УДК 539.3

В.С. Ловейкін, Ю.В. Човнюк, К.І. Почка[1]
Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ,
[1] Київський національний університет будівництва і архітектури

ЗАСТОСУВАННЯ ФАЗОЧАСТОТНИХ МЕТОДІВ ВПЛИВУ НА ПАРАМЕТРИ ВИМУШЕНОЇ СИЛИ ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ВІБРАЦІЙНИХ СИСТЕМ З СУХИМ ТЕРТЯМ

Для мінімізації динамічних коефіцієнтів вібраційних систем з сухим тертям використані методи фазочастотного впливу на параметри вимушеної сили. Зменшення амплітуди коливань без пауз досягнуто за допомогою використання суперрезонансних режимів функціонування вібраційної системи, а у разі коливань з паузами застосовується регулювання початкової фази вимушеної сили.

Methods of phase frequency influence on parameters of the revolting force are used to minimize the dynamic coefficients of vibration systems with dry friction. Reduction of amplitude of oscillations without pauses is reached with the help of superresonant modes of vibration system functioning. Regulation of an initial phase of the revolting force is applied in case of vibrations with pauses.

Постановка проблеми. Переважно під динамічною нелінійністю розуміють таку нелінійність, яка проявляє себе тільки під час руху. До вібросистем з динамічною нелінійністю належать коливні системи більшості машин вібраційної дії, що застосовуються у промисловості, для яких сили непружного опору (демпфування) змінюються непропорційно до швидкості у першому степені.

У процесі роботи вібромашини виникають різноманітні за своєю природою непружні опори: оброблюваного матеріалу; оточуючого повітря; внутрішні опори у матеріалі конструкцій машини; опори, зумовлені витратами енергії у болтових та заклепкових з'єднаннях, шарнірах, направляючих, у місцях фундаментів тощо. Усі ці опори по-різному змінюються залежно від переміщення елементів коливної системи вібромашини. Кожний з них впливає на форму та амплітуду коливань, а також на витрати (дисипацію) енергії.

Результуючу усіх непружних опорів вібросистеми можна подати як багатокомпонентний опір, який складається з суми одночасно діючих однокомпонентних опорів. Як однокомпонентні опори розглядаються: опір, що залежить від швидкості; гістерезисний опір, який є функцією переміщення і залежить від амплітуди; опір, що залежить від фази сили збурення; опір, який залежить тільки від переміщення; постійний по величині опір сухого тертя. Напрямок результуючого багатокомпонентного опору так само, як і напрямок його окремих компонентів, завжди протилежний до швидкості руху.

Розглядаючи вимушені коливання вібратора з синусоїдальною силою збурення за наявного сухого тертя, виникають за певних умов паузи (хоча можливі й коливання без пауз). Для усунення небажаних коливань у таких вібраційних системах (а, значить, зменшення до нуля динамічних коефіцієнтів) можна застосувати, на думку авторів, фазочастотні методи впливу на параметри вимушеної сили.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У [1–7] досліджені вимушені коливання вібратора за наявності сухого тертя, а також запропоновані числовий та аналітичний метод розв'язку рівнянь динамічно нелінійних вібросистем. У [9] для таких досліджень використано метод гармонічного балансу. Слід зазначити, що для аналітичного (точного) розв'язку подібних задач, як правило, використовуються підходи, взяті з [8]. Проте цим авторам невідомі дослідження, які б стосувались усунення небажаних коливань вібраційних (динамічно нелінійних) систем, зокрема, фазочастотних впливів на сили збурення вказаних систем.

Мета роботи – обґрунтувати фазочастотні методи впливу на параметри вимушеної сили для мінімізації динамічних коефіцієнтів вібраційних систем з сухим тертям.

Виклад основного матеріалу дослідження

1. Метод послідовних припасовувань В.Л. Саковича для розв'язання рівнянь динамічно нелінійних вібросистем* [3]. *(Загальний випадок).

Вимушені коливання динамічно нелінійних вібросистем описуються рівнянням

$$M \cdot \ddot{x} + F\left(x, \dot{x}, \omega \cdot t\right) \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + k \cdot x = Q \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \alpha\right); \tag{1}$$

$$x\left(0\right) = X_0; \quad \dot{x}\left(0\right) = 0; \quad x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -X_0; \quad \dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0, \tag{2}$$

де M – загальна коливна маса вібросистеми; k – сумарна жорсткість пружин; Q – амплітуда вимушеної сили; ω – частота вимушених коливань; $F\left(x, \dot{x}, \omega \cdot t\right)$ – додатна функція, що визначає величину сили непружного опору; $\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$ – множник, який вказує, що напрямок сили опору змінюється зі зміною напрямку швидкості; X_0 – амплітуда коливань; α – фазовий кут сили збурення у момент максимального переміщення системи.

Амплітуда коливань X_0 системи та фазовий кут α невідомі.

Точного аналітичного розв'язку рівнянь (1) немає. Опубліковані у літературі наближені методи можуть бути застосовані тільки до систем з малим опором, тобто з малою нелінійністю. Вказані наближені методи [5, 6, 9] грунтуються на припущенні, що коливання гармонічні.

До того ж у багатьох вібраційних машинах, особливо у віброущільнювачах, сили демпфування змінюються непропорційно до швидкості, а, значить, за формою є нелінійними. За величиною ці сили мають порядок сили збурення і можуть набагато перевищувати величину сил пружності пружин, тобто є порівняно великими. Такі вібромашини не можна розглядати як системи з малим опором.

Оскільки член, який виражає опір, є нелінійним, то рух буде негармонічний. Тому криві коливних величин $x\left(t\right)$, $\dot{x}\left(t\right)$ та $\ddot{x}\left(t\right)$ відрізняються від косинусоїди чи синусоїди. Отже, форма коливань залежить від виду функції демпфування: один вид кривих – за сухого тертя, інший – за аеродинамічного опору, третій – за гістерезисних опорів тощо. Звідси виникає необхідність встановити, який вид кривих має та чи інша функція демпфування. Знаючи це, за видом кривих, отриманих осцилографуванням, можна буде достовірніше встановити закон зміни опору у реальній вібромашині й знайти числові значення коефіцієнтів, що характеризують такий опір.

Усталені вимушені коливання здійснюються з частотою вимушеної сили; відповідно усі коливні величини, зокрема й сила демпфування, являють собою парні функції часу t. Розглядаючи силу опору як деяку періодичну вимушену силу завжди протилежну до швидкості за напрямком, запишемо рівняння (1) у такому вигляді:

$$M \cdot \ddot{x} + k \cdot x = Q \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \alpha\right) - F\left(x, \dot{x}, \omega \cdot t\right) \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = \Phi\left(\omega \cdot t\right). \tag{3}$$

Рівняння (3) розглядається як рівняння вимушених коливань системи без опору під впливом зовнішнього збурення довільної форми Φ (ω t). Розв'язок цього рівняння [1, 2] встановлює такі залежності між амплітудою коливань X_0, фазовим кутом α та функцією демпфування $F\left(x, \dot{x}, \omega \cdot t\right)$:

$$f_1\left(X_0, \alpha\right) = X_0 - \frac{Q}{M \cdot \omega^2} \cdot \frac{\lambda^2}{\left(1 - \lambda^2\right)} \cdot \left(\cos\alpha + \Delta \cdot \sin\alpha\right) = 0; \tag{4}$$

$$f_2\left(X_0,\alpha\right)=\sin\alpha-\frac{\left(1-\lambda^2\right)}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{\left(2\cdot Q\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}\right)\right)}\cdot\int\limits_0^{\pi/\omega}F\left(x,\dot{x},\omega\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}-\frac{\omega\cdot t}{\lambda}\right)d\left(\omega\cdot t\right)=0\,, \quad (5)$$

де $\lambda=\dfrac{\omega}{p}$ – відношення частоти ω вимушених коливань до частоти $p=\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ власних коливань системи без опору; Δ – величина, яка називається [3] поправкою на нелінійність, обчислюється за такою формулою:

$$\Delta=\lambda\cdot\frac{\int\limits_0^{\pi/\omega}F\left(x,\dot{x},\omega\cdot t\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}-\frac{\omega\cdot t}{\lambda}\right)d\left(\omega\cdot t\right)}{\int\limits_0^{\pi/\omega}F\left(x,\dot{x},\omega\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}-\frac{\omega\cdot t}{\lambda}\right)d\left(\omega\cdot t\right)}\,. \quad (6)$$

З рівняння (5) легко знаходимо

$$\alpha=\arcsin\left\{\frac{\left(1-\lambda^2\right)}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{\left(2\cdot Q\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}\right)\right)}\cdot\int\limits_0^{\pi/\omega}F\left(x,\dot{x},\omega\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}-\frac{\omega\cdot t}{\lambda}\right)d\left(\omega\cdot t\right)\right\}. \quad (7)$$

Тоді

$$X_0=\frac{Q}{M\cdot\omega^2}\cdot\frac{\lambda^2}{\left(1-\lambda^2\right)}\cdot\left(\cos\alpha+\Delta\cdot\sin\alpha\right)=0\,. \quad (8)$$

Умова, за якої $X_0\equiv 0$, набуває вигляду

$$\mathrm{ctg}\alpha^*=-\Delta\Leftrightarrow\alpha^*=\mathrm{arcctg}\left\{-\Delta\right\}=\pi-\mathrm{arcctg}\left(\Delta\right). \quad (9)$$

При цьому повинна виконуватись така умова:

$$\left|\frac{\left(1-\lambda^2\right)}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{\left(2\cdot Q\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}\right)\right)}\cdot\int\limits_0^{\pi/\omega}F\left(x,\dot{x},\omega\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}-\frac{\omega\cdot t}{\lambda}\right)d\left(\omega\cdot t\right)\right|\le 1\,. \quad (10)$$

Розглянемо тепер коливну систему у безрозмірних величинах. Для цього розділимо праву й ліву частини рівняння (1) на Q та введемо підстановку:

$$\tau=\omega\cdot t\,;\qquad x=A\cdot z\,;\qquad \frac{dx}{dt}=A\cdot\omega\cdot\frac{dz}{d\tau}\,;\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=A\cdot\omega^2\cdot\frac{d^2z}{d\tau^2}\,, \quad (11)$$

де

$$A=\frac{Q}{M\cdot\omega^2}\cdot\frac{\lambda^2}{\left(1-\lambda^2\right)}, \quad (12)$$

що являє собою амплітуду коливань заданої пружної системи у разі відсутності опору.

Тоді матимемо таке диференціальне рівняння для безрозмірної системи:

$$\frac{\lambda^2}{\left(1-\lambda^2\right)}\cdot\ddot{z}+\frac{1}{\left(1-\lambda^2\right)}\cdot z+F_0\left(z,\dot{z},\tau\right)\cdot\frac{\dot{z}}{|\dot{z}|}=\cos\left(\tau+\alpha\right). \quad (13)$$

Співвідношення функцій демпфування у рівняннях (1) та (13):

$$F\left(x,\dot{x},\omega\cdot t\right)=Q\cdot F_0\left(z,\dot{z},\tau\right). \quad (14)$$

Усі формули, отримані для системи (1), залишаються справедливими й для безрозмірної системи (13). Якщо рух системи заданий у безрозмірних величинах, тоді у розрахункових формулах потрібно тільки змінні x та $\dot{x}$ замінити відповідно на z та $\dot{z}$, а сталі параметри прийняти такими, що дорівнюють:

$$Q=1; \quad \omega=1; \quad M=\frac{\lambda^2}{\left(1-\lambda^2\right)}; \quad k=\frac{1}{\left(1-\lambda^2\right)}; \quad p=\frac{1}{\lambda}; \quad A=1. \tag{15}$$

Оскільки у рівнянні (13) є всього один параметр λ, який характеризує власне коливну систему замість чотирьох сталих параметрів (Q, ω, M, k) у рівнянні (1), аналіз у безрозмірних величинах істотно спрощується.

Для аналізу безрозмірних систем, представлених рівнянням (13), формули (4) та (5) записуються у зручнішому для застосування методі послідовних припасовувань у вигляді [3]:

$$z-\cos\alpha-\lambda\cdot K\cdot\int_0^{\pi}F_0\left(z,\dot{z},\tau\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}-\frac{\tau}{\lambda}\right)d\tau=0; \tag{16}$$

$$\sin\alpha-K\cdot\int_0^{\pi}F_0\left(z,\dot{z},\tau\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}-\frac{\tau}{\lambda}\right)d\tau=0, \tag{17}$$

де $K=\dfrac{\left(1-\lambda^2\right)}{\lambda^2\cdot 2\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2\cdot\lambda}\right)}$.

Тоді умова, за якої $z\equiv 0$, має такий вигляд:

$$\operatorname{ctg}\alpha^*=\left\{-\frac{\int_0^{\pi}F_0\left(z,\dot{z},\tau\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}-\frac{\tau}{\lambda}\right)d\tau}{\int_0^{\pi}F_0\left(z,\dot{z},\tau\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}-\frac{\tau}{\lambda}\right)d\tau}\right\}^{-1} \tag{18}$$

або

$$\alpha^*=\pi-\operatorname{arcctg}\left\{-\frac{\int_0^{\pi}F_0\left(z,\dot{z},\tau\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}-\frac{\tau}{\lambda}\right)d\tau}{\int_0^{\pi}F_0\left(z,\dot{z},\tau\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}-\frac{\tau}{\lambda}\right)d\tau}\right\}. \tag{19}$$

При цьому повинна виконуватись умова:

$$\left|K\cdot\int_0^{\pi}F_0\left(z,\dot{z},\tau\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot\lambda}-\frac{\tau}{\lambda}\right)d\tau\right|\le 1. \tag{20}$$

2. <u>Точний аналітичний розв'язок задачі (В.Л. Саковича</u> [4]<u>) аналізу вимушених коливань вібратора за наявності сухого тертя та фазочастотні методи їх гасіння.</u>

Тепер диференціальне рівняння вимушених коливань системи запишемо у вигляді

$$\begin{cases} M\cdot\ddot{x}+F\cdot\dfrac{\dot{x}}{|\dot{x}|}+k\cdot x=Q\cdot\cos\left(\omega\cdot t+\alpha\right); \\ x(0)=X_0; \quad \dot{x}(0)=0; \quad x(t_1)=-X_0; \quad \dot{x}(t_1)=0, \end{cases} \tag{21}$$

де α – фазовий кут вимушеної сили за $t=0$; $F=M\cdot g\cdot\mu$ (g – прискорення вільного падіння; μ – коефіцієнт тертя ковзання); t_1 – тривалість руху ($t_1\le \pi/\omega$).

Згідно з [4], коливання у системі відбуваються з паузами або без них. Все залежить від величини сили сухого тертя (його амплітуди F). Критичне значення сили тертя $F_{кр}$, за якого тривалість пауз зменшується до нуля, а тривалість руху t_1 прямує до напівперіоду коливань π/ω, набуває такого значення:

$$F_{кр} = \frac{\lambda^2}{\left|1-\lambda^2\right|} \cdot \frac{1 \cdot Q}{\sqrt{1+\left(\lambda \cdot tg\left(\frac{\pi}{2 \cdot \lambda}\right)\right)^2}}; \quad \lambda = \frac{\omega}{p}; \quad p = \sqrt{\frac{k}{M}}. \tag{22}$$

А. За $F = F_{кр}$, $t_1 = \pi/\omega$. Амплітуда коливань при цьому буде:

$$X_{0кр} = \underset{\left(F=F_{кр}\right)}{X_0} = \frac{Q}{M \cdot \omega^2} \cdot \frac{F_{кр}}{Q} = \frac{F_{кр}}{M \cdot \omega^2}, \tag{23}$$

а кут α (фазовий кут) обчислюється за формулою

$$\alpha_{кр} = -\mathrm{arctg}\left\{\lambda \cdot tg\left(\frac{\pi}{2 \cdot \lambda}\right)\right\}. \tag{24}$$

Закон руху системи визначається так:

$$\begin{gathered} x(t) = X_{0кр} \cdot \cos p \cdot t - \frac{Q}{M \cdot \left(\omega^2 - p^2\right)} \times \\ \times \left[\left(\cos \omega \cdot t - \cos p \cdot t\right) \cdot \cos \alpha_{кр} - \left(\sin \omega \cdot t - \frac{\omega}{p} \cdot \sin p \cdot t\right) \cdot \sin \alpha_{кр}\right] - \frac{F_{кр}}{M \cdot p^2} \cdot \left(1 - \cos p \cdot t\right) \cdot \mathrm{sign}\left(\dot{x}\right). \end{gathered} \tag{25}$$

Б. За $F < F_{кр}$, $t_1 = \pi/\omega$. Амплітуда коливань при цьому буде:

$$\underset{\left(F<F_{кр}\right)}{X_0} = X_0^* = \frac{Q}{M \cdot \omega^2} \cdot \frac{\lambda^2}{\left(1-\lambda^2\right)} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{F}{Q} \cdot \frac{\left(1-\lambda^2\right)}{\lambda} \cdot tg\left(\frac{\pi}{2 \cdot \lambda}\right)\right)^2}, \tag{26}$$

а кут α (фазовий кут) обчислюється за формулою

$$\alpha^* = \arcsin\left[\frac{F}{Q} \cdot \mathrm{sign}\left(\dot{x}^*\right) \cdot \frac{\left(1-\lambda^2\right)}{\lambda} \cdot tg\left(\frac{\pi}{2 \cdot \lambda}\right)\right]. \tag{27}$$

Закон руху системи визначається у цьому випадку так:

$$\begin{gathered} x^*(t) = X_0^* \cdot \cos p \cdot t - \frac{Q}{M \cdot \left(\omega^2 - p^2\right)} \times \\ \times \left[\left(\cos \omega \cdot t - \cos p \cdot t\right) \cdot \cos \alpha^* - \left(\sin \omega \cdot t - \frac{\omega}{p} \cdot \sin p \cdot t\right) \cdot \sin \alpha^*\right] - \frac{F}{M \cdot p^2} \cdot \left(1 - \cos p \cdot t\right) \cdot \mathrm{sign}\left(\dot{x}^*\right). \end{gathered} \tag{28}$$

В. За $F > F_{кр}$, $t_1 < \pi/\omega$ і коливання здійснюються з паузами. Для визначення тривалості руху t_1 (або її безрозмірної величини $\tilde{T} = \omega \cdot t_1$) матимемо таке трансцендентне рівняння:

$$\begin{gathered} \frac{\tilde{T}}{2} - \arccos\left[\left(\frac{F}{Q}\right) \cdot \mathrm{sign}\left(\dot{x}^{**}\right) \cdot \frac{\left(1-\lambda^2\right) \cdot \sin\left(\tilde{T}/2 \cdot \lambda\right)}{\left[\cos\left(\tilde{T}/2\right) \cdot \sin\left(\tilde{T}/2 \cdot \lambda\right) - \lambda \cdot \sin\left(\tilde{T}/2\right) \cdot \cos\left(\tilde{T}/2 \cdot \lambda\right)\right]}\right] - \\ -\mathrm{arctg}\left\{\frac{\sin\left(\tilde{T}\right) - \lambda \cdot \sin\left(\tilde{T}/\lambda\right)}{\cos\left(\tilde{T}\right) - \cos\left(\tilde{T}/\lambda\right)}\right\} = 0. \end{gathered} \tag{29}$$

Амплітуда коливань при цьому режимі руху має такий вигляд:

$$\underset{\left(F>F_{кр}\right)}{X_0} = X_0^{**} = \frac{Q}{M \cdot \omega^2} \cdot \lambda^2 \cdot \left(\cos \alpha^{**} - \frac{F}{Q} \cdot sign\left(\dot{x}^{**}\right)\right), \tag{30}$$

а кут α^{**} обчислюється за такою формулою:

$$\alpha^{**} = -\operatorname{arctg}\left\{\frac{\sin\left(\tilde{T}\right) - \lambda \cdot \sin\left(\tilde{T}/\lambda\right)}{\cos\left(\tilde{T}\right) - \cos\left(\tilde{T}/\lambda\right)}\right\}. \tag{31}$$

Закон руху системи визначається для цього режиму руху так:

$$x^{**}(t) = X_0^{**} \cdot \cos p \cdot t - \frac{Q}{M \cdot \left(\omega^2 - p^2\right)} \times$$
$$\times\left[\left(\cos\omega \cdot t - \cos p \cdot t\right) \cdot \cos\alpha^{**} - \left(\sin\omega \cdot t - \frac{\omega}{p} \cdot \sin p \cdot t\right) \cdot \sin\alpha^{**}\right] - \frac{F}{M \cdot p^2} \cdot (1 - \cos p \cdot t) \cdot \operatorname{sign}\left(\dot{x}^{**}\right). \tag{32}$$

Відношення амплітуди коливань X_0 до переміщення системи від дії статичної сили Q прийнято називати динамічним коефіцієнтом (або коефіцієнтом підсилення):

$$\chi = \frac{\tilde{X}_0}{\left(Q/k\right)} = \frac{\tilde{X}_0}{\left[\frac{Q}{M \cdot \omega^2} \cdot \lambda^2\right]}, \tag{33}$$

де $\tilde{X}_0$ приймає значення X_0, X_0^* та X_0^{**} відповідно (для випадків ***А***, ***Б*** та ***В***).

Для кожного з вказаних випадків маємо для коефіцієнта підсилення такі значення:

А-випадок

$$\chi_{F=F_{кр}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{F_{кр}}{Q}\right); \tag{34}$$

Б-випадок

$$\chi_{F<F_{кр}} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{F}{Q} \cdot \frac{\left(1 - \lambda^2\right)}{\lambda} \cdot tg\left(\frac{\pi}{2 \cdot \lambda}\right)\right)^2}}{\left(1 - \lambda^2\right)}; \tag{35}$$

В-випадок

$$\chi_{F>F_{кр}} = \cos\alpha^{**} - \frac{F}{Q} \cdot sign\left(\dot{x}^{**}\right). \tag{36}$$

Далі визначимо умови, за яких $\chi = 0$. При цьому у рівняннях закону руху $x(t)$, $x^*(t)$ та $x^{**}(t)$ член, пропорційний до X_0, X_0^* та X_0^{**}, відповідно зникає. Це означає, що зникають коливання у системі $\sim \cos p \cdot t$, але можуть залишитись коливання $\sim F$ та власні коливання системи (вони виникають завжди, оскільки початкові умови – ненульові у (21)) і $\sim Q$.

У випадку ***А*** $\chi = 0$ за $F_{кр} = 0$. Цієї ситуації можна досягти тоді, коли

$$tg\left(\frac{\pi}{2 \cdot \lambda}\right) = tg\left(\frac{\pi}{2} \cdot s\right),$$

де $s = 3,\ 5,\ \ldots$, тобто

$$s = \frac{1}{\lambda} = \frac{p}{\omega}. \tag{37}$$

Отже, за умови наявності у системі $p = \omega \cdot s$-резонансу (супергармонічного) $\frac{s}{1} = s$-порядку залишаються лише вільні коливання без опору.

У випадку ***Б*** $\chi = 0$ за умови:

$$\left[\frac{F}{Q} \cdot \frac{\left(1 - \lambda^2\right)}{\lambda} \cdot tg\left(\frac{\pi}{2 \cdot \lambda}\right)\right]^2 = 1. \tag{38}$$

При цьому зникають лише вимушені коливання системи без опору, а залишаються власні та стала складова, викликана переміщенням у системі від впливу (дії) статично прикладеної сили $F \cdot \operatorname{sign}\left(\dot{x}^{*}\right)$.

У випадку ***B*** $\chi = 0$ за умови:

$$\cos\alpha^{**} = \frac{F \cdot sign\left(\dot{x}^{**}\right)}{Q}. \tag{39}$$

При цьому знову зникають лише вимушені коливання.

Слід зазначити, що у випадку ***B*** (коливань з паузами) величина сили F та її знак визначаються (за відомого T з (29)) зі співвідношення (31) та такого виразу:

$$\frac{F}{Q} \cdot sign\left(\dot{x}^{**}\right) = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]} \cdot \frac{\left\{\cos\left(\frac{\omega \cdot t_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p \cdot t_1}{2}\right) - \frac{\omega}{p} \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p \cdot t_1}{2}\right)\right\}}{\sin\left(\frac{p \cdot t_1}{2}\right) \cdot \sec\left(\alpha^{**} + \frac{\omega \cdot t_1}{2}\right)}. \tag{40}$$

Висновки:

1. Проведено аналіз точних аналітичних розв’язків задачі про вимушені коливання з сухим тертям, отриманих у роботах В.Л. Саковича.

2. Усталені коливання можуть відбуватися без пауз і з паузами. Якщо сила тертя менша від критичного значення, коливання відбуваються без пауз, а за сили тертя, більшої за критичну, – з паузами. Паузи виникають лише у крайніх точках, які відповідають максимальному відхиленню системи від положення рівноваги, причому в одній половині періоду може бути лише одна пауза.

3. Реалізуючи у розглядуваних системах (для випадку коливань без пауз) супергармонічні режими руху s -го порядку (s = 3, 5, 7, …) можна “запирати” їх сухим тертям (динамічний коефіцієнт для вимушених коливань дорівнює нулю). До того ж у випадку коливань з паузами необхідні фазочастотні впливи на систему, які теж знищують вимушені коливання у системі. При цьому залишаються (за ненульових початкових умов) складові власних коливань пружної системи без опору і стала складова, яка дорівнює переміщенню системи під дією статично прикладеної сили $\sim F$ (сили сухого тертя).

4. Отримані у роботі результати можуть бути у подальшому використані для уточнення та удосконалення існуючих інженерних методів розрахунку вібраційних систем з сухим тертям, функціонування яких вимагає гасіння (істотного зменшення по амплітуді) небажаних коливань, які виникають у моменти зміни напрямку руху системи (знака швидкості її руху), під час проектування/конструювання таких демпферів, а також у режимах їх реальної експлуатації.

1. Сакович В.Л. Об учёте сил сопротивления в вибраторах для бетона / В.Л. Сакович // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1961. – № 6. 2. Сакович В.Л. Исследование машин вибрационного действия / В.Л. Сакович // Науч. тр. Киевского инж.-строит. ин-та. – 1961. – Вып. 17. 3. Сакович В.Л. Метод решения уравнений динамически нелинейных вибросистем / В.Л. Сакович // Науч. тр. Киевского инж.-строит. ин-та. – 1964. – С. 91–105. 4. Сакович В.Л. Вынужденные колебания вибратора при наличии сухого трения / В.Л. Сакович // Науч. тр. Киевского инж.-строит. ин-та. – 1964. – С. 116–127. 5. Den-Hartog J.P. Forced Vibrations With Combined Coulomb and Viscous Frictions. / J.P. Den-Hartog // Transactions of ASME. APM-53-9. – 1931. – P. 107 – 115. 6. Ден-Гартог Дж.П. Механические колебания / Дж.П. Ден-Гартог. – М.: Физматгиз, 1960. – 320 с. 7. Стрекис А.М. Вынужденные колебания с одной степенью свободы при наличии сухого трения и при произвольной возмущающей силе / А.М. Стрекис // Вопросы динамики и динамической прочности. – Рига, 1956. – Вып. IV. 8. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики / А.Н. Крылов. – М.–Л.: Физматгиз, 1950. – 400 с. 9. Вибрации в технике: справочник: в 6-ти т. – Т. 2.: Колебания нелинейных механических систем / под ред. И.И. Блехмана. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.