

П. Д. Черняк

## ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ СМУГ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

У статті наведено алгоритм розрахунку плоскої задачі теорії пружності за методом скінченних смуг, показано його особливості та переваги. Виконано аналіз результатів у порівнянні з результатами, отриманими за методом скінченних елементів.

**Ключові слова:** скінченна смуга, метод скінченних смуг, метод скінченних елементів, плоский напружений стан.

### Актуальність задачі дослідження

Для розв'язку деяких задач теорії пружності, об'єктом дослідження яких є конструкції з постійними фізико-геометричними характеристиками та простими граничними умовами, найефективнішим є метод скінченних смуг (МСС). Особливо ефективний він у задачах, де один розмір є набагато більший за другий. У таких задачах можна ввести деякі спрощення, використовуючи загальні апроксимувальні функції. Використання апроксимувальних функцій є спільним як для методу скінченних елементів (МСЕ), так і для МСС, з тією відмінністю, що за МСС у поздовжньому напрямку розв'язують континуальну задачу з використанням лише тригонометричних функцій, без дискретизації на простіші функції. У поперечному напрямку розв'язують дискретну задачу, яка утворюється шляхом розбиття на скінченні смуги розділені вузловими лініями, робота яких описується лінійними функціями форми за аналогією до МСЕ (рис. 1а).

Широкий бібліографічний огляд розвитку МСС виконано у статті [3]. МСС достатньо детально описано в монографіях [1, 2].

Метою статті є дослідження збіжності результатів плоскої задачі теорії пружності на прикладі розрахунку консольної пластинки методом скінченних смуг.

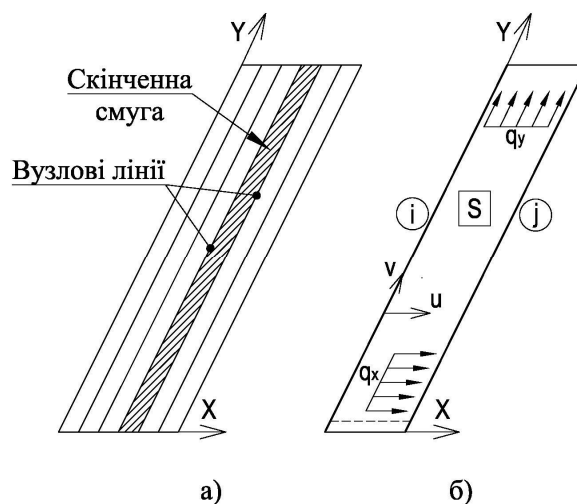


Рис. 1. Метод скінченних смуг: а) скінченно-елементна модель; б) скінченна смуга

### Викладення основного матеріалу

Розглядають ізотропну, тонку, з постійною товщиною пластину, на один із кінців якої накладені в'язі, що забороняють будь-які переміщення в площині  $x$  та  $y$ , інший кінець переміщується вільно. Навантаження прийняте у вигляді рівномірно-розподіленого на одиницю об'єму матеріалу, яке діє в напрямку відповідному до напрямку вектору переміщень

– ОУ. Напружено-деформований стан пластини описують плоскою задачею теорії пружності та знаходять за допомогою МСС у переміщеннях, тобто використовують еквівалентний принцип мінімуму потенціальної енергії, який виражається через поле можливих переміщень заданої форми.

Розглянемо скінченну смугу  $S$ , поведінку якої описують переміщенням вузлових ліній  $i$  та  $j$  (рис. 16).

У межах скінченної смуги  $S$  компоненти переміщень  $u$ ,  $v$  апроксимуємо функціями у вигляді  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$  [1]:

$$\begin{aligned} u &= \left[ \left( 1 - \frac{x}{b} \right) \quad \left( \frac{x}{b} \right) \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \sum_{m=1}^r Y_m(y) \\ v &= \left[ \left( 1 - \frac{x}{b} \right) \quad \left( \frac{x}{b} \right) \right] \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \sum_{m=1}^r Y'_m(y) \frac{L}{\mu_m} \end{aligned} \quad (1)$$

де  $r$  – кількість доданків членів ряду;  $L$  – довжина скінченної смуги,  $b$  – ширина скінченної смуги,  $i, j$  – відповідно індекси вузлових ліній  $\mu_m = m\pi$ .

$$Y_m(y) = \sum_{m=1}^r \left[ 1 - \cos\left(\frac{(m-0.5)\pi y}{L}\right) \right] \quad (2)$$

Слід зазначити, що за рахунок вибору функцій форми забезпечують умови закріплення на кінцях та умови неперервності на границях скінченної смуги.

Функції (1) подаємо у вигляді:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N]\{d\}, \quad (3)$$

де  $[N]$  – матриця функцій форм;  $\{d\}$  – вектор переміщень.

У випадку плоского напруженого стану вектор деформацій можна записати через вектор переміщень у вигляді:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = [B]\{d\}, \quad (4)$$

де  $[B]$  – матриця похідних від функцій форм.

Фізичні характеристики пластинки враховують за допомогою матриці пружності  $[D]$  розміром  $3 \times 3$  та виражають через модуль Юнга –  $E$  та коефіцієнт Пуассона –  $\nu$ :

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\text{де } D_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}; \quad D_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}; \quad D_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad D_1 = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}.$$

Тоді вектор напружень має такий вигляд:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{d\}. \quad (6)$$

Матриця жорсткості для одного скінченного елемента  $[k]^e$  має вигляд:

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Для ізотропної пластини постійної товщини на основі варіаційного принципу, урахувавши співвідношення  $[B_i]$  та  $[B_j]$ , матриця  $[k]$  має такий вигляд [5]:

$$k_{ij} = t \int_A [B_i]^T [D] [B_j] dA, \quad (8)$$

де  $i, j$  – індекси компонент переміщень у напрямку  $x$  та  $y$  відповідно.

Виконавши перетворення (1) – (5), можна записати матрицю жорсткості в явному вигляді:

$$[k]^e = \begin{bmatrix} \frac{3D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{3b} & -\frac{D_1 I_3 + D_{xy} I_4}{2} & -\frac{6D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{6b} & -\frac{D_1 I_3 - D_{xy} I_4}{2} \\ \frac{D_1 I_5 + D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 + 3D_{xy} I_8}{3b} & \frac{D_1 I_5 - D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 + 6D_{xy} I_8}{6b} \\ \frac{6D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{6b} & \frac{D_1 I_3 - D_{xy} I_4}{2} & \frac{3D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{3b} & \frac{D_1 I_3 - D_{xy} I_4}{2} \\ -\frac{D_1 I_5 - D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 - 6D_{xy} I_8}{6b} & \frac{D_1 I_5 + D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 + 3D_{xy} I_8}{3b} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де  $I_1 = t \int_0^l Y_{mu} Y_{nu} dy$ ;  $I_2 = t \int_0^l Y'_{mu} Y'_{nu} dy$ ;  $I_3 = t \int_0^l Y_{mu} Y'_{nv} dy$ ;  $I_4 = t \int_0^l Y'_{mu} Y_{nv} dy$ ;  $I_5 = t \int_0^l Y'_{mv} Y_{nu} dy$ ;  
 $I_6 = t \int_0^l Y_{mv} Y'_{nu} dy$ ;  $I_7 = t \int_0^l Y'_{mv} Y'_{nv} dy$ ;  $I_8 = t \int_0^l Y_{mv} Y_{nv} dy$ .

Ураховуючи властивості ортогональності, для випадку шарнірно закріпленої смуги на кінцях для  $m \neq n$  отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^l Y_m Y_n dy &= 0 \\ \int_0^l Y''_m Y''_n dy &= 0 \end{aligned}. \quad (10)$$

Вектор еквівалентних сил зосереджених у вузлах скінченної смуги  $\{F\}^e$ , має такий вигляд [5]:

$$\{f\}^e = [N]^T \{q\}, \quad (11)$$

де  $\{q\}$  – вектор об'ємних сил.

Для плоского напруженого стану, урахувавши лінійний розподіл переміщення в поперечному напрямку, вектор еквівалентних сил у випадку дії рівномірно розподіленого навантаження має такий вигляд:

$$\{f_q\}^e = \frac{b}{2} \left\{ \begin{array}{c} l \\ q_x \int_0^l Y_m dy \\ 0 \\ q_y \frac{l}{\mu_m} \int_0^l Y'_m dy \\ l \\ q_x \int_0^l Y_m dy \\ 0 \\ q_y \frac{l}{\mu_m} \int_0^l Y'_m dy \end{array} \right\}, \quad (12)$$

де  $q_x$  та  $q_y$  – компоненти вектора навантаження відповідно в напрямку  $x$  та  $y$ .

На підставі варіаційного принципу можливих переміщень Лагранжа за аналогією до методу скінченних елементів [5] основне рівняння має такий вигляд:

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad [K] = \sum_e [k]^e \quad \{F\} = \sum_e \{f\}^e, \quad (13)$$

де  $[K], \{F\}$  – матриця жорсткості та вектор еквівалентних навантажень, отримані в результаті ансамблювання.

### Приклад розрахунку плоскої задачі теорії пружності методом скінченних смуг

Об'єктом дослідження є тонка пластинка розмірами  $t=1$  мм,  $b=10$  мм та  $L=200$  мм. Навантаження рівномірно розподілене по площі пластини  $q=0.01$  Н/мм<sup>2</sup>. Пластинка ізотропна, модуль Юнга  $E=206000$  Н/мм<sup>2</sup> та коефіцієнт Пуассона  $\nu=0.3$ .

Розв'язуючи задачу методом скінченних елементів, використовують двовимірні чотирьохвузлові елементи – CPLSTN4 бібліотеки програмного комплексу Femap with NX Nastran [4]. За еталонну модель прийнята пластинка, розбита на 40 елементів уздовж поперечного напрямку та на 800 уздовж поздовжнього напрямку.

У табл. 1 наведені максимальні переміщення консольної пластини довжиною  $L=200$  мм за її розбиття на 1, 3, 6 та 10 скінченних смуг відповідно, за різної кількості накладених доданків (півхвиль).

Розподіл переміщень по довжині пластини на відстані  $L=50, 100, 150$  та  $200$  мм відображено на рис. 2.

Таблиця 1

Максимальні переміщення вільного кінця прямокутної пластини ( $L=200$ мм)  $f_{\max}$

Кількість доданків членів ряду, $r$	МСС				МСЕ	
	$f_{\max}^1$	$f_{\max}^3$	$f_{\max}^6$	$f_{\max}^{10}$	1 елем.	40x800 ел.
1	1.014	1.028	1.029	1.029	1.0627	1.061
3	1.060	1.076	1.078	1.078		
6	1.062	1.078	1.080	1.103		
10	1.063	1.078	1.080	1.107		

У таблиці 2 виконане порівняння розподілу максимальних напружень  $\sigma_y$  по довжині пластини з координатами  $L=50, 100, 150$  та  $200$  мм та  $b=0$ . Напруження отримані в результаті розрахунку за МСЕ еталонної моделі (40x800) та за МСС (кількість доданків членів ряду

відповідно 1, 3, 6 та 10). Показана відносна похибка розрахунку 1-ї смуги за МСС у порівнянні з еталонною моделлю.

Таблиця 2

Розподіл напруження  $\sigma_y$  (в МПа)

		$L=50$	$L=100$	$L=150$	$L=200$
MCE	$\sigma_y$	114.3	62.3	27.7	6.9
MCC ( $r=1$ )	$\sigma_y$	70.7	65.3	50.0	27.1
	%	38	5	81	293
MCC ( $r=3$ )	$\sigma_y$	103.7	72.7	26.7	9.1
	%	9	17	4	32
MCC ( $r=6$ )	$\sigma_y$	111.9	66.0	30.1	8.2
	%	2	6	9	19
MCC ( $r=10$ )	$\sigma_y$	114.2	67.3	29.4	6.9
	%	0	8	6	0

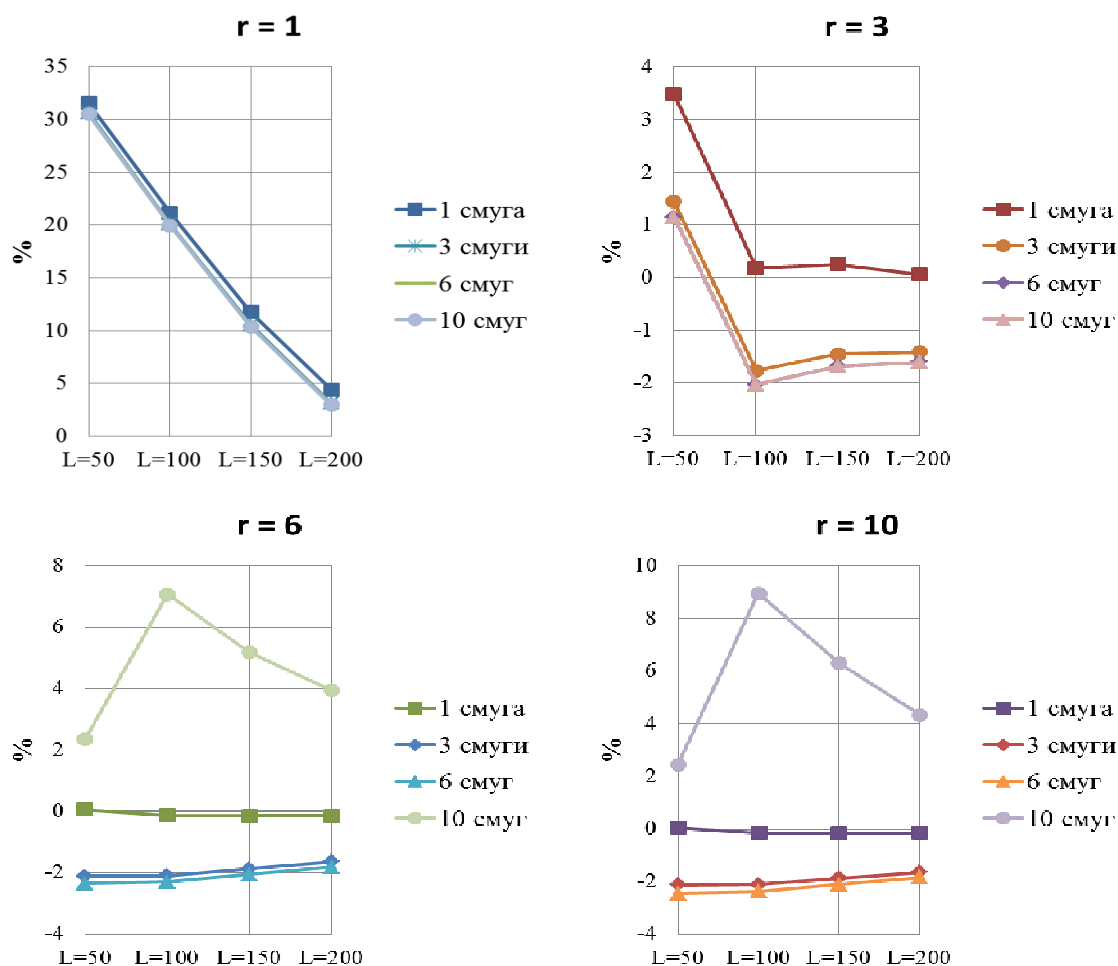


Рис. 2. Відносна похибка розподілу переміщень по довжині пластини за МСС у порівнянні з МСЕ

### Висновки

Виконавши аналіз числових даних, отриманих у результаті розрахунку за методом скінченних смуг консольної пластинки з простими граничними умовами, можна зробити висновок, що цей метод дозволяє отримати наближені розв'язки в межах допустимих похибок, при цьому за заданих простих граничних умов скінченна смуга з достатньою точністю описує роботу модельованої пластинки.

Так, аналізуючи максимальні переміщення вільного кінця пластини (табл. 1), можна отримати допустимий результат  $f^1 = 1.062$  у порівнянні з МСЕ  $f = 1.061$ , моделюючи пластинку однією смугою та просумувавши лише 6 доданків членів ряду (рис. 2). Розподіл напруження по довжині пластинки з максимальною відносною похибкою 8 % у порівнянні з МСЕ отримано при кількості членів ряду  $r=10$ .

Варто зазначити, що МСС найефективніший для розрахунку окремих конструкцій, які мають постійні фізико-геометричні характеристики та прості граничні умови у відповідних напрямках перерізу. За цих умов з'являється можливість спрощення розрахункової системи рівнянь на набір підсистем меншого порядку, кожна з яких відповідає своїй компоненті ряду Фур'є в поздовжньому напрямку. Виконавши дискретизацію задачі лише в одному напрямку, інші описують нерозривною тригонометричною функцією, що дозволяє значно оптимізувати процес розв'язку поставленої задачі. Вказане спрощення скорочує розмірність задачі на одиницю та веде до суттєвих спрощень під час побудови розрахункових алгоритмів. Відповідно і на порядок зменшується кількість невідомих, скорочується розмір та ширина ряду матриці коефіцієнтів розрахункової системи лінійних алгебраїчних рівнянь, зменшується кількість вихідних даних. Зазначена особливість МСС є його основною перевагою.

До недоліків МСС можна віднести його специфіку використання, оскільки найбільш результативно цей метод може бути застосований до задач, об'єкти дослідження яких мають постійні геометричні та фізичні характеристики вздовж однієї із координат конструкції, зокрема під час розрахунку мостових, тунельних та інших конструкцій з пластин.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Cheung Y. K. Finite Strip Method in Structural Analysis / Cheung Y. K. – Oxford. : Pergamon Press, 1976. – 233 p.
2. Cheung Y. K. The Finite Strip Method / Y. K. Cheung, L. G. Tham. – Boca Raton. : CRC Press, 1997. – 416 p.
3. Friedrich R. Finite strip method: 30 years A bibliography (1968-1998) / R. Friedrich // Int. J. for Computer-Aided Engineering. – 2000. – № 17. 1. – P. 92 – 111.
4. Рудаков К. Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций / Рудаков К. Н. – К. : НТУУ "КПИ", 2011. – 317 с.
5. Зинкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зинкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 318 с.

**Черняк Павло Дмитрович** – аспірант кафедри мостів та будівельної механіки.

Національний університет «Львівська політехніка».

P. D. Cherniak

## STUDYING CONVERGENCE OF THE FINITE STRIP METHOD IN SOLVING PLANE ELASTICITY PROBLEM

*The paper presents an algorithm of solving the plane elasticity problem by finite strip method and demonstrates its distinguishing features and advantages. Analysis of the results has been performed as compared with those obtained by the finite element method.*

**Keywords:** *finite strip, finite strip method, finite element method, plane stress state.*

### State of the art and research tasks

The finite strip method (FSM) has proved to be the most efficient one for solving certain plane elasticity problems, which deal with structures having constant physical-geometrical characteristics and simple boundary conditions. This is especially true for the problems where one size is much bigger than the other one. In such problems some simplifications could be introduced using general approximation functions. Usage of approximation functions is common both for finite element method (FEM) and for FSM, the difference being in that FSM uses only trigonometric functions for solving continual problem in longitudinal direction without discretization into simple functions. In opposite direction a discrete problem, created by division into finite strips separated by nodal lines, is solved. Their work is described by linear shape functions by analogy with FEM (Fig. 1, a).

A detailed bibliographical overview of FSM development is presented in paper [3]. A comprehensive description of FSM is given in monographs [1, 2].

The paper aims at studying convergence of the plane elasticity problem by the example of a console plate calculation by the finite strip method.

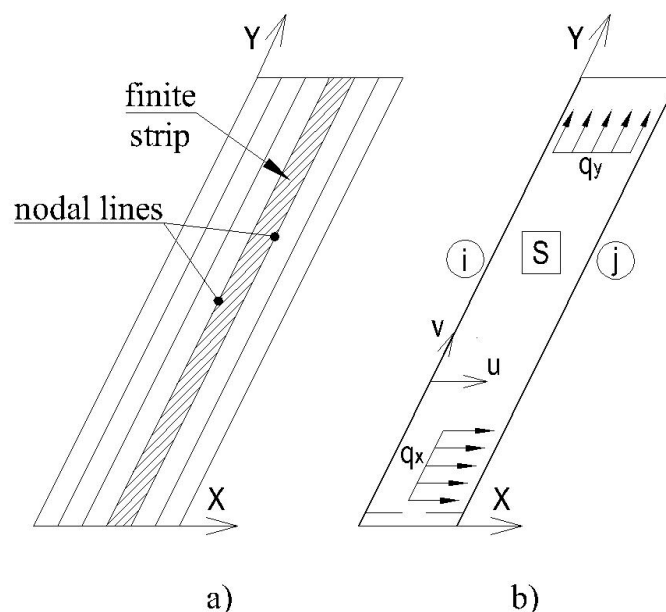


Fig. 1. The finite strip method a) finite-element strip; b) finite strip

### Presentation of the main material

A thin isotropic plate with a uniform thickness is considered. To one end of it ligatures are applied, preventing any displacements in  $x$ ,  $y$ -plane, while the other end moves freely. The load is assumed to be distributed uniformly per unit volume of the material and to be acting in the direction corresponding to the direction of the displacement vector  $OY$ . Stress-strain state of the plate is described by the plane elasticity problem and is found using FSM in the displacements, i.e. an equivalent principle of the minimum potential energy is used, which is expressed through the field

of possible displacements of the given shape. Let us consider a finite strip  $S$ , the behavior of which is described by the displacements of nodal lines  $i$  and  $j$  (Fig. 1, b).

Components of displacements  $u$ ,  $v$  of finite strip  $S$  are approximated by functions in the form of  $u(x, y)$  and  $v(x, y)$  [1]:

$$\begin{aligned} u &= \left[ \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{b} \\ \frac{x}{b} \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \sum_{m=1}^r Y_m(y) \\ v &= \left[ \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{b} \\ \frac{x}{b} \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \sum_{m=1}^r Y_m'(y) \frac{L}{\mu_m} \end{aligned} \quad (1)$$

where  $r$  – a number of terms in the series;  $L$  – the finite strip length;  $b$  – the finite strip width,  $i, j$  – respective indices of nodal lines,  $\mu_m = m\pi$ .

$$Y_m(y) = \sum_{m=1}^r \left[ 1 - \cos\left(\frac{(m-0.5)\pi y}{L}\right) \right]. \quad (2)$$

It should be noted that through the choice of shape functions support conditions at the ends are provided as well as continuity conditions at the finite strip boundaries.

Functions (1) are presented in the form of

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{d\}, \quad (3)$$

where  $[N]$  is a shape function matrix;  $\{d\}$  – displacement vector.

In the case of plane stress state and if the displacement vector is known, the deformation vector could be represented in the form of

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = [B] \{d\}, \quad (4)$$

where  $[B]$  – a matrix of the shape function derivatives.

Physical characteristics of the plate are taken into account by means of elasticity matrix  $[D]$  with the size of  $3 \times 3$  and are described through the Young's modulus  $E$  and Poisson's ratio  $\nu$ :

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

where  $D_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}$ ;  $D_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}$ ;  $D_{xy} = \frac{E\nu}{2(1+\nu)}$   $D_1 = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}$ .

Then the stress vector will have the following form:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D][B] \{d\}. \quad (6)$$

Stiffness matrix of finite element  $[k]^e$  is given by

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}. \quad (7)$$



For the isotropic plate of uniform thickness, on the basis of the variation principle and taking into account ratio of  $[B_i]$  and  $[B_j]$ , the matrix will be given by [5]:

$$k_{ij} = t \int_A [B_i]^T [D] [B_j] dA, \quad (8)$$

where  $i, j$  are indices of the components of the displacements in the directions  $x$  and  $y$  respectively. After performing transformations (1) – (5) the stiffness matrix can be written in an explicit form as

$$[k]^e = \begin{bmatrix} \frac{3D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{3b} & \frac{D_1 I_3 + D_{xy} I_4}{2} & \frac{6D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{6b} & \frac{D_1 I_3 - D_{xy} I_4}{2} \\ \frac{D_1 I_5 + D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 + 3D_{xy} I_8}{3b} & \frac{D_1 I_5 - D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 + 6D_{xy} I_8}{6b} \\ \frac{6D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{6b} & \frac{D_1 I_3 - D_{xy} I_4}{2} & \frac{3D_x I_1 + D_{xy} b^2 I_2}{3b} & \frac{D_1 I_3 - D_{xy} I_4}{2} \\ \frac{D_1 I_5 - D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 - 6D_{xy} I_8}{6b} & \frac{D_1 I_5 + D_{xy} I_6}{2} & \frac{D_y b^2 I_7 + 3D_{xy} I_8}{3b} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

where  $I_1 = t \int_0^l Y_{mu} Y_{nu} dy$ ;  $I_2 = t \int_0^l Y'_{mu} Y'_{nu} dy$ ;  $I_3 = t \int_0^l Y_{mu} Y'_{nv} dy$ ;  $I_4 = t \int_0^l Y'_{mu} Y_{nv} dy$ ;  $I_5 = t \int_0^l Y'_{mv} Y_{nu} dy$ ;

$I_6 = t \int_0^l Y_{mv} Y'_{nu} dy$ ;  $I_7 = t \int_0^l Y'_{mv} Y'_{nv} dy$ ;  $I_8 = t \int_0^l Y_{mv} Y_{nv} dy$ .

Taking into account the orthogonality conditions, for the case of strip with hinged ends for  $m \neq n$  we obtain:

$$\begin{aligned} \int_0^l Y_m Y_n dy &= 0 \\ \int_0^l Y''_m Y''_n dy &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

The vector of equivalent forces, concentrated in the nodes of finite strip  $\{F\}^e$ , has the following form [5]:

$$\{f\}^e = [N]^T \{q\}, \quad (11)$$

where  $\{q\}$  is the vector of volumetric forces.

For the plane stress state, taking into account linear distribution of the displacement in the transverse direction, in the case of uniformly distributed load the vector of equivalent forces will be given by

$$\{f_q\}^e = \frac{b}{2} \left\{ \begin{array}{c} l \\ q_x \int_0^l Y_m dy \\ 0 \\ q_y \frac{l}{\mu_m} \int_0^l Y'_m dy \\ l \\ q_x \int_0^l Y_m dy \\ 0 \\ q_y \frac{l}{\mu_m} \int_0^l Y'_m dy \end{array} \right\}, \quad (12)$$

where  $q_x$  and  $q_y$  are the load vector components in  $x, y$  directions respectively.

On the basis of Lagrange variation principle of possible displacements, by the analogy with the finite element method [5], the main equation will have the form of

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad [K] = \sum_e [k]^e \quad \{F\} = \sum_e \{f\}^e, \quad (13)$$

where  $[K], \{F\}$  are stiffness matrix and the vector of equivalent loads obtained by means of assembling.

### An example of the plane elasticity problem calculation by the finite strip method

Research object is a thin plate with the following dimensions:  $t = 1\text{ mm}$ ,  $b = 10\text{ mm}$  and  $L = 200\text{ mm}$ . Load  $q = 0.01\text{ N/mm}^2$  is distributed uniformly over the plate area. The plate is isotropic, Young's modulus  $E = 206000\text{ N/mm}^2$  and Poisson ratio  $\nu = 0.3$ .

For problem solution by the finite element method two-dimensional four-node elements CPLSTN4 from the library of software package Femap with NX Nastran are used [4]. The plate model with division into 40 elements in the transverse direction and into 800 elements in another direction is taken as a reference.

Table 1 presents maximal displacements of the console plate with the length  $L = 200\text{ mm}$  and divisions into 1, 3, 6 and 10 finite strips respectively as well as with different numbers of superimposed terms (half-waves).

Distribution of displacements along the plate length at the distances  $L = 50, 100, 150$  and  $200\text{ mm}$  from the coordinate origin is presented in Fig. 2.

Table 1

Maximal displacements of the free end of the rectangular plate ( $L=200\text{ mm}$ ),  $f_{\max}$

FSM					FEM	
The number of terms in the series $r$	$f_{\max}^1$	$f_{\max}^3$	$f_{\max}^6$	$f_{\max}^{10}$	1 element	40x800 elements
1	1.014	1.028	1.029	1.029	1.0627	1.061
3	1.060	1.076	1.078	1.078		
6	1.062	1.078	1.080	1.103		
10	1.063	1.078	1.080	1.107		

Table 2 presents a comparison of maximal stress  $\sigma_y$  distribution along the length of the plate for coordinates  $L = 50, 100, 150, 200\text{ mm}$  and  $b = 0$ . The stresses are obtained by FEM calculation of the reference model (40 x 800) as well as by using FSM (the number of terms in the series is 1, 3, 6 and 10 respectively). A relative error of the first strip calculation by FSM is given as compared with the reference model.

Table 2

Distribution of stress  $\sigma_y$  (MPa)

		L=50	L=100	L=150	L=200
FEM	$\sigma_y$	114.3	62.3	27.7	6.9
FSM (r=1)	$\sigma_y$	70.7	65.3	50.0	27.1
	%	38	5	81	293
FSM (r=3)	$\sigma_y$	103.7	72.7	26.7	9.1
	%	9	17	4	32
FSM (r=6)	$\sigma_y$	111.9	66.0	30.1	8.2
	%	2	6	9	19
FSM (r=10)	$\sigma_y$	114.2	67.3	29.4	6.9
	%	0	8	6	0

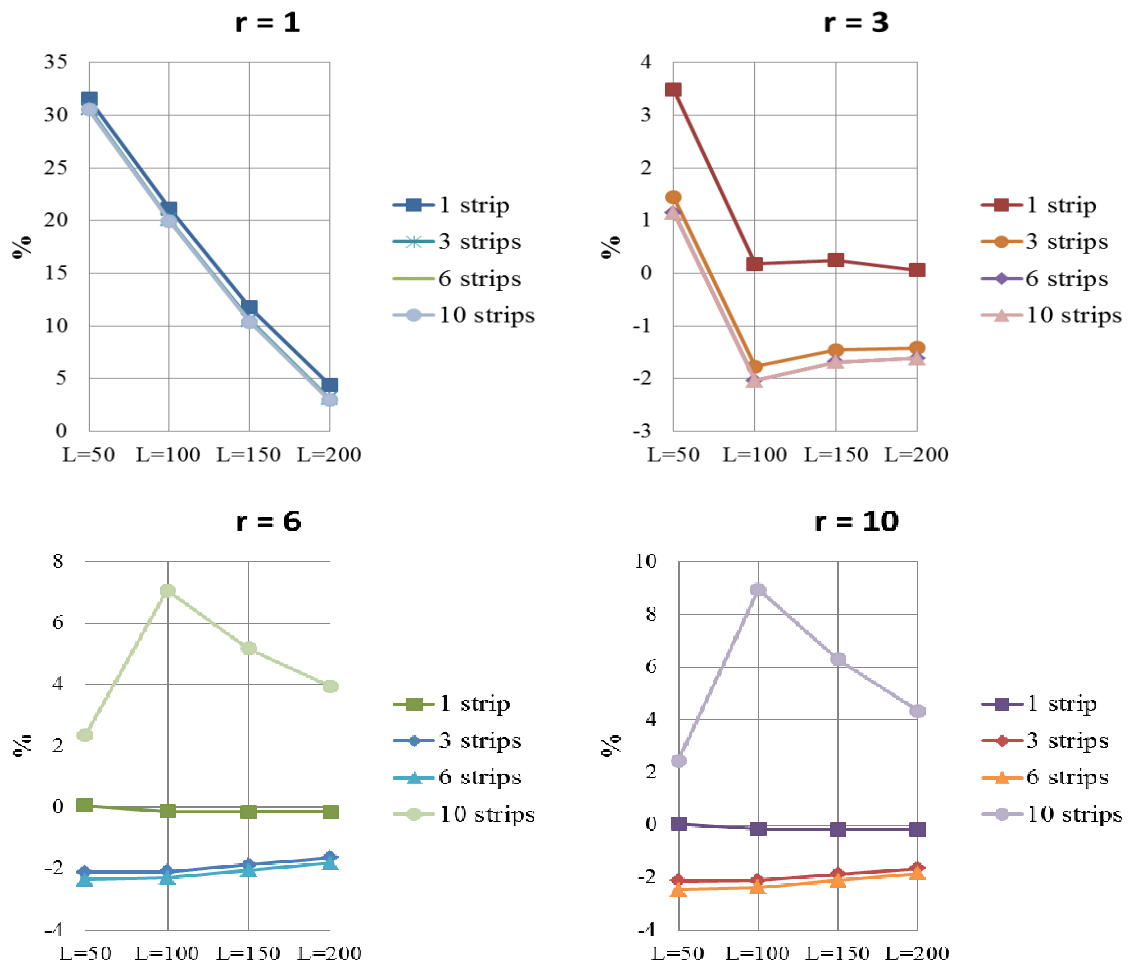


Fig. 2. Relative error of the displacement distribution along the plate length, when using FSM, in comparison with FEM

### Conclusions

After analyzing numerical data, obtained as a result of calculation of the console plate by the finite strip method with simple boundary conditions, a conclusion can be made that this method makes it possible to obtain approximate solutions within the range of permissible errors. Under

given simple boundary conditions, a single finite strip provides good description of the simulated plate.

Analysis of maximal displacements of the free end of the plate (Table 1) shows that an acceptable result  $f^1 = 1.062$  can be obtained as compared with that, obtained by FEM -  $f = 1.061$ , simulating the plate by a single strip and summarizing only 6 terms of the series (Fig. 2). Stress distribution along the plate length has been obtained with maximal relative error 8 %, as compared with FEM, with the number of terms in the series  $r = 10$ .

It should be noted that FSM is most effective for calculating separate structures having constant physical-geometrical characteristics and simple boundary conditions in corresponding cross-sectional directions. Under these conditions the possibility of simplifying the design system of equations using a lower-order set of subsystems, each of which corresponds to its own component of the Fourier series in the longitudinal direction, is more convenient. By performing discretization of the problem in one direction only and using continuous trigonometric functions in the other direction, the process of solving the set problem could be simplified considerably. The above simplification reduces dimensionality of the problem and leads to significant simplifications in the design algorithm development. There is also corresponding reduction of the number of unknowns, the size and bandwidth of the coefficient matrix of the design system of linear algebraic equations are decreased and the amount of initial data is reduced. This feature of FSM determines its main advantage.

Among disadvantages of FSM we can mention the specificity of its usage: this method gives the best results while applied to the problems, the research objects of which have unchanged geometrical and physical characteristics along one of the coordinates, particularly, for calculating bridge, box-like and other elongated structures, especially plate structures.

#### REFERENCES

1. Cheung Y. K. Finite Strip Method in Structural Analysis / Cheung Y. K. – Oxford. : Pergamon Press, 1976. – 233 p.
2. Cheung Y. K. The Finite Strip Method / Y. K. Cheung, L. G. Tham. – Boca Raton. : CRC Press, 1997. – 416 p.
3. Friedrich R. Finite strip method: 30 years A bibliography (1968-1998) / R. Friedrich // Int. J. for Computer-Aided Engineering. – 2000. – № 17. 1. – P. 92 – 111.
4. Рудаков К. Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций / Рудаков К. Н. – К. : НТУУ "КПИ", 2011. – 317 с.
5. Зинкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зинкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 318 с.

***Cherniak Pavlo*** – Post-graduate student of the Department of Bridges and Structural Mechanics. National University “Lviv Polytechnic” .