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 190 с.
9. Савин Р. Тестирование Dot Com, или Пособие по жестокому обращению с багами в интернет-стартапах / Р. Савин. – М. : Дело, 2007. – 312 с.

*Дубовой Володимир Михайлович* – д. т. н., професор, завідувач кафедри комп'ютерних систем управління.

*Пилипенко Інна Віталіївна* – аспірант кафедри комп'ютерних систем управління.

*Стець Роман Сергійович* – студент кафедри комп'ютерних систем управління.  
Вінницький національний технічний університет.

V. M. Dubovoy, Dc. Sc. (Eng.). Prof.; I. V. Pylypenko; P. S. Stets

## MARKOV MODEL APPLICATION FOR ANALYZING CYCLICITY INFLUENCE ON THE BRANCHED TECHNOLOGICAL PROCESS MANAGEMENT

*The paper presents the obtained inhomogeneous Markov model that makes it possible to estimate the risk of the variants of branched manufacturing process realization and to select the realization variant that has minimal risk. On the basis of the obtained model, prediction as to the expedient number of cyclic technological process repetitions has been made. The developed model is applied to the software testing technological process.*

**Key words:** cyclic technological process, Markov model, risk.

### Introduction

Complex branched cyclic technological processes (CBTP) have found wide application in many industries [1].

Cyclicity is CBTP property of repeatability of an operation (or of several operations). In this case it is important to take the decision to stop cyclicity [1]. Having the alternative of repeating both a separate subprocess, a group of subprocesses or a process as a whole is a characteristic feature of cyclic processes.

In modern literature simulation of cyclic economic processes occupies an important place [2]. Building adequate mathematical models of economic cyclic processes determines development and application of the latest information technologies for the problems of computer-aided analysis and prediction of economic cycles. Among the founders of the mathematical modeling and analysis of economic cycles there are such famous scholars as Slutskiy, Frisch, Louçã. A considerable number of scientific works deal with these problems, in particular [3, 4].

However, the problems of managing branched technological processes with repeatability (cyclicity) have not been sufficiently investigated yet.

The task of cyclic BTP simulation is complicated by the uncertainty of the number of cycle repetitions as well as by the dependence of the parameters of subsequent cycles on the parameters and characteristics of the previous ones. Hence, the task of solving the problem of cyclic BTP simulation is of **current importance**.

Running of separate subprocesses and their results depend on the input parameters of the production object and do not depend on how and by what means the production object parameters have been obtained. In cyclic BTP Running of one flow of operations could be influenced by cyclic flow of operations. Therefore, it could be assumed that it is possible to describe a cyclic BTP by the inhomogeneous Markov model [5, 6].

The model of a cyclic technological process management is based on inhomogeneous cyclic graphs and inhomogeneous Markov chains [6, 7].

The work **is aimed** at building an inhomogeneous Markov model for cyclic BTP and using this model for analyzing the influence of cyclicity on branched technological process management.

### The algorithm of transforming the graph of a cyclic BTP into acyclic form

In order to simplify application of Markov model to cyclic processes, we propose to transform the cyclic graph of performing BCTP operations into the equivalent acyclic graph. A scheme of such transformation is shown in Fig. 1.

The transformation consists in representation of each of the cycle realizations as a branched part of the process (subprocess), transition to which is made as a result of taking decision at the end of the previous realization. Dotted arrows in Fig 1 show the influence of the operations of the previous

cycle realization on the operations of subsequent realization.

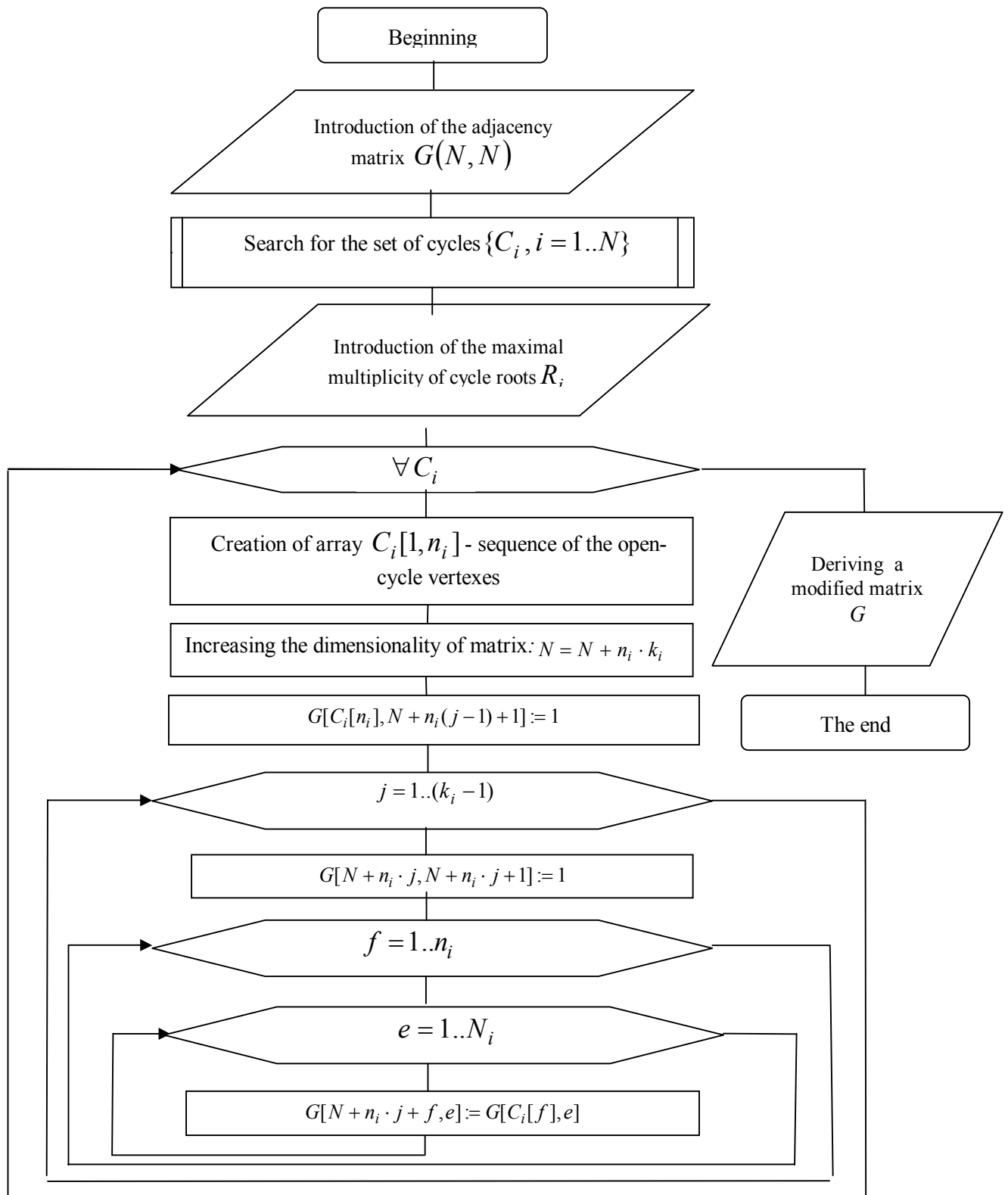


Fig. 2. The algorithm of transforming the BTP graph into acyclic form taking into account the permissible multiplicity of execution of subprocesses

On the basis of Fig.1 a method is developed for transforming the graph of a branched technological process into acyclic form taking into account the permissible multiplicity of performing

subprocesses. The method makes it possible to build a structure of the branched technological process in the conditions of uncertainty of input parameters by means of using oriented graphs and taking into account multiplicity of the cycles. This results in the reduction of losses and increased efficiency of the technological process management.

The algorithm of a cyclic BCTP graph transformation is presented in Fig. 2 where the following designations are adopted:  $G$  – adjacency matrix of the graph;  $N$  – the number of vertexes;  $C_i$  – cycle;  $\{ C_i \}$  – set of cycles;  $m$  – the number of cycles;  $n_i$  – the number of vertexes in the  $i$ -th cycle;  $k_i$  – maximal multiplicity of the  $i$ -th cycle repetitions.

### Application of Markov BTP model to cyclic processes

Let us present application of Markov BTP model to cyclic processes taking into account the cyclic graph transformation into an equivalent acyclic form.

We present Markov model of the technological process as a set of Markov models of operations and subprocesses  $P_i$ . Inhomogeneous Markov model is taken as a basis [8].

Fig. 3 shows an example of the graph of operation state variations. The “state” is understood as a set of values of the operation parameters.

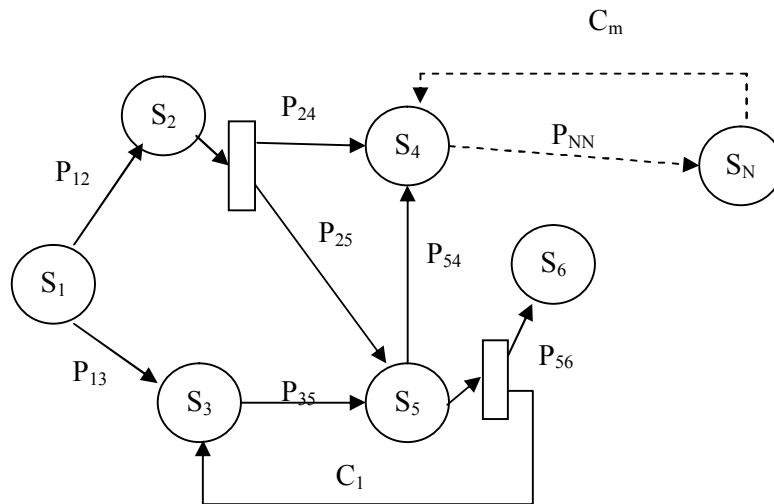


Fig. 3. The graph of operation state changes

Let  $m$  be a maximal number of states of cyclic BTP operation. Let us designate the probability of operation transition from state  $S_i$  to state  $S_j$  as  $b_{ij}$ . Then probability of the operation transition from one state to another will be described by the matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

The scheme of the relationships between the states of the operations and the meaning of designations is presented in Fig. 4.

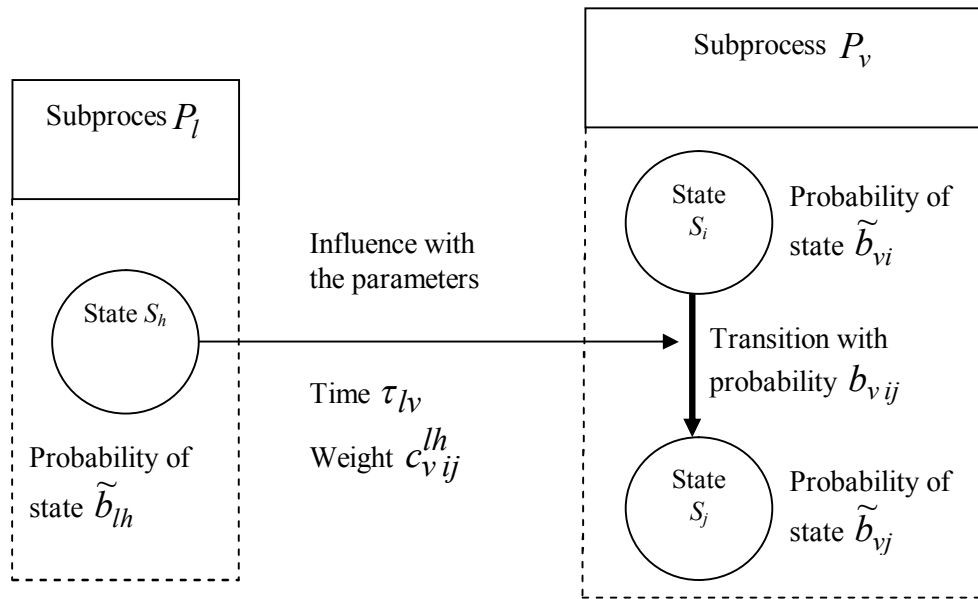


Fig. 4. The scheme of the relationships between Markov model parameters of BTP operations

Since transition probabilities are variables, which is determined by a mutual influence of operations of two sequential subprocesses, Markov model of cyclic BTP is inhomogeneous.

In [8] a linearized model is also presented for estimating probability of the state of two subprocesses.

$$\tilde{b}_{vj} = \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{b}_{vi} \cdot \left[ c_{vij}^{00} + \sum_{l=1}^n \sum_{h=1}^m \left( c_{vij}^{lh} \cdot \tilde{b}_{lh} \right) \right] \right\}, v=1..n, \quad i, j=1..m, \quad (2)$$

where  $\tilde{B}^{(k)}$  is a probability matrix of the states of subprocesses;  $C_v$  – four-dimensional array of weight coefficients  $[n, m, n+1, m+1]$ .

The matrix element  $c_{vij}^{lh} \in C_v$  determines the influence of the  $h$ -th state of the  $l$ -th subprocess on the vector of transition probabilities of the  $v$ -th subprocess. Element  $c_{vij}^{00}$  is the probability of the  $v$ -th subprocess transition from the  $i$ -th to the  $j$ -th state without taking into account the influence of other subprocesses.

Taking into account a determinate character of the sequence of BCTP operations and the fact that the influence of the previous subprocess operation on the similar operation of the next subprocess is considered, i.e.  $l = v - 1$ , model (2) is simplified as:

$$\tilde{b}_{vj} = \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{b}_{vi} \cdot \left[ c_{vij}^{00} + \sum_{h=1}^m \left( c_{vij}^{(v-1),h} \cdot \tilde{b}_{(v-1),h} \right) \right] \right\}.$$

Let us consider the number of the operation state as a vector of parameters  $X$ . Then model (2) will have the form of

$$\tilde{b}_v(X_j) = \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{b}_v(X_i) \cdot \left[ c_v^{00}(X_i, X_j) + \sum_{h=1}^m \left( c_v^{v-1,h}(X_i, X_j) \cdot \tilde{b}_{v-1}(X_h) \right) \right] \right\}. \quad (3)$$

If the influence of subprocess  $v-2$  is taken into account, then

$$\tilde{b}_{v-1}(X_h) = \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{b}_{v-1}(X_i) \cdot \left[ c_{v-1}^{00}(X_i, X_h) + \sum_{r=1}^m (c_{v-1}^{v-2,r}(X_i, X_h) \cdot \tilde{b}_{v-2}(X_r)) \right] \right\}. \quad (4)$$

If the relations (3) and (4) are the models of different realizations of the same subprocess, we can write

$$\begin{aligned} c_v^{00}(X_i, X_j) &= c_{v-1}^{00}(X_i, X_j) = c_1; \\ c_v^{v-1,h}(X_i, X_j) &= c_{v-1}^{v-2,h}(X_i, X_j) = c_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Substituting (4) into (3) and taking into account (5), we obtain

$$\tilde{b}_v(X_j) = \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{b}_v \cdot \left[ c_1 + \sum_{h=1}^m \left( c_2 \cdot \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{b}_{v-1} \cdot \left[ c_1 + \sum_{r=1}^m \left( c_2 \cdot \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{b}_{v-2} \cdot \left[ c_1 + \sum_{r=1}^m (c_2 \cdot \tilde{b}_{v-3}) \right] \right\} \right] \right\} \right) \right] \right] \right\}. \quad (6)$$

After generalization of (6), we obtain

$$\tilde{b}_v(X_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{h=1}^{v+1} \left\{ \sum \cdots \sum_{r=0}^{(h-1)} c_1 c_2^{h-1} \prod_{r=0}^{h-1} \tilde{b}_{v-h}(X_i) \right\}.$$

On the basis of Markov model the risk of cyclic BTP realization could be determined, which will make it possible to improve the quality of taking decisions connected with the management of branched cyclic technological processes.

### Markov model application to the software testing process

The proposed model has been applied to the software testing process as a branched cyclic technological process. The scheme of the process is presented as a graph in Fig. 5.

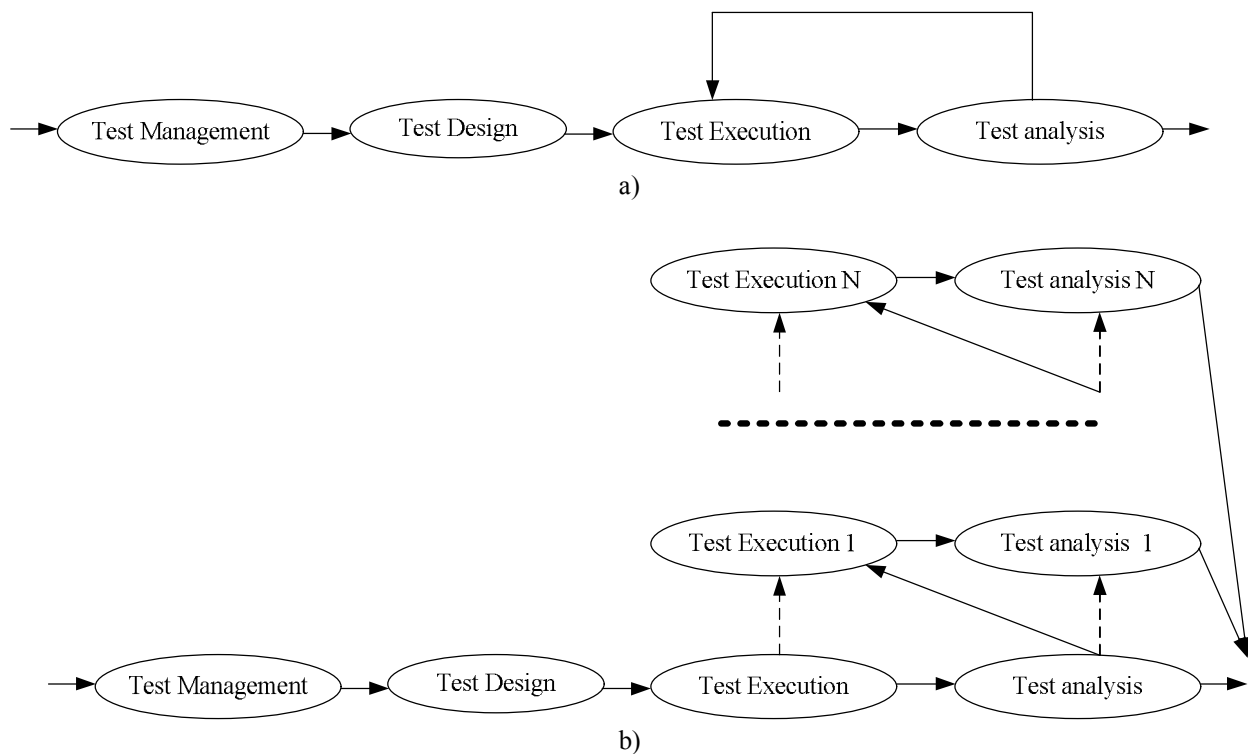


Fig. 5. Software testing process:  
 a) cyclic graph of the process;  
 b) cyclic graph transformation into acyclic form

Testing is one of the quality control techniques that includes:

- Test Management;
- Test Design;
- Test Execution;
- Test Analysis [9].

These four stages are operations of the software testing process. Each operation contains states that vary depending on the input parameters and the parameters of the previous operation execution. In particular, "Test Management" contains the following parameters that influence the state of the operation:

- information about software structure or system in documentation ("white box");
- test data sets for verifying proper operation of the components and the system as a whole without the knowledge of their structure ("black box");
- limit values, decision taking tables, data flows, statistics of failures, etc.;
- block-diagrams of building programs and test suites for covering the system with these tests, etc.

"Test execution" - "Test Analysis" subprocess is executed cyclically until the minimal number of defects is revealed. In this case, after the first cycle of the subprocess execution "Test execution" operation will be influenced by the previous cycle result, i. e. the result of "Test Analysis" operation. The input data for the next cycle execution will vary since they depend on the results of the previous cycle process execution.

Depending on how the defect is found, the state of the defect revealing operation will vary:

- 1) we learn (or have already learned) the expected result;
- 2) we learn (or have already learned) the actual result;
- 3) we equalize points 1 and 2.

The state of the operation will also be determined by test data which are used for checking the system operation and are derived in different ways: by test data generator, by the design group on the basis of the documents or the existing files, by the user from the requirement specification, etc.

On the basis of the known scheme of the relationships between Markov model of BTP parameters, we will give an example of calculating the system subprocess state probability for several operations.

We have 2 subprocesses  $P_1$  and  $P_2$ . Let subprocess  $P_1$  has one state –  $S_1$  with probability  $\tilde{b}_{11}$  and subprocess  $P_2$  has two states –  $S_1, S_2$  with respective probabilities  $\tilde{b}_{21}$  and  $\tilde{b}_{22}$ . State  $S_1$  of subprocess  $P_2$  passes to state  $S_2$  with probability  $b_{212}$ . State  $S_1$  of subprocess  $P_1$  influences the transition between two states  $S_1 - S_2$  of subprocess  $P_2$ : the influence with time  $\tau_{12}$ , the influence with weight  $c_{212}^{11}$ . Let us compose a table of the values (Table 1).

Table 1

**Parameters of the Markov model of software testing BCTP**

Cycle	Operation	State	State probability	Influence		Transition with the probability
				time	weight	
$P_1$	Operation 1	$S_1$	$b_{11} = 0,2$	$\tau_{12} = 2$	$c_{212}^{11} = 0,3$	$b_{212} = 0,7$
$P_2$	Operation 1	$S_1$	$b_{21} = 0,4$			
		$S_2$	$b_{22} = 0,6$			

Let us calculate the probability of the second operation ( $P_2$ ) being in the second state ( $S_2$ ) after execution of 4 cycles:

$$\tilde{b}_{22}^{(4)} = \tilde{b}_{21}^{(4-1)} \cdot [b_{11} + (c_{212}^{12} \cdot \tilde{b}_{11}^{(4-2)})];$$



$$\tilde{b}_{22}^{(4)} = (0,4)^3 \cdot (0,2 + 0,3 \cdot 0,2^2) = 0,013568 .$$

After 3 cycles:

$$\tilde{b}_{22}^{(3)} = (0,4)^2 \cdot (0,2 + 0,3 \cdot 0,2^1) = 0,0416 .$$

After 2 cycles:

$$\tilde{b}_{22}^{(2)} = (0,4)^1 \cdot (0,2 + 0,3 \cdot 0,2^0) = 0,2 .$$

Let us show that probability of the state of operation P<sub>2</sub> depends on the number of execution cycles (Fig. 6).

Number of cycles	Probability
1	0.2
2	0.2
3	0.0416
4	0.01
5	0.00518144
6	0.002052915
7	0.000819593
8	0.000327711

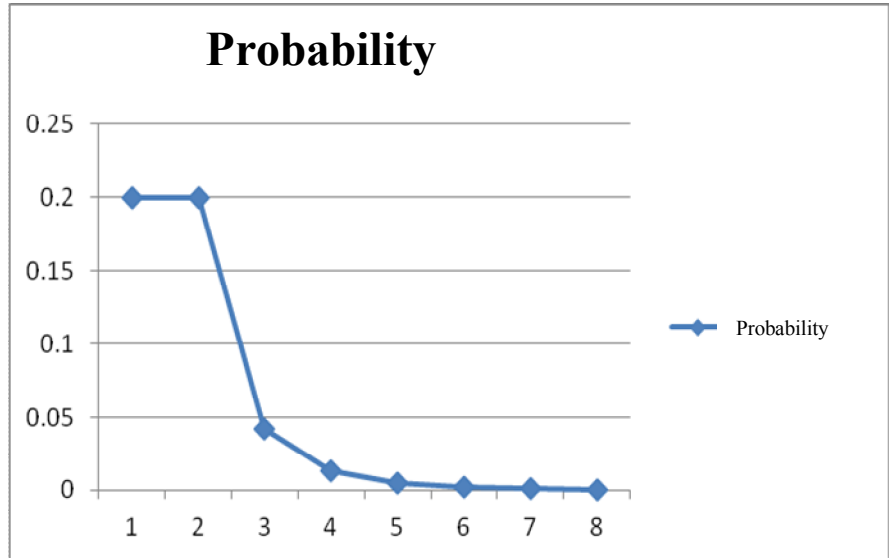


Fig. 6. Dependence of the probability of subprocess P<sub>2</sub> state on the number of execution operations

Let us build graphs for different Markov model parameters and analyze their nature.

E. g., we shall vary the Markov model parameter, the influence with weight  $c_{212}^{11}$  (Fig. 7).

$$c_{212}^{11} = 0,5$$

Number of cycles	Probability
1	0.2
2	0.28
3	0.048
4	0.01
5	0.0052224
6	0.002056192
7	0.000819855
8	0.000327732

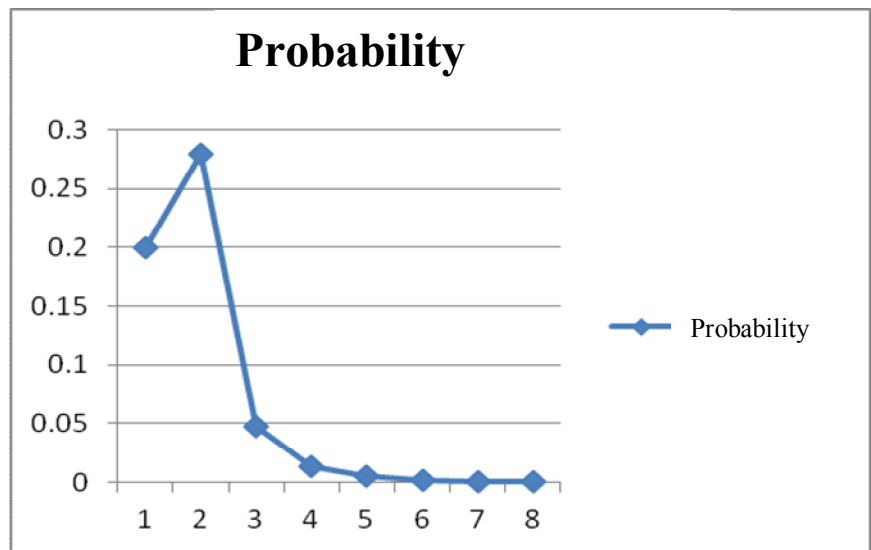
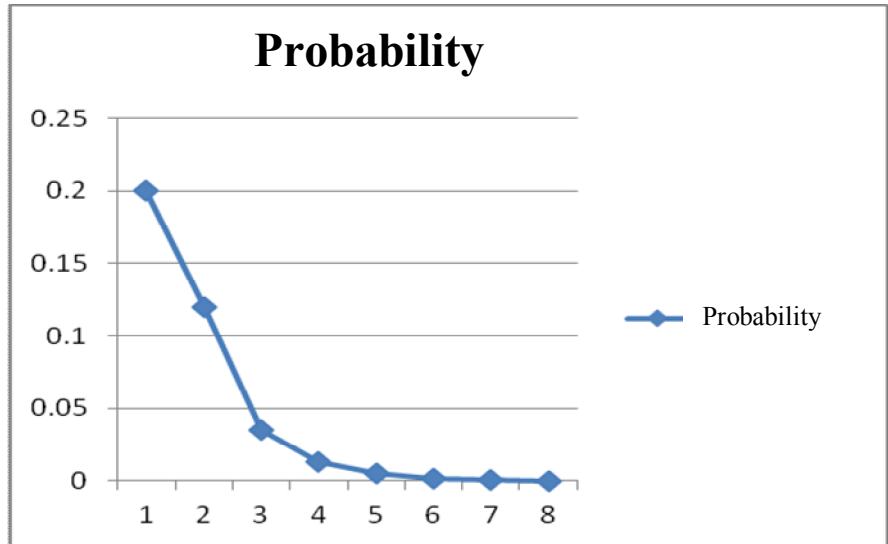


Fig. 7. Dependence of the probability of P<sub>2</sub> operation state on the number of execution cycles for the variable influence weight parameter

$$c_{212}^{11}=0,1$$

Number of cycles	Probability
1	0.2
2	0.12
3	0.0352
4	0.01
5	0.00514048
6	0.002049638
7	0.000819331
8	0.00032769



$$c_{212}^{11}=0,9$$

Number of cycles	Probability
1	0.2
2	0.44
3	0.0608
4	0.02
5	0.00530432
6	0.002062746
7	0.00082038
8	0.000327774

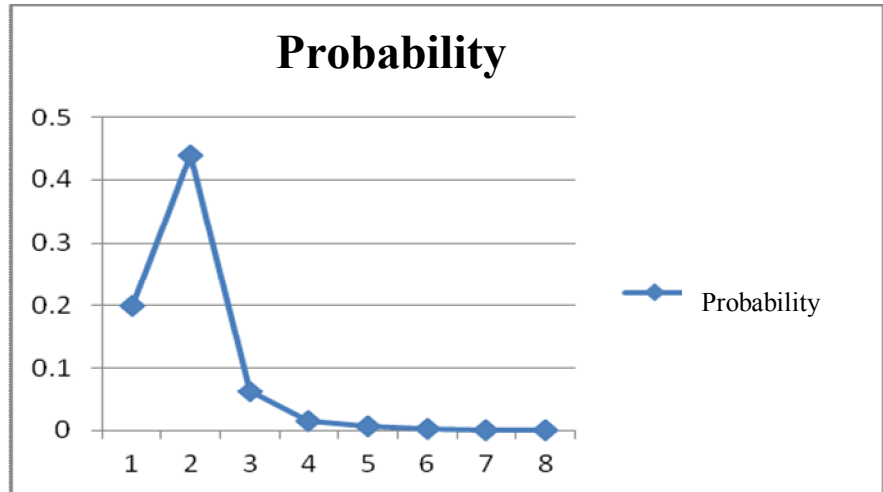


Fig. 7. Dependence of the probability of  $P_2$  operation state on the number of cycles for the variable influence weight parameter (continuation)

Hence, with growing number of subprocess execution cycles, the influence on probability of the state increases. It is determined by the mutual influence of subprocesses, which causes inhomogeneity of Markov chain.

For this case state  $S_1$  is desirable for operation  $P_2$  and state  $S_2$  is undesirable. The probability of undesirable state  $S_2$  reduces as the number of subprocess execution cycles grows.

### Conclusions

Inhomogeneous Markov model for cyclic BTP has been built. This model is proposed to be used for analyzing cyclicity influence on the management of branched technological processes. The obtained acyclic graph together with the inhomogeneous Markov model makes it possible to evaluate the risk of cyclic RTP realization variants and to select the variant having minimal risk.

Application of such models under uncertainty conditions is prospective for wide-class BCTP management.

### REFERENCES

1. Дубовой В. М. Оцінювання ризику розгалужено-циклічних технологічних процесів / В. М. Дубовой, І. В. Пилипенко, А. В. Денисов // Вісник ХНУ. – 2011. – № 6. – С. 165 – 168.  
 Наукові праці ВНТУ, 2014, № 4

2. Горкуненко А. Б. Математичне моделювання економічних циклічних процесів для їх автоматизованого аналізу та прогнозу / А. Б. Горкуненко, С. А. Лупенко, А. М. Луцків // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 269 – 275.
3. Слуцкий Е. Е. Сложение случайных причин как источник циклических процессов / Е. Е. Слуцкий // Вопр. Конъюнктуры. – 1997. – Т. 3, вып. 1. – С. 34 – 64.
4. Louçã F. Turbulence in Economics: An Evolutionary Appraisal of Cycles and Complexity in Historical Processes / Louçã F. – Cheltenham : Edgar Elgar, 1997. – 400 p.
5. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения / А. Т. Баруча-Рид. – М. : «Наука», 1969. – 512 с.
6. Дубовой В. М. Марковська модель прийняття рішень розгалужено-циклічними технологічними процесами / В. М. Дубовой, І. В. Пилипенко, О. Д. Никитенко // Вісник ВПІ. – 2012. – № 6. – С. 130 – 135.
7. Dubovoy V. M. Uncertain graph as the model of branching technological proctss / V. M. Dubovoy, I. V. Pylypenko, G. Y. Derman / Nauka i studia. – 2013. – № 17 (85). – P. 27 – 33.
8. Дубовой В. М. Моделі прийняття рішень в управлінні розподіленими динамічними системами : монографія / В. М. Дубовой, О. О. Ковалюк. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 190 с.
9. Савин Р. Тестирование Дот Ком, или Пособие по жестокому обращению с багами в интернет-стартапах / Р. Савин. – М. : Дело, 2007. – 312 с.

**Dubovoy Volodymir** – Dc. Sc. (Eng.), Prof., Head of the Department of Computer Control Systems.  
Vinnytsia National Technical University.

**Pylypenko Inna** – Postgraduate student of the Department of Computer Control Systems.  
Vinnytsia National Technial University.

**Stets Roman** – Student.  
Vinnytsia National Technical University.