УДК 621.3(075)

Ю. Г. Ведміцький, к. т. н.; В. В. Кухарчук, д. т. н., проф.

ПЕРЕХІДНІ КОМПЛЕКСНІ СХЕМИ, ЗАКОНИ КІРХГОФА ТА КОМПОНЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В КОМПЛЕКСНО-ЧАСОВІЙ ФОРМІ ВІДОБРАЖЕННЯ

У роботі запропоновано й розроблено поняття перехідної комплексної схеми електричного кола та визначено її істотні властивості – закони Кірхгофа й компонентні співвідношення в комплексно-часовій формі відображення, які у своїй єдності є основними елементами теоретичного базису символьно-класичного метода розв'язування задачі Коші, сформульованої в термінах миттєвих комплексних струмів і напруг для розрахунку перехідних процесів у лінійних електричних колах синусоїдного та періодичного несинусоїдного струмів.

Ключові слова: *електричне коло, перехідний процес, задача Коші, комплексно-символічний метод, миттєві комплексні струми й напруги, закони Кірхгофа, компонентні співвідношення, диференціальні рівняння руху, закони комутації в комплексній формі.*

Вступ

Розробка та вдосконалення методів розрахунку й аналізу перехідних процесів в електричних колах синусоїдного струму й дотепер залишаються важливою й актуальною задачею під час дослідження електротехнічних систем з *періодичною* формою руху.

Такий статус задачі зумовлений наявністю потреб практичного походження – у своєму прояві різноманітних як за глибиною проникнення, так і за обсягом охоплення [1]. Це пояснюється, з одного боку, підвищеною, а подекуди навіть і недопустимо критичною, чутливістю робочих параметрів і характеристик зазначених технічних систем, наприклад, об'єктів силової електроенергетики або електромеханіки, до режимів перехідного процесу, який неодноразово можна спостерігати в них навіть протягом одного виробничого циклу, а з іншого – обсягом ареалу таких систем та їх загальним сукупним упливом на техногенну сферу загалом.

Водночас важливим залишається й суто теоретичний складник зазначеної задачі [2], оскільки система тригонометричних функцій з кратними частотами виду $\cos\left(m\frac{2\pi}{T}t\right)$ і $\sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right)$, де $m=(1, 2,...)$, є одним із фундаментальних та найуживаніших ортогональних нормованих базисів гільбертового простору миттєвих напруг і струмів, елементи якого в змозі визначати еволюційний рух кожної із заявлених вище технічних систем не тільки в усталеному режимі роботи, але й під час перехідного процесу. В останньому випадку фізичний перехідний процес у системі має супроводжуватися одночасною зміною всіх коефіцієнтів тригонометричного ряду Фур'є в часі, а за умови сталості періоду T – навіть здатен перебувати у відношенні *еквівалентності* до такої зміни. Для лінійних або лінеаризованих електротехнічних систем із періодичною формою руху це означає, що задачу Коші, яка, як відомо, є математичною інтерпретацією задачі аналізу перехідного процесу в фізичних та технічних системах із зосередженими параметрами, можна сформулювати й розв'язати відносно кожного гармонічного складника з тригонометричного ряду окремо, а потому остаточний її розв'язок відшукати, скориставшись принципом накладання (або інакше – принципом суперпозиції). Водночас, оскільки коефіцієнти Фур'є кожної з перехідних гармонік, наприклад, струму, прямо визначають її амплітуду та початкову фазу, унаслідок чого та набуває вигляду

$$i^{(m)}(t) = I_m^{(m)}(t) sin\left[m\omega t + \psi_i^{(m)}(t)\right], \tag{1}$$

саму задачу Коші доцільно формулювати не в термінах миттєвих струмів $i^{(m)}(t)$ (чи напруг), але в термінах їх комплексних зображень, тобто *миттєвих комплексних струмів*

$$\underline{I}_m^{(m)}(t) = I_m^{(m)}(t)\, e^{j\psi_i^{(m)}(t)}, \tag{2}$$

де

$$i^{(m)}(t) = Im\left\{\underline{I}_m^{(m)}(t) e^{jm\omega t}\right\}. \tag{3}$$

За такого підходу, як це показано в роботі [3], обидві множини функцій $I_m^{(m)}(t)$ і $\psi_i^{(m)}(t)$, а в разі зміни під час перехідного процесу періоду $T(t)$ – ще й функції $m\omega(t)$, їх перші та вищі похідні, інтеграли, інтегральні перетворення як окремо, так і в різних сполученнях здатні описувати й виявляти не тільки видимі, але й глибинні, приховані та аномальні властивості перебігу перехідних процесів в електричному колі і в якісній формі, і аналітично.

Варто зауважити, що теоретична електротехніка задачу аналізу перехідних процесів в електричних колах синусоїдного струму на сьогодні здатна системно і результативно розв’язувати практично в усіх її проявах. Для цього пропонують чимало методів розрахунку, серед яких – класичний, операторний, спектральний методи, метод інтеграла Дюамеля тощо. Сутність наведених методів ґрунтовно розкривають у численних наукових та навчальних літературних джерелах, наприклад, [4 – 13]. Водночас, як свідчать дослідження більшості із зазначених вище видань, фундаментальну задачу Коші формулюють у них винятково в термінах миттєвих струмів і напруг. Такий підхід домінує і в тих випадках, коли з метою розв’язування зазначеної задачі використовують інтегральні перетворення, зокрема інтеграли Фур’є, Лапласа або Карсона. На превеликий жаль, можливість формування задачі Коші відносно функцій миттєвих *комплексних* струмів виду (2) в зазначеній бібліографії не тільки не розкрито, про неї навіть і не згадується. Певне, саме це й пояснює той факт, що методичний супровід цього підходу, попри затребуваність у ньому, перебуває на сьогодні в недостатньо розробленому й незадовільно розгорнутому стані.

Отож, *метою* цієї роботи є розробка на основі функцій виду (2) поняття перехідної комплексної схеми електричного кола, визначення істотних ознак і фундаментальних властивостей такої схеми, зокрема законів Кірхгофа і компонентних співвідношень у комплексно-часовій формі відображення, розробка основних принципів і правил її побудови. У своїй сукупності розроблені теоретичні поняття і співвідношення мають стати важливими елементами теоретичного базису *символьно-класичного метода* – одного із інформативних методів розрахунку та аналізу перехідних процесів у лінійних колах синусоїдного струму [3].

1 Диференціальне рівняння перехідного процесу в комплексній формі

Насамперед зауважимо, що зараз і надалі результати дослідження будуть наведені винятково щодо першої (тобто основної) гармоніки тригонометричного ряду Фур’є, однак виписані для неї співвідношення з урахуванням порядку кратності зберігатимуть свою чинність і для вищих гармонік.

Відомо, що перехідний процес у лінійному електричному колі з декількома джерелами синусоїдної напруги однакової частоти

$$u_1 = U_{m_1} sin(\omega t + \psi_{u_1}),\ \ldots,\ u_\nu = U_{m_\nu} sin(\omega t + \psi_{u_\nu})$$

можна описати лінійним звичайним диференціальним рівнянням *n*-го порядку, складеним відносно, наприклад, деякого миттєвого струму $i(t)$ виду (1) на основі законів Кірхгофа і компонентних співвідношень,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k i}{d t^k} = \sum_{q=1}^{v} \sum_{s=0}^{w} b_{sq} \frac{d^s u_q}{d t^s} \tag{4}$$

з n початковими умовами: $i(0_+)$, $\dfrac{d\, i(0_+)}{d t}, \ldots, \dfrac{d^{n-1} i(0_+)}{d t^{n-1}}$.

Водночас, урахувавши співвідношення (3), визначену в спосіб (4) задачу Коші допустимо, а в багатьох випадках і доцільно, формулювати інакше – у термінах миттєвих комплексних струмів та напруг. За такої інтерпретації перехідний процес у колі відображатиметься диференціальним рівнянням у комплексній формі, доповненим n початковими умовами виду: $\underline{I}_m(0_+)$, $\dfrac{d\, \underline{I}_m(0_+)}{d t}, \ldots, \dfrac{d^{n-1} \underline{I}_m(0_+)}{d t^{n-1}}$. Саме ж рівняння матиме вигляд:

$$\sum_{k=0}^{n} \underline{A}_k \frac{d^k \underline{I}_m(t)}{d t^k} = \sum_{q=1}^{v} \left(\underline{B}_{0_q} \cdot \underline{U}_{m_q} \right). \tag{5}$$

Комплексні коефіцієнти в рівнянні (5) можуть бути визначені в різний спосіб.

Наприклад, їх можна розрахувати через коефіцієнти диференціального рівняння (4), але за умови, якщо тільки таке рівняння для заданого кола буде отримано заздалегідь. Тоді, як це показано в роботі [3], для електричного кола *довільного* порядку (з наперед не заданим числом ступенів вільності) закон перетворення коефіцієнтів рівняння (4) у відповідні коефіцієнти рівняння (5) перебуватиме в підпорядкуванні до біному Ньютона і матиме такий вигляд:

$$\underline{A}_k = \sum_{p=0}^{n-k} \left[\frac{(k+p)!}{k!\; p!} \cdot (j\omega)^p \cdot a_{k+p} \right], \quad \underline{B}_{0_q} = \sum_{s=0}^{n} (j\omega)^s\, b_{qs}\,, \tag{6}$$

оскільки, по-перше, кожна k-та похідна миттєвого струму $i(t)$ в лівій частині (4) може бути записана через миттєвий комплексний струм $\underline{I}_m(t)$ і його похідні як

$$a_k \frac{d^k i}{d t^k} = \mathrm{Im}\left\{ a_k \cdot \sum_{p=0}^{k} \left[\frac{k!}{p!(k-p)!} \cdot (j\omega)^p \cdot \frac{d^{k-p} \underline{I}_m(t)}{d t^{k-p}} \right] \cdot e^{j\omega t} \right\}, \tag{7}$$

що дозволяє в подальшому здійснити перегрупування та привести отриманий вираз до виду лівої частини формули (5):

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ a_k \cdot \sum_{p=0}^{k} \left[\frac{k!}{p!(k-p)!} \cdot (j\omega)^p \cdot \frac{d^{k-p} \underline{I}_m(t)}{d t^{k-p}} \right] \right\} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \sum_{p=0}^{n-k} \left[\frac{(k+p)!}{k!\; p!} \cdot (j\omega)^p \cdot a_{k+p} \right] \cdot \frac{d^k \underline{I}_m(t)}{d t^k} \right\},$$

і, по-друге, кожна s-та похідна вже в правій частині рівняння (4) також може бути записана подібним чином і на цій основі з урахуванням незмінності в часі амплітуд, початкових фаз і частоти зовнішніх джерел енергії переписана в комплексній формі, приведеній до виду вже правої частини формули (5):

$$\sum_{q=1}^{v} \left(\sum_{s=0}^{n} b_{sq} \frac{d^s u_q}{d t^s} \right) = \mathrm{Im}\left\{ \sum_{q=1}^{v} \left[\sum_{s=0}^{n} \left((j\omega)^s \cdot b_{sq} \right) \cdot \underline{U}_{m_q} \right] \cdot e^{j\omega t} \right\} = \mathrm{Im}\left\{ \sum_{q=1}^{v} \left(\underline{B}_{0_q} \underline{U}_{m_q} \right) \cdot e^{j\omega t} \right\}.$$

Водночас варто зазначити, що, окрім наведеного опосередкованого способу, коефіцієнти рівняння (5), власне, як і саме рівняння, можуть бути отримані безпосередньо за допомогою перехідної комплексної схеми досліджуваного кола та законів Кірхгофа в комплексно-часовій формі відображення, що дозволить уникнути необхідності попереднього складання рівняння (4) та визначення його коефіцієнтів із подальшим перерахуванням за формулами (6).

2 Перехідні комплексні схеми, закони Кірхгофа та компонентні співвідношення в комплексно-часовій формі відображення

Миттєві комплексні струми та напруги є самодостатніми аналітичними об’єктами, унаслідок чого диференціальне рівняння перехідного процесу виду (5) може бути побудоване за єдиними правилами в зручний і загальноприйнятий у теоретичній електротехніці спосіб, тобто за допомогою топологічно структурованих та імперативно підпорядкованих об’єктів.

Уведемо поняття *перехідної комплексної схеми*, якою називатимемо схематично і топологічно структурований двополюсними елементами об’єкт із миттєвими комплексними струмами у вітках та напругами на його ділянках, математично зв’язаними поміж собою законами Кірхгофа та компонентними співвідношеннями, виписаними в комплексно-часовій формі відображення.

Закони Кірхгофа в комплексно-часовій формі є основою для формування системи інтегро-диференціальних рівнянь, складених відносно миттєвих комплексних струмів у вітках або напруг на них, які надалі можна використовувати і для побудови диференціальних рівнянь виду (5) або (4), і в самостійний спосіб – для більш глибокого та уточненого дослідження перехідних процесів в електричному колі.

Сформулюємо зазначені закони.

Перший закон Кірхгофа в комплексно-часовій формі стверджує, що алгебраїчна сума миттєвих комплексних струмів віток, які сходяться у вузлі перехідної комплексної схеми в будь-який момент часу дорівнює нулю:

$$\sum_{l=1}^{h} \underline{I}_{m_l}\left(t\right) = 0\,. \tag{8}$$

Другий закон Кірхгофа в комплексно-часовій формі, у свою чергу, встановлює, що алгебраїчна сума миттєвих комплексних напруг на окремих елементах довільного замкнутого контуру перехідної комплексної схеми в будь-який момент часу дорівнює нулю:

$$\sum_{l=1}^{c} \underline{U}_{m_l}\left(t\right) = 0\,. \tag{9}$$

Методика складання системи рівнянь за законами Кірхгофа в комплексно-часовій формі не відрізняється від усталеної.

Варто зазначити, що обидва наведених закони Кірхгофа в комплексно-часовій формі є більше *постулатами,* оскільки цим законам властивий більший ступінь узагальненості, їх неможливо ані ввести, ані обґрунтувати через закони Кірхгофа, виписані відносно миттєвих напруг і струмів (тобто в класичній формі). Водночас така узагальненість споріднює обидві форми й унеможливлює виникнення протиріччя між ними. Чинність законів Кірхгофа в комплексно-часовій формі не тільки залишає в силі, але й передбачає дієздатність і спроможність їх класичних аналогів. Такий характер відношення між відомими та індуктивно введеними формами законів Кірхгофа є надзвичайно важливим, оскільки слугує необхідною умовою істинності останніх. Водночас підтвердити й затвердити такий статус або ж, що не виключено, і протилежне – спростувати його, звичайно ж, має практична перевірка – вимоглива, тривала і всебічна.

Одним із важливих наслідків вищесказаного є й те, що закони Кірхгофа в комплексно-часовій формі завдяки своїй узагальненості підпорядковують собі не тільки усталені режими роботи електричних кіл синусоїдного струму, але й перебіг перехідних процесів у них, на відміну від законів Кірхгофа в комплексній формі, які, як відомо, вибудовано на основі класичних законів для теоретичного супроводу поширеного метода комплексних амплітуд (символічного метода) з метою розрахунку усталених режимів у зазначених електричних колах.

Для розрахунку та аналізу перехідних процесів, окрім законів Кірхгофа в комплексно-часовій формі відображення (8) та (9), потрібно використовувати ще й спеціальні математичні рівняння, які в теоретичній електротехніці сукупно називають *компонентними співвідношеннями*. Компонентні співвідношення виявляють математичні зв’язки між миттєвими напругами та струмами на окремих ідеалізованих пасивних елементах електричного кола. Звісно у нашому випадку ці зв’язки мають бути переписані в комплексно-часовій формі. Важливо наголосити, що в таких зв’язках між миттєвими напругами і струмами, нарізно взятих основних пасивних двополюсних елементів електричного кола, знаходять своє відображення важливі закони електротехніки, зокрема закони Ома та електромагнітної індукції Фарадея, тому компонентні співвідношення, представлені комплексно-часовою формою, також мають бути безпосереднім виявом цих законів.

Із сказаного вище випливає, що до складу перехідних комплексних схем повинні входити елементи тільки з такими властивостями, за яких миттєві *комплексні* струми і напруги бієктивно відповідатимуть миттєвим струмам і напругам на окремих елементах реальних електричних кіл. Саме така взаємна однозначність і має стати тим стрижнем, який зможе забезпечити необхідну адекватність отриманих результатів дослідження реаліям вихідної задачі під час аналізу динамічних режимів на основі перехідних комплексних схем.

Отже, для основних пасивних двополюсних елементів електричного кола: активного опору, індуктивності та ємності – компонентні співвідношення в комплексно-часовій формі сформуємо на основі класичних співвідношень, виписаних для миттєвих струмів і напруг.

Резистивний елемент. Для цього двополюсного елемента математичний зв'язок між миттєвими напругою і струмом визначають законом Ома [8]:

$$u(t) = R\,i(t), \tag{10}$$

де $u(t) = U_m(t) sin[\omega t + \psi_u(t)]$, $i(t) = I_m(t)\sin[\omega t + \psi_i(t)]$, що з урахуванням (1) – (3) дозволяє отримати співвідношення для їх комплексних зображень у вигляді закону Ома в комплексно-часовій формі:

$$\underline{U}_m(t) = R\,\underline{I}_m(t). \tag{11}$$

Індуктивний елемент. Математичний зв’язок між миттєвими напругою і струмом на цьому двополюсному елементі зумовлений законом електромагнітної індукції Фарадея, на основі якого вводять відповідне компонентне співвідношення [8]:

$$u(t) = L\frac{d}{dt}i(t). \tag{12}$$

З урахуванням (7), де для $k = 1$ маємо $L\dfrac{d}{dt}i(t) = \mathrm{Im}\left\{\left[L\dfrac{d}{dt}\underline{I}_m(t) + j\omega L\,\underline{I}_m(t)\right]\cdot e^{j\omega t}\right\}$,

наведене компонентне співвідношення дозволяє виявити характер математичних зв’язків між миттєвими комплексними напругою та струмом на індуктивності, а саме:

$$\underline{U}_m(t) = L\,\frac{d}{d\,t}\,\underline{I}_m(t) + j\omega L\,\underline{I}_m(t). \qquad (13)$$

Ємнісний елемент. Як відомо [8], на цьому елементі миттєві напруга і струм пов’язані компонентним співвідношенням:

$$i(t) = C\,\frac{d}{d\,t}\,u(t), \qquad (14)$$

через це математичний зв’язок між відповідними миттєвими комплексними напругою і струмом матиме вигляд:

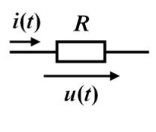
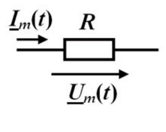
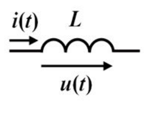
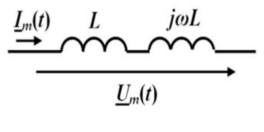
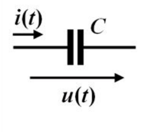
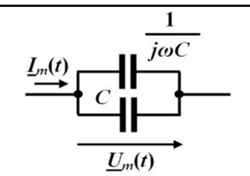
$$\underline{I}_m(t) = C\,\frac{d}{d\,t}\,\underline{U}_m(t) + j\omega\,C\,\underline{U}_m(t), \qquad (15)$$

оскільки відповідно до (7) $C\,\dfrac{d}{d\,t}\,u(t) = \mathrm{Im}\left\{\left[C\,\dfrac{d}{d\,t}\,\underline{U}_m(t) + j\omega\,C\,\underline{U}_m(t)\right]\cdot e^{j\omega\,t}\right\}.$

Компонентні співвідношення в комплексно-часовій формі, зокрема (11), (13), (15), не тільки розкривають закономірності у зв’язках між миттєвими комплексними напругами і струмами на окремо взятих елементах електричного кола, вони водночас дозволяють встановити бієктивну відповідність між цими елементами та елементами перехідної комплексної схеми, визначивши важливі принципи та правила побудови останньої. Для основних пасивних елементів електричного кола ці правила представлені табл. 1, де почленно в кожному стовпчику, розташованому ліворуч, наведено власне елемент вихідного кола, а праворуч – відповідний йому фрагмент перехідної комплексної схеми, який за умови виконання законів Кірхгофа здатен забезпечити поміж миттєвими комплексними напругами і струмами необхідне з вищевиписаних компонентне співвідношення в комплексно-часовій формі.

Таблиця 1

Таблиця відповідності між елементами електричного кола і перехідної комплексної схеми

Резистивний елемент		**Індуктивний елемент**		**Ємнісний елемент**	
					
$u = Ri$	$\underline{U}_m = R\,\underline{I}_m$	$u = L\,\dfrac{d\,i}{d\,t}$	$\underline{U}_m = L\dfrac{d\,\underline{I}_m}{d\,t} + j\omega L\,\underline{I}_m$	$i = C\,\dfrac{d\,u}{d\,t}$	$\underline{I}_m = C\dfrac{d\,\underline{U}_m}{d\,t} + j\omega C\,\underline{U}_m$

3 Приклад постановки задачі Коші на основі перехідної комплексної схеми, законів Кірхгофа і компонентних співвідношень у комплексно-часовій формі

Наведемо приклад постановки задачі Коші в термінах миттєвих комплексних струмів і напруг за допомогою запропонованої перехідної комплексної схеми та законів Кірхгофа і компонентних співвідношень у комплексно-часовій формі відображення. Водночас зробимо часткову перевірку адекватності зазначених базисних елементів фізичному протіканню перехідного процесу в колі синусоїдного струму, описуваному миттєвими струмами або напругами. Для цього скористаємося одним із топологічно широковживаних у теоретичній електротехніці прикладів електричного кола 2-го порядку, схему якого показано на рис. 1, а. Поряд, на рис. 1, б, за визначеними вище правилами (див. табл. 1) побудовано перехідну комплексну схему цього кола.

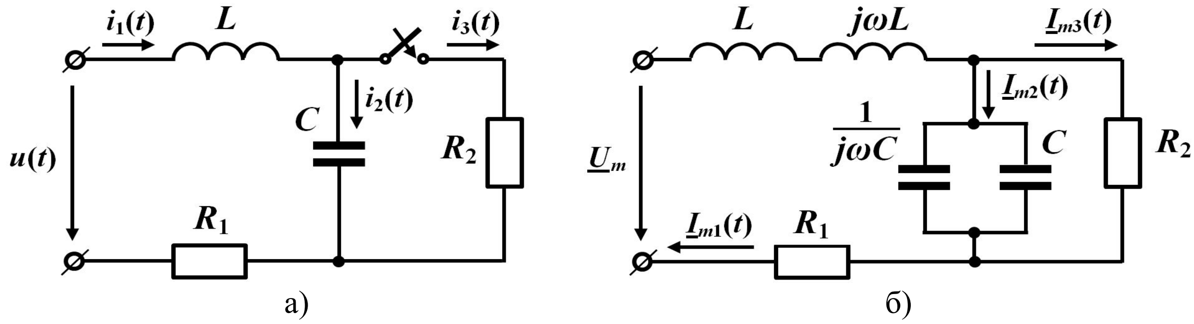


Рис. 1. Електричне коло 2-го порядку та його перехідна комплексна схема

Система рівнянь, яку в загальноприйнятий спосіб складено для перехідної комплексної схеми на підставі законів Кірхгофа (8), (9) та компонентних співвідношень (11), (13), (15) в комплексно-часовій формі відносно миттєвих комплексних струмів у вітках та напруги на ємнісному елементі, має вигляд:

$$\begin{cases} \underline{I}_{m_1}(t)-\underline{I}_{m_2}(t)-\underline{I}_{m_3}(t)=0; \\ \underline{I}_{m_2}(t)-C\dfrac{d}{dt}\underline{U}_{m_C}(t)-j\omega C\underline{U}_{m_C}(t)=0; \\ L\dfrac{d}{dt}\underline{I}_{m_1}(t)+(R_1+j\omega L)\underline{I}_{m_1}(t)+\underline{U}_{m_C}(t)=\underline{U}_m; \\ R_2\underline{I}_{m_3}(t)-\underline{U}_{m_C}(t)=0, \end{cases} \tag{16}$$

де $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u} = \underline{const}$.

Рівняння перехідного процесу в колі нескладно отримати, якщо переписати систему (16) відносно однієї з шуканих функцій, наприклад, миттєвого комплексного струму $\underline{I}_{m_1}(t)$. Тоді диференціальне рівняння набуде вигляду рівняння (5) за умови $n=2$, а саме:

$$\underline{A}_2\frac{d^2}{dt^2}\underline{I}_{m_1}(t)+\underline{A}_1\frac{d}{dt}\underline{I}_{m_1}(t)+\underline{A}_0\underline{I}_{m_1}(t)=\underline{B}_0\underline{U}_m, \tag{17}$$

де коефіцієнти $\underline{A}_2 = LCR_2$; $\underline{A}_1 = L + CR_1R_2 + j2\omega LCR_2$; $\underline{A}_0 = R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_2 + j\omega(L + CR_1R_2)$; $\underline{B}_0 = 1 + j\omega CR_2$.

Початкові ж умови задачі Коші в зазначеній постановці необхідно розраховувати за допомогою комплексної схеми докомутаційного кола на основі незалежних початкових умов та законів комутації, представлених комплексною формою [3]:

$$\underline{I}_{m_L}(0_+)=\underline{I}_{m_L}(0)=\underline{I}_{m_L}(0_-);\quad \underline{U}_{m_C}(0_+)=\underline{U}_{m_C}(0)=\underline{U}_{m_C}(0_-).$$

У нашому випадку двома початковими умовами шуканої задачі Коші будуть співвідношення:

$$\begin{aligned} &\underline{I}_{m_1}(0_+)=\frac{\underline{U}_m}{R_1+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)};\\ &\frac{d\,\underline{I}_{m_1}(0_+)}{d\,t}=0, \end{aligned} \tag{18}$$

друге з яких нескладно отримати, скориставшись третім рівнянням системи (16).

Із метою перевірки отриманого результату складемо диференціальне рівняння перехідного процесу відносно миттєвого струму $i_1(t)$. Для цього, скориставшись схемоювихідного електричного кола (див. рис. 1, а), спочатку побудуємо систему рівнянь на основі законів Кірхгофа і компонентних співвідношень (10), (12), (14), виписаних у класичній формі,

$$\begin{cases} i_1(t)-i_2(t)-i_3(t)=0;\\ i_2(t)-C\,\dfrac{d}{d\,t}u_C(t)=0;\\ L\,\dfrac{d}{d\,t}i_1(t)+R_1\,i_1(t)+u_C(t)=u(t);\\ R_2\,i_3(t)-u_C(t)=0, \end{cases} \tag{19}$$

де $u(t)=U_m\sin(\omega\,t+\psi_u)$, а потім перепишемо (19) відносно струму $i_1(t)$. У результаті отримуємо диференціальне рівняння 2-го порядку виду (4)

$$a_2\frac{d^2}{d\,t^2}i_1(t)+a_1\frac{d}{d\,t}i_1(t)+a_0 i_1(t)=b_1\frac{d}{d\,t}u(t)+u(t) \tag{20}$$

з коефіцієнтами $a_2=LCR_2$; $a_1=L+CR_1R_2$; $a_0=R_1+R_2$; $b_1=CR_2$; $b_0=1$.

За такої постановки задачі Коші рівняння (20) потрібно доповнити відповідними початковими умовами, звичайно ж, відмінними від (18):

$$\begin{aligned} &i_1(0_+)=\frac{U_m}{\sqrt{R_1^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}sin\left(\psi_u-arctg\frac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R_1}\right);\\ &\frac{d\,i_1(0_+)}{d\,t}=\frac{u(0_+)-u_C(0_+)-R_1\,i_1(0_+)}{L}, \end{aligned} \tag{21}$$

де $u(0_+)=U_m\sin\psi_u$; $u_C(0_+)=\dfrac{-U_m}{\omega\,C\sqrt{R_1^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}cos\left(\psi_u-arctg\dfrac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R_1}\right)$.

Варто звернути увагу на те, що в кожному окремому випадку похідна миттєвого струму на момент комутації $\dfrac{d\,i_1(0_+)}{d\,t}$ зазвичай не набуває тих самих значень, а залежить від початкової фази вхідної напруги та співвідношень поміж параметрами елементів заданого кола.

Водночас значення похідної $\dfrac{d\underline{I}_{m_1}(0_+)}{dt}$ є інваріантним щодо вказаних параметрів і завжди дорівнює нулю.

Порівнюючи коефіцієнти обох диференціальних рівнянь (17) і (20), нескладно помітити, що:

$$\underline{A}_2 = a_2;\ \ \underline{A}_1 = a_1 + j2\omega\, a_2;\ \ \underline{A}_0 = a_0 - \omega^2 a_2 + j\omega\, a_1;\ \ \underline{B}_0 = b_0 - \omega^2 b_2 + j\omega\, b_1,$$

де в останньому співвідношенні $b_2 = 0$.

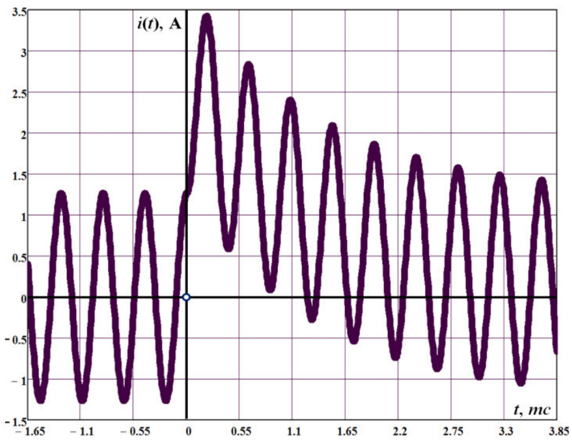
Отже, для заданого за умовою прикладу випадку, коли $n = 2$ і $q = 1$ (одне джерело живлення), відношення між групами відповідних коефіцієнтів диференціальних рівнянь відповідають формулам (6), через що й розв'язки цих рівнянь за зазначених вище початкових умов (18) і (21) не суперечитимуть формулі (3)

$$i_1(t) = \mathrm{Im}\left\{\underline{I}_{m_1}(t)e^{j\omega t}\right\}.$$

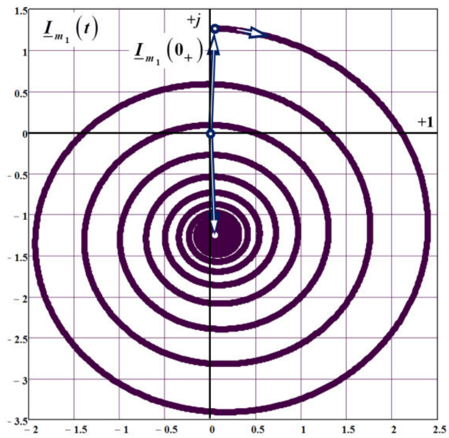
Це означає, якщо тільки адекватним об'єктивно сучасній дійсності виявиться розв'язок $i_1(t)$ задачі Коші, побудованої для заданого електричного кола на основі *класичних* законів Кірхгофа і компонентних співвідношень, то розв'язок $\underline{I}_{m_1}(t)$ задачі Коші, яку можна сформувати і в інший спосіб – на основі *запропонованої* перехідної комплексної схеми та за допомогою законів Кірхгофа і компонентних співвідношень у комплексно-часовій формі, за зазначеною якістю не поступатиметься першому розв'язку й також буде адекватним реаліям перехідного процесу в цьому електричному колі за інших рівних умов.

Прикінцева частина, висновки

Для прикладу на рис. 2 побудовано два графіки, які окремо й передусім у якісній формі відображають той самий перехідний процес. Перший графік (рис. 2, а) – це перехідна хвильова діаграма миттєвого струму $i_1(t)$, другий (рис. 2, б) – часовий годограф [3], побудований на основі миттєвого комплексного струму $\underline{I}_{m_1}(t)$ на комплексній площині.



а)



б)

Рис. 2. Перехідна хвильова діаграма миттєвого струму $i_1(t)$ та часовий годограф миттєвого комплексного струму $\underline{I}_{m_1}(t)$

Як видно з рисунків, обидві математичні моделі є самодостатніми. Зокрема вони явно й однозначно відображають дві характерні риси поточного перехідного процесу: по-перше, істотне, чи не втричі (!), зростання перехідного струму в заданому колі та радикальну зміну характеру вхідного імпедансу кола з ємнісного на індуктивний, по-друге. Водночас, оскільки кожна з моделей виявляє притаманні їй можливості у своєрідний спосіб і різноякісно, варто ці обидві математичні моделі, а відповідно – і обидві форми задачі Коші, сприймати не в протиставленні одна одній за кількістю ймовірно властивих їм вад, але в природному доповнені можливими перевагами, властивими лише кожній з них, незалежно від числа та глибини останніх.

Тільки за такого підходу теорія перехідного процесу в колах синусоїдного струму поступово набуватиме необхідної завершеності та повноти. І тільки за такого підходу викладені в цій роботі наукові результати зможуть найповніше розкрити свою сутність.

Відтак уведене та розроблене поняття перехідної комплексної схеми електричного кола, виявлені й описані істотні властивості та основні принципи її складання, сформульовані в комплексно-часовій формі та обґрунтовані обидва закони Кірхгофа та основні компонентні співвідношення – усе це разом і у своїй єдності створює теоретичний базис символьно-класичного метода, який дозволяє безпосередньо ставити й розв’язувати фундаментальну задачу Коші відмінно від узвичаєної форми в термінах миттєвих комплексних струмів і напруг, чим розширює й посилює аналітичні можливості під час розрахунку та дослідження перехідних процесів у лінійних електричних колах синусоїдного та періодичного несинусоїдного струмів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Електроніка і мікросхемотехніка : у 4-х т. Том 4. Книга 1. Силова електроніка / [за ред. В. І. Сенька]. – К. : Каравела, 2013. – 640 с.

2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М. : Издат. «Наука», 1965. – 780 с.

3. Ведміцький Ю. Г. Символьно-класичний метод аналізу перехідних процесів в електричних колах / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. – 2014. – Випуск 2. – С. 42 – 48.

4. Перхач В. С. Теоретична електротехніка. Лінійні кола : підручник / В. С. Перхач. – К. : Вища шк., 1992. – 439 с.

5. Теоретичні основи електротехніки : у 3-х т. : підручник [для студ. техн. спец. вищ. закл. освіти]. Т. 2. Перехідні процеси у лінійних колах із зосередженими параметрами. Нелінійні та магнітні кола / [В. С. Бойко та ін.] ; заг. ред. І. М. Чиженко, В. С. Бойко. – К. : НТУУ “КПІ”, 2008. – 224 с.

6. Теоретические основы электротехники. Т. 2 [в 3-х т.] : учебник [для вузов] / [Демирчян К. С., Нейман Л. Р., Коровкин Н. В., Чечурин В. Л.]. – СПб : Питер, 2003. – 576 с.

7. Johnson D. H. Fundamentals of electrical engineering / D. H. Johnson, J. D. Wise. – Rice University, 1999. – 267 p.

8. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник [для студ. вищ. техн. навч. закладів] / [Карпов Ю. О., Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В., Кацив С. Ш.]. ; за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2013. – 456 с.

9. Веников В. А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах : [учебн. для электроэнергет. спец. вузов] / В. А. Веников. – М. : Высш. шк., 1985. – 536 с.

10. Рютенберг Р. Переходные процессы в электроэнергетических системах / Р. Рютенберг. – М. : Изд. иностр. литер., 1955. – 716 с.

11. Gardner M. F. Transients in linear systems / M. F. Gardner, J. L. Barnes. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1942. – 552 p.

12. Ульянов С. А. Электромагнитные переходные процессы в электрических системах / С. А. Ульянов. – М. : «Энергия», 1970. – 520 с.

13. Розенфельд А. С. Переходные процессы и обобщенные функции / А. С. Розенфельд, Б. И. Яхинсон. – М. : «Наука», 1966. – 440 с.

Ведміцький Юрій Григорович — к. т. н., доцент кафедри теоретичної електротехніки та електричних вимірювань.

Кухарчук Василь Васильович — д. т. н., проф., завідувач кафедри теоретичної електротехніки та електричних вимірювань.

Вінницький національний технічний університет.

Yu. G. Vedmitskiy, Cand. Sc. (Eng.); V. V. Kukharchuk, Dc. Sc. (Eng.), Prof.

TRANSIENT COMPLEX CIRCUITS, KIRCHHOFF'S LAWS AND THE COMPONENT RELATIONS IN COMPLEX-TEMPORAL FORM OF REPRESENTATION

Notion of transient complex scheme of electric circuit is suggested and developed in the paper, its basic properties – Kirchhoff's laws and component relations in complex-temporal form of representation are determined. They in their unity are principle elements of theoretical basis of symbol-classic method of Cauchy problem solution, formulated in terms of instantaneous complex currents and voltages for calculation of transient processes in linear electric circuits of sinusoidal and periodic non- sinusoidal currents.

Key words: *electric circuit, transient process, Cauchy problem, complex–symbolic method, instantaneous complex currents and voltages, Kirchhoff's laws, component relations, differential equations of motion, switching laws in complex form.*

Introduction

Development and improvement of the methods of calculation and analysis of transient processes in electric circuits of sinusoidal current still remains important and urgent problem while investigating electric engineering systems with periodic form of motion.

Such status of the problem is stipulated by needs of practical origin – these needs are various both by the depth of penetration and by the volume of scope[1]. This is explained, on one hand, by the increased and even critical sensitivity of operating parameters and characteristics of the above-mentioned engineering systems, for instance, objects of electric power engineering or electromechanics, to transient process modes, that can be observed in them even during one production cycle, and on the other hand – by the volume of the region of such systems and their total impact to technogenic sphere on the whole.

At the same time purely theoretical component of the above-mentioned problem [2] remains important, as the system of trigonometric functions with even frequencies of the form $\cos\left(m\frac{2\pi}{T}t\right)$ and $\sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right)$, where $m=(1,\,2,...)$, is one of the fundamental and most frequently used orthogonal normalized basis of Hilbert space of instantaneous voltages and currents, elements of which are able to determine evolution motion of each of the above-mentioned engineering systems not only in steady-state operation mode but also during transient process. In the latter case physical transient process in the system should be accompanied by simultaneous change of all the coefficients of trigonometric Fourier series in time, and on condition of period T stability – even is able to be in relation of equivalence to such change. For linear or linearized electric engineering systems with periodic form of motion, this means, that Cauchy problem, that, as it is known, is mathematical interpretation of the problem of transient process analysis in physical and engineering systems with concentrated parameters, may be formulated and solved relatively each harmonic component from trigonometric series separately, then find solution, applying the principle of superposition. At the same time, as Fourier coefficients of each of transient harmonics, for instance, current, directly determine its amplitude and initial phase, as a result, the harmonic has the form

$$i^{(m)}(t)=I_m^{(m)}(t)sin\left[m\,\omega\,t+\psi_i^{(m)}(t)\right], \tag{1}$$

it is expedient to formulate Cauchey problem not in terms of instantaneous currents $i^{(m)}(t)$ (or voltages), but in terms of their complex images, i.e. instantaneous complex currents

$$\underset{-m}{I}^{(m)}(t) = I_m^{(m)}(t)\, e^{j\psi_i^{(m)}(t)}, \tag{2}$$

where

$$i^{(m)}(t) = Im\left\{\underset{-m}{I}^{(m)}(t) e^{jm\omega t}\right\}. \tag{3}$$

Using such an approach, as it is shown in [3], both sets of functions $I_m^{(m)}(t)$ and $\psi_i^{(m)}(t)$, and in case of change during transient process period $T(t)$ – these are functions $m\omega(t)$, their first and higher derivatives, integrals, integral transformations both separately and in different combinations are able to describe and reveal not only visible, but also hidden and abnormal properties of transient processs in electric circuit both in qualitative form and analytically.

It is worth mentioning that theoretical electric engineering the problem of analysis of transient processes in electric circuits of sinusoidal current nowadays is able to solve systematically and efficiently solve practically in all its manifestations. For this purpose various calculation methods are proposed, namely--- classical, operator, spectral, method of Duhamel integral, etc. The essence of these methods is revealed in numerous scientific and educational sources, for instance [4 - 13]. At the same time, as research described in these sources, shows, fundamental Cauchy problem is formed in them mainly in terms of instantaneous currents and voltages. Such an approach prevails in cases when, in order to solve this problem, integral transformations, namely, integrals of Fourier, Laplace or Karson, are used. Unfortunately, the possibility of Cauchy problem formation relatively functions of instantaneous complex currents of the form (2) in the given reference is not revealed, and is not even mentioned. This, probably, explains the fact that methodical support of such an approach at present is not sufficiently studied.

The aim of the given research is development on the base of the function of the form (2), the notion of transient complex scheme of electric circuit, determination of characteristics features and fundamental properties of such circuit, in particular, Kirchhoff's laws and component relations in complex-temporal from of representation, development of basis principles and rules of its construction. The developed theoretical notions and relations in their total, must become important elements of theoretical basis of symbolic-classical method – one of information methods of calculation and analysis of transient processes in linear circuits of sinusoidal current [3].

1 Differential equation of transient process in complex form

It should be noted, that now and further the results of research will be given only regarding the first (that is, basic) harmonics of Fourier trigonometric series, however, relations, written for it, taking into account the order of multiplicity, will maintain its validity also for higher harmonics.

It is known, that transient process in linear electric circuit with several sources of sinusoidal voltage of the same frequency

$$u_1 = U_{m_1} sin(\omega t + \psi_{u_1}),\ \ldots,\ u_v = U_{m_v} sin(\omega t + \psi_{u_v})$$

can be described by ordinary linear differential equation of n-th order composed relatively certain instantaneous current $i(t)$ of the form (1), on the base of Kirchhoff's laws and component relations,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k i}{d t^k} = \sum_{q=1}^{v}\sum_{s=0}^{w} b_{sq} \frac{d^s u_q}{d t^s} \tag{4}$$

with n initial conditions: $i(0_+)$, $\dfrac{d i(0_+)}{d t},\ldots,\dfrac{d^{n-1} i(0_+)}{d t^{n-1}}$.

At the same time, taking into account the relation (3), Cauchy problem, determined in the method (4), is admissible, and in many cases – is expedient, to formulate in another way – in terms of instantaneous complex currents and voltages. In such interpretation transient process in the circuit will be presented by differential equations in complex form, added by n initial conditions of the form: $\underline{I}_m(0_+)$, $\frac{d\,\underline{I}_m(0_+)}{d\,t},\ldots,\frac{d^{n-1}\underline{I}_m(0_+)}{d\,t^{n-1}}$. The equation itself will have the form:

$$\sum_{k=0}^{n}\underline{A}_k\,\frac{d^k\,\underline{I}_m(t)}{d\,t^k}=\sum_{q=1}^{v}\left(\underline{B}_{0_q}\cdot\underline{U}_{m_q}\right). \tag{5}$$

Complex coefficients in the equation (5) may be determined in different ways.

For instance, they can be calculated by means of coefficients of differential equation (4) but on condition that such equation for the given circuit would be obtained in advance. As it is shown in [3], for electric circuit of random order (without preset number of degrees of freedom) the law of transformation of equation coefficients (4) in corresponding coefficients of equation (5) will be in subordination to binomial theorem and will have the following form:

$$\underline{A}_k=\sum_{p=0}^{n-k}\left[\frac{(k+p)!}{k!\;p!}\cdot(j\omega)^p\cdot a_{k+p}\right],\quad \underline{B}_{0_q}=\sum_{s=0}^{n}(j\omega)^s\,b_{qs}\,, \tag{6}$$

because, firstly, each k-th derivative of instantaneous current $i(t)$ in the left part (4) may be written through instantaneous complex current $\underline{I}_m(t)$ and its derivatives as

$$a_k\,\frac{d^k\,i}{d\,t^k}=Im\left\{a_k\cdot\sum_{p=0}^{k}\left[\frac{k!}{p!(k-p)!}\cdot(j\omega)^p\cdot\frac{d^{k-p}\,\underline{I}_m(t)}{d\,t^{k-p}}\right]\cdot e^{j\omega t}\right\}, \tag{7}$$

that creates the possibility for the next rearrangement and reduction of the obtained expression to the form of the left part of the formula (5):

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{a_k\cdot\sum_{p=0}^{k}\left[\frac{k!}{p!(k-p)!}\cdot(j\omega)^p\cdot\frac{d^{k-p}\,\underline{I}_m(t)}{d\,t^{k-p}}\right]\right\}=\sum_{k=0}^{n}\left\{\sum_{p=0}^{n-k}\left[\frac{(k+p)!}{k!\;p!}\cdot(j\omega)^p\cdot a_{k+p}\right]\cdot\frac{d^k\,\underline{I}_m(t)}{d\,t^k}\right\},$$

and, secondly, each s-th derivative in the right part of the equation (4) also may be written in the similar manner and on this base, taking into account the invariability in time of the amplitudes, initial phases and frequency of external sources of energy may be rewritten in complex form, reduced to the form of the right part of the formula (5):

$$\sum_{q=1}^{v}\left(\sum_{s=0}^{n}b_{sq}\,\frac{d^s\,u_q}{d\,t^s}\right)=Im\left\{\sum_{q=1}^{v}\left[\sum_{s=0}^{n}\left((j\omega)^s\cdot b_{sq}\right)\cdot\underline{U}_{m_q}\right]\cdot e^{j\omega t}\right\}=Im\left\{\sum_{q=1}^{v}\left(\underline{B}_{0_q}\,\underline{U}_{m_q}\right)\cdot e^{j\omega t}\right\}.$$

At the same time, it is worth mentioning, that besides the given indirect method, the coefficients of the equation (5), as the equation itself, may be obtained directly by means of transient complex scheme of the investigated circuit and Kirchhoff's laws in complex – temporal form of representation, that enables to avoid the necessity of anterior composing of equation (4) and determination of its coefficients with further recalculation by the formulas (6).

2 Transient complex circuits, Kirchhoff's laws and component relations in complex – temporal form of representation

Instantaneous complex currents and voltages are independent analytical objects, that is why, differential equation of transient process of the form (5) may be built by single rules in convenient and generally accepted in theoretical engineering method, that is, by means of topologically structured and imperatively subordinate objects.

Let us introduce the notion of transient complex scheme, we will use this notion to denote topologically structured by two terminal elements object with instantaneous complex currents in the branches and voltages at its sections, mathematically interconnected by Kirchhoff's laws and component relations, presented in complex – temporal form of representation.

Kirchhoff's laws in complex-temporal are the base for formation of the system of integral-differential equations, composed relatively instantaneous complex currents in branches or voltages on them, that further could be used for construction of differential equations of the form (5) or (4), and in independent manner – for more profound and accurate study of transient processes in electric circuits.

Let us formulate these laws. First Kirchhoff's law in complex – temporal form states, that algebraic sum of instantaneous complex currents of branches, that coincide in the nodes of transient complex scheme at any moment of time equals zero:

$$\sum_{l=1}^{h} \underline{I}_{m_l}(t) = 0 . \tag{8}$$

Second Kirchhoff's law in complex-temporal form, in its turn, states, that algebraic sum of instantaneous complex voltages at separate elements of random closed contour of transient complex scheme always and constantly equals zero:

$$\sum_{l=1}^{c} \underline{U}_{m_l}(t) = 0 . \tag{9}$$

The technique of composition of equation system by Kirchhoff's laws in complex – temporal form does not differ from the fixed one.

It is worth mentioning that these Kirchhoff's laws in complex – temporal form are postulates: as these laws are characterized by greater degree of generalization, it is impossible neither to introduce them nor substantiate by means of Kirchhoff's laws, written relatively instantaneous voltages and currents (that is – in classic form). At the same time such generalization connects both forms and makes impossible the emergence of contradictions between them. Validity of Kirchhoff's laws in complex – temporal form not only remain valid but provides capacity to function and ability of their classical analogues. Such character of relation between known and inductivity introduced forms of Kirchhoff's laws is very important because it serves necessary condition of truth of the latter. Simultaneously, confirm and approve such status, or on the contrary – refute it, this is to be done by practical verification, strict, durable and detailed.

One of important consequences of the above – mentioned is that Kirchhoff's laws in complex-temporal form due to its generalization subordinate not only steady-state modes of electric circuits of sinusoidal current operation, but also the course of transient processes unlike Kirchhoff's laws in complex form, which, as it is known are built on the base of classic laws for theoretical support of widely-spread method of complex amplitudes (symbolic method) in order to calculate steady-state modes in these electric circuits.

For calculation and analysis of transient processes besides Kirchhoff's laws in complex – temporal form of representation (8) and (9) it is necessary to use special mathematical equations, which in theoretical electric engineering are called component relations. Component relations establish mathematical connections between instantaneous voltages and currents at separate idealized passive elements of electric circuit.

It is natural, that in our case these connections must be rewritten in complex temporal form. It is important to underline, that in such connections between instantaneous voltages and currents of separately taken main passive two-terminal elements of electric circuit important laws of electric engineering, namely, Ohm's law and Farraday's law of induction, find their reflection. That is why, component relations, represented by complex-temporal form also must be direct manifastation of these laws.

It follows from the above-mentioned that transient complex schemes must include the elements with such properties, at which instantaneous complex currents and voltages will correspond to instantaneous currents and voltages at separate elements of real electric circuits. Such mutual single –valuedness must become the element that will be able to provide necessary adequacy of the obtained results of the research to the realities of the output problem during the analysis of dynamic modes on the base of transient complex schemes.

Thus, for main passive two-terminal elements of electric circuit, namely, - active resistance, inductance and capacitance, we form the component relations in complex-temporal form on the base of classic relations, written for instantaneous currents and voltages.

Resistive element. For the given two-terminal element mathematical connection between instantaneous voltage and current is determined by Ohm's law [8]:

$$u(t) = R\,i(t), \tag{10}$$

where $u(t) = U_m(t)\sin\left[\omega t + \psi_u(t)\right]$, $i(t) = I_m(t)\sin\left[\omega t + \psi_i(t)\right]$, that, taking into account (1) – (3) allows to obtain relation for their complex images in the form of Ohm's law in complex – temporal form:

$$\underline{U}_m(t) = R\,\underline{I}_m(t). \tag{11}$$

Inductive element. Mathematical connection between instantaneous voltage and current at this two-terminal element is stipulated by Faraday's law of induction, on the base of this law corresponding component relation is introduced [8]

$$u(t) = L\frac{d}{dt}i(t). \tag{12}$$

Taking into account (7), where for $k = 1$ we have $L\dfrac{d}{dt}i(t) = Im\left\{\left[L\dfrac{d}{dt}\underline{I}_m(t) + j\omega L\underline{I}_m(t)\right]\cdot e^{j\omega t}\right\}$, the given component relation allows to determine the character of mathematic connections between instantaneous complex voltages and current on the inductance, namely:

$$\underline{U}_m(t) = L\frac{d}{dt}\underline{I}_m(t) + j\omega L\underline{I}_m(t). \tag{13}$$

Capacitance element. As it is known [8], on this element instantaneous voltage and current are interconnected by component relation:

$$i(t) = C\frac{d}{dt}u(t), \tag{14}$$

as a result, mathematical connection between corresponding instantaneous complex voltage and current will have the form:

$$\underline{I}_m(t) = C\frac{d}{dt}\underline{U}_m(t) + j\omega C\underline{U}_m(t), \tag{15}$$

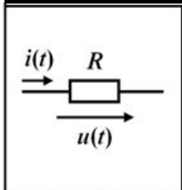
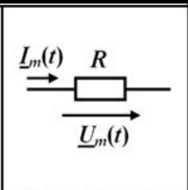
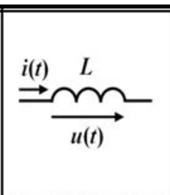
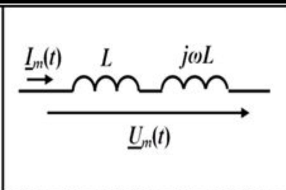
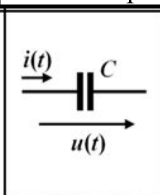
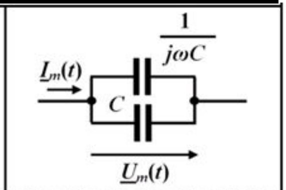
since according to (7) $C\dfrac{d}{d\,t}u(t)=Im\left\{\left[C\dfrac{d}{d\,t}\underline{U}_m(t)+j\omega C\underline{U}_m(t)\right]\cdot e^{j\omega t}\right\}$.

Component relations in complex-temporal form, in particular (11), (13), (15) not only reveal regularities in connections between instantaneous complex voltages and currents on separately taken elements of electric circuit, they allow to establish mutual and single-valued correspondence among these elements and elements of transient complex scheme, having determined important principles and rules of construction the latter.

For basic passive elements of electric circuit these rules are shown in Table 1, where in each row, located on the left, the element of output circuit is presented and on the right – corresponding fragment of transient complex scheme, which, on condition of Kirchhoff's laws realization, is able to provide between instantaneous complex voltages and currents necessary component relation in complex-temporal form.

Table 1

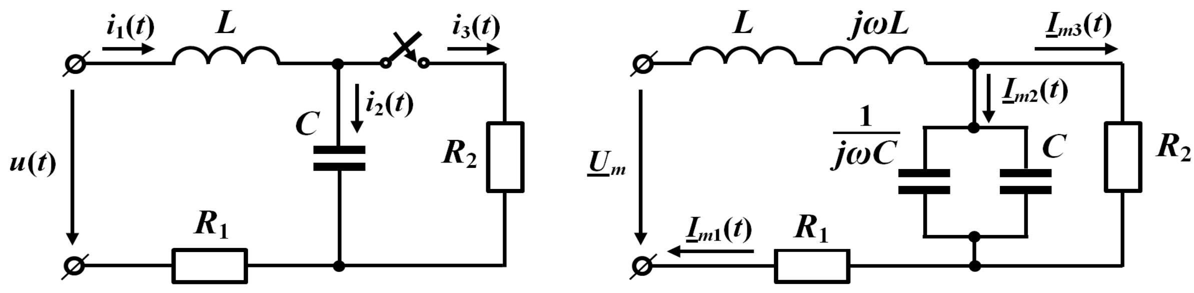
Table of correspondence between elements of electric circuit and transient complex scheme

Resistive element		Inductive element		Capacitance element	
					
$u = Ri$	$\underline{U}_m = R\underline{I}_m$	$u = L\dfrac{di}{dt}$	$\underline{U}_m = L\dfrac{d\underline{I}_m}{dt} + j\omega L\underline{I}_m$	$i = C\dfrac{du}{dt}$	$\underline{I}_m = C\dfrac{d\underline{U}_m}{dt} + j\omega C\underline{U}_m$

3 The example of Cauchy problem setting on the base of transient complex scheme, Kirchhoff's laws and component relations in complex-temporal form

Let us consider the example of Cauchy problem setting in terms of instantaneous complex currents and voltages by means of suggested transient complex scheme, Kirchhoff's laws and component relations in complex-temporal form of representation.

Simultaneously we will perform partial test on adequacy of the basic elements to physical course of transient process in the circuit of sinusoidal current, described by instantaneous currents or voltages. For this purpose we will make use of one of topologically widely used in theoretical engineering examples of electric circuit of the 2-nd order, diagram of which is shown in Fig. 1, a. Near, in Fig. 1, b, according to the rules, defined above (see Table 1) transient complex scheme of this circuit is built.



a) b)

Fig. 1. Electric circuit of the 2-nd order and its transient complex scheme

System of equations, that in generally accepted method is composed for transient complex scheme on the base of Kirchhoff's laws (8), (9) and component relations (11), (13), (15) in complex-temporal form relatively instantaneous complex currents in branches and voltage in capacitance element, has the form:

$$\begin{cases} \underline{I}_{m_1}(t) - \underline{I}_{m_2}(t) - \underline{I}_{m_3}(t) = 0; \\ \underline{I}_{m_2}(t) - C\dfrac{d}{dt}\underline{U}_{m_C}(t) - j\omega C\underline{U}_{m_C}(t) = 0; \\ L\dfrac{d}{dt}\underline{I}_{m_1}(t) + (R_1 + j\omega L)\underline{I}_{m_1}(t) + \underline{U}_{m_C}(t) = \underline{U}_m; \\ R_2\underline{I}_{m_3}(t) - \underline{U}_{m_C}(t) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

where $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u} = \underline{const}$.

It is not difficult to obtain the equation of transient process if we rewrite the system (16) relatively one of the functions to be found, for instance, instantaneous complex current $\underline{I}_{m_1}(t)$. Then differential equation will have the form of the equations (5) on condition that $n = 2$, namely:

$$\underline{A}_2\frac{d^2}{dt^2}\underline{I}_{m_1}(t) + \underline{A}_1\frac{d}{dt}\underline{I}_{m_1}(t) + \underline{A}_0\underline{I}_{m_1}(t) = \underline{B}_0\underline{U}_m, \tag{17}$$

where coefficients

$$\underline{A}_2 = LCR_2;\ \underline{A}_1 = L + CR_1R_2 + j2\omega LCR_2;\ \underline{A}_0 = R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_2 + j\omega\left(L + CR_1R_2\right);\ \underline{B}_0 = 1 + j\omega CR_2.$$

Initial conditions of Cauchy problem in the given set up should be calculated by means of complex scheme of precommunication circuit on the base of independent initial conditions and communication laws, presented by complex formula [3]:

$$\underline{I}_{m_L}(0_+) = \underline{I}_{m_L}(0) = \underline{I}_{m_L}(0_-);\quad \underline{U}_{m_C}(0_+) = \underline{U}_{m_C}(0) = \underline{U}_{m_C}(0_-).$$

In our case, two initial conditions of the desired Cauchy problem will be relations:

$$\underline{I}_{m_1}(0_+) = \frac{\underline{U}_m}{R_1 + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)};\quad \frac{d\underline{I}_{m_1}(0_+)}{dt} = 0, \tag{18}$$

the second of which is easy to obtain, making use of the third equation of the system (16).

In order to check the result obtained we will compose differential equation of transient process relatively instantaneous current $i_1(t)$. Making use of the scheme of output electric circuit (see Fig. 1, a), first we will compose the system of equations on the base of Kirchhoff's laws and component relations (10), (12), (14), written in classical form

$$\begin{cases} i_1(t)-i_2(t)-i_3(t)=0; \\ i_2(t)-C\,\dfrac{d}{d\,t}u_C(t)=0; \\ L\,\dfrac{d}{d\,t}i_1(t)+R_1\,i_1(t)+u_C(t)=u(t); \\ R_2\,i_3(t)-u_C(t)=0, \end{cases} \tag{19}$$

where $u(t)=U_m\sin(\omega t+\psi_u)$, and then we will rewrite (19) relatively current $i_1(t)$. As a result we obtain differential equation of the 2-nd order of the form (4)

$$a_2\frac{d^2}{d\,t^2}i_1(t)+a_1\frac{d}{d\,t}i_1(t)+a_0\,i_1(t)=b_1\frac{d}{d\,t}u(t)+u(t) \tag{20}$$

with coefficients $a_2=LCR_2$; $a_1=L+CR_1R_2$; $a_0=R_1+R_2$; $b_1=CR_2$; $b_0=1$.

At such setting of Cauchy problem, equation (20) must be completed by corresponding initial conditions, certainly, different from (18):

$$i_1(0_+)=\frac{U_m}{\sqrt{R_1^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\,sin\left(\psi_u-arctg\frac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R_1}\right); \tag{21}$$
$$\frac{d\,i_1(0_+)}{d\,t}=\frac{u(0_+)-u_C(0_+)-R_1\,i_1(0_+)}{L},$$

where $u(0_+)=U_m\,sin\,\psi_u$; $u_C(0_+)=\dfrac{-U_m}{\omega C\sqrt{R_1^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\cos\left(\psi_u-arctg\dfrac{\omega L-\dfrac{1}{\omega C}}{R_1}\right)$.

We should pay attention to the fact, that in each separate case, the derivative of instantaneous current at the moment of communication $\dfrac{d\,i_1(0_+)}{d\,t}$ as a rule, does not obtain the same values but depends on initial phase of input voltage and relations between parameters of the elements of the given circuit. Simultaneously, the value of the derivative $\dfrac{d\,\underline{I}_{m_1}(0_+)}{d\,t}$ is invariant to the given parameters and always equals zero.

Comparing the coefficients of both differential equations (17) and (20) it is easy to note, that

$$\underline{A}_2=a_2;\ \underline{A}_1=a_1+j2\omega a_2;\ \underline{A}_0=a_0-\omega^2a_2+j\omega a_1;\ \underline{B}_0=b_0-\omega^2b_2+j\omega b_1,$$

where in the last relation $b_2=0$.

Then, for the set, by the conditions of the example of the case, when $n=2$ and $q=1$ (one source of supply) relations between the groups of corresponding coefficients of differential equations correspond to formulas (6), that is why, the solutions of these equations, taking into consideration the above-mentioned initial conditions (18) and (21) will not contredict to the formula (3)

$$i_1(t) = Im\left\{ \underline{I}_{m_1}(t) e^{j\omega t} \right\}.$$

This means, that if the solution $i_1(t)$ of Cauchy problem, built for the given electric circuit on the base of classic Kirchhoff's laws and component relations is adequate to objectively existing reality, then solution $\underline{I}_{m_1}(t)$ of Cauchy problem, that can be formulated in another way – on the base of the suggested transient complex scheme and by means of Kirchhoff's laws and component relations in complex-temporal from, by its quality will not concede the first solution and will be adequate to realities of transient process in the given electric circuit on another equal conditions.

Closing part, conclusions

For the example in Fig. 2 two graphs, which separately and qualitative form represent the transient process. The first graph (Fig, 2, a) – it is transient wave diagram of instantaneous current $i_1(t)$ the second graph (Fig. 2, b) – time locus [3], built on the base of instantaneous complex current $\underline{I}_{m_1}(t)$ on complex plane.

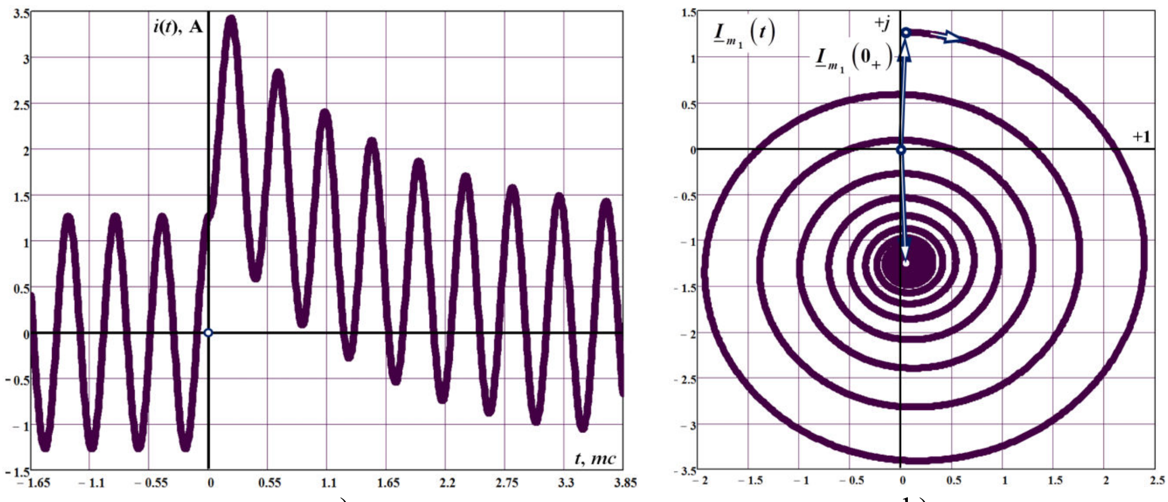


Fig. 2. Transient wave diagram of instantaneous current $i_1(t)$ and time locus of instantaneous complex current $\underline{I}_{m_1}(t)$

As it is seen from the figures, both mathematical models are adequately able to function and self-contained. In particular, they obviously and definitely represent two characteristic features of the current transient process: firstly, almost three times (!),growth of transient current in the given circuit and secondly radical change of the character of the input impedance of the circuit from capacitive into inductive. Simultaneously, as each model shows its possibilities in the manner, inherent to it, it is worth to apprehend these models and, correspondingly, both forms of Cauchy problem, not in opposition by the number of possibility inherent drawbacks but in natural addition of possible advantages, immanent only to each of them, irrespective of the number and depth of the latter.

Only applying such an approach the theory of transient process in the circuits of sinusoidal current gradually will obtain the necessary completeness and absoluteness. Such an approach will promote to reveal the essence of scientific results, obtained in this research.

Then, notion of transient complex scheme of electric circuit is introduced and developed, basic characteristics an main principles of its composition are described, both Kirchhoff's laws and basic component relations are formulated in complex-temporal form and substantiated. All this, taken together creates theoretical basis of symbolic-classic method, that enables to set directly and solve fundamental Cauchy problem not in conventional form in terms of instantaneous complex currents and voltages, the method broadens and increases analytical possibilities in the process of calculation and study of transient process in linear electric circuits of sinusoidal and periodic non-sinusoidal.

REFERENCES

1. Електроніка і мікросхемотехніка : у 4-х т. Том 4. Книга 1. Силова електроніка / [за ред. В. І. Сенька]. – К. : Каравела, 2013. – 640 с.

2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М. : Издат. «Наука», 1965. – 780 с.

3. Ведміцький Ю. Г. Символьно-класичний метод аналізу перехідних процесів в електричних колах / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. – 2014. – Випуск 2. – С. 42 – 48.

4. Перхач В. С. Теоретична електротехніка. Лінійні кола : підручник / В. С. Перхач. – К. : Вища шк., 1992. – 439 с.

5. Теоретичні основи електротехніки : у 3-х т. : підручник [для студ. техн. спец. вищ. закл. освіти]. Т. 2. Перехідні процеси у лінійних колах із зосередженими параметрами. Нелінійні та магнітні кола / [В. С. Бойко та ін.] ; заг. ред. І. М. Чиженко, В. С. Бойко. – К. : НТУУ "КПІ", 2008. – 224 с.

6. Теоретические основы электротехники. Т. 2 [в 3-х т.] : учебник [для вузов] / [Демирчян К. С., Нейман Л. Р., Коровкин Н. В., Чечурин В. Л.]. – СПб : Питер, 2003. – 576 с.

7. Johnson D. H. Fundamentals of electrical engineering / D. H. Johnson, J. D. Wise. – Rice University, 1999. – 267 p.

8. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник [для студ. вищ. техн. навч. закладів] / [Карпов Ю. О., Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В., Кацив С. Ш.]. ; за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2013. – 456 с.

9. Веников В. А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах : [учебн. для электроэнергет. спец. вузов] / В. А. Веников. – М. : Высш. шк., 1985. – 536 с.

10. Рютенберг Р. Переходные процессы в электроэнергетических системах / Р. Рютенберг. – М. : Изд. иностр. литер., 1955. – 716 с.

11. Gardner M. F. Transients in linear systems / M. F. Gardner, J. L. Barnes. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1942. – 552 p.

12. Ульянов С. А. Электромагнитные переходные процессы в электрических системах / С. А. Ульянов. – М. : «Энергия», 1970. – 520 с.

13. Розенфельд А. С. Переходные процессы и обобщенные функции / А. С. Розенфельд, Б. И. Яхинсон. – М. : «Наука», 1966. – 440 с.

Vedmitskiy Yuriy – Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor with the Chair of Theoretical Electric Engineering and Electric Measurements.

Kukharchuk Vasyl – Dc. Sc. (Eng.), Prof., Head of the Chair of Theoretical Electric Engineering and Electric Measurements.

Vinnytsia National Technical University.