

## ДИНАМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЛАСТИН З ФУНКЦІОНАЛЬНО ГРАДІЄНТНИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА ЗГИНУ

© Дівеєв Б. М., Коник С. І., 2016

Розглянуто функціонально градієнтні матеріали (ФГМ) з неперервно змінними властивостями. Вони застосовуються у багатьох будівельних, механічних, аерокосмічних структурах через їх довговічність і високу жорсткість. Хоча відомо багато робіт з теоретичного аналізу вільних і вимушених коливань ФГМ-структур, дослідження по 3d-розв'язках лімітовані. Застосовано метод точного визначення їх розподілу у плиті за циліндричного згину. Запропоновано спосіб апроксимації для напруженого стану ФГМ плит. Це адаптивний метод, незалежний від строгості припущень для моделі плити. Уточнена модель враховує зсувні, нормальні деформації і напруження. Розглядається розподіл напружень за циліндричного згину пластини за різних частот коливань. Проведено оцінювання демпфуючих властивостей у частотній області.

**Ключові слова:** функціонально градієнтні матеріали, метод аналізу напружень, демпфуючі властивості.

Functionally graded materials (FGMs) with continuously varying material properties have attracted much attention of researchers. They have been widely used in many structures of civil, mechanical, space engineering owing to high strength and high stiffness. Although a large number of papers on the theoretical analysis on the analysis of the free and forced vibration of functionally graded structures study on 3d solutions of FGMs is still limited. This paper presents a new stress analysis method for the accurate determination of the detailed stress distributions in plates subjected to cylindrical bending. Some approximate methods for the stress state predictions for FGM plates are presented here. The present method is adaptive and does not rely on strong assumptions about the model of the plate. A specified theoretical model takes account of the shear and normal strains and stresses. The stress distribution by cylindrical plate bending by different vibration frequencies is under discussion. Damping properties in the frequency region are appreciated.

**Key words:** functionally graded materials, stress analysis method, damping properties.

**Вступ.** Пластини з функціонально градієнтних матеріалів (ФГМ) з неперервно змінними по товщині властивостями матеріалів привернули увагу багатьох дослідників через їх властивості. Вони використовуються у багатьох структурах будівельної, машинобудівної, космічної техніки через високу міцність. Це, наприклад, гомогенний еластичний шар керамічного матеріалу, приклеєний до металеві структури як тепловий захист у високотемпературному навколишньому середовищі. Проте значні термопружні властивості керамічного і металевого матеріалів, чіткий інтерфейс приводять до строгої несумісності еластичних полів у зоні контакту. Це веде до розшарування і руйнування унаслідок раптової зміни у тиску і зсувах в зоні контакту. Тому переважно уникають цього чіткого інтерфейсу двох різнорідних матеріалів. Це може бути досягнуто, проектуючи в такий спосіб транзитну зону, в якій термічні властивості безперервно змінюються, замість раптового стрибка від шару керамічного матеріалу до шару металевого,

поступово заміняючи частку обсягу складників по товщині. Тому ФГМ мають переваги над гомогенними і багатошаровими матеріалами, що підтверджують численні моделі і експериментальні дослідження.

Останнім часом широкого застосування здобули конструкції з шаруватих композитних матеріалів, які є одними з найживаніших у сучасному машинобудуванні, і особливо в авіакосмічній промисловості. Враховуючи їх легку вагу і високу міцність, вони застосовуються в цивільному будівництві, дорожньому транспорті і машинобудуванні. Щоб моделювати пластини з ФГМ так само, як композитні шаруваті пластини, важливо мати ефективну загальну теорію, щоб оцінити ефекти поперечних зсувних напружень на роботу пластини. Хоча відомо багато досліджень з аналізу вільної і вимушеної вібрації ФГ-структур [1–3], менше відомо робіт щодо оптимізації спектра частот і демпфування.

**Аналіз останніх досліджень.** Сьогодні продовжують інтенсивно розроблятися різноманітні підходи до моделювання конструкцій, що містять неоднорідні тонкостінні елементи. Порівняльний аналіз теорій шаруватих елементів за різних умов навантаження наведений у [4, 5]. У [6–10] отримані уточнені рівняння динамічного згину шаруватих композитних пластин. На основі цієї ж методики у цій роботі отримані динамічні характеристики пластин з ФГМ.

**Основні співвідношення.** Розглянемо тепер шарувату пластину за циліндричного динамічного згину (рис. 1).

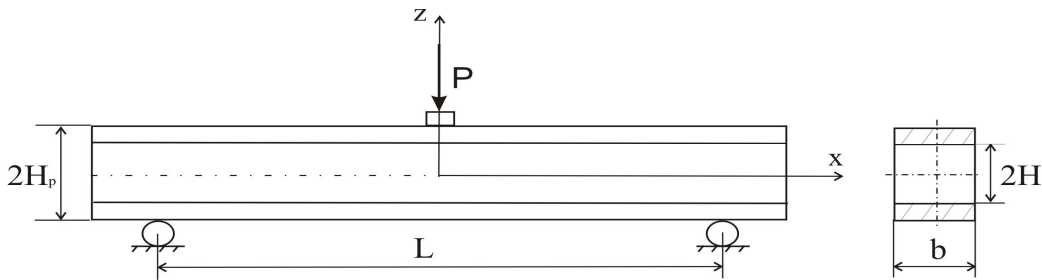


Рис. 1. Симетрична тришарова пластинка (сандвіч)

Прийmemo такі кінематичні апроксимації ( $U = U_e \cup U_d$ ) для симетричної тришарової пластини завтовшки  $2H_p$  і з внутрішнім шаром –  $2H$  (розглядається циліндричний згин):

$$U_e - \begin{cases} u = \sum_{i,k} u_{ik}^e z^{2i-1} j_k(x), & 0 < z < H, \\ w = \sum_{i,k} w_{ik}^e z^{2i-2} g_k(x), & 0 < x < L, \end{cases} \quad U_d - \begin{cases} u = \sum_{i,k} u_{ik}^d (z-H)^i j_k(x), & H < z < H_p, \\ w = \sum_{i,k} w_{ik}^d (z-H)^i g_k(x), & 0 < x < L, \end{cases} \quad (1)$$

де  $u$ ,  $w$  – відповідно тангенціальні та нормальні переміщення шарів;  $u_{ik}^e$ ,  $w_{ik}^e$ ,  $u_{ik}^d$ ,  $w_{ik}^d$  – невідомі величини;  $j_k(x)$ ,  $g_k(x)$  – апріорно відомі координатні функції, які залежать від граничних умов на краях балки.

Узагальнений закон Гука у разі циліндричного згину шарів балки:

$$s_{xx} = C_{xx} e_{xx} + C_{xz} e_{zz}, \quad s_{zz} = C_{zx} e_{xx} + C_{zz} e_{zz}, \quad \tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}. \quad (2)$$

Тепер, на відміну від [4–9], коефіцієнти  $C_{xx}$ ,  $C_{xz}$ ,  $C_{zz}$ ,  $G_{xz}$  змінні по товщині пластини. Переважно розглядається степенева залежність [1–3]

$$C_{xx} = C_{xx}^0 (\alpha z^a + \beta z^b), \dots, G_{xz} = G_{xz}^0 (\alpha z^a + \beta z^b).$$

Розглянемо гармонічні коливання:

$$u_{ik}^e = \bar{u}_{ik}^e e^{i\omega t}, w_{ik}^e = \bar{w}_{ik}^e e^{i\omega t}, u_{ik}^d = \bar{u}_{ik}^d e^{i\omega t}, w_{ik}^d = \bar{w}_{ik}^d e^{i\omega t}. \quad (3)$$

Підставивши (1), (2) і (3) у варіаційне рівняння Гамільтона–Остроградського:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_V (s_{xx} de_{xx} + s_{zz} de_{zz} + t_{xz} de_{xz} - r \frac{\partial u}{\partial t} d \frac{\partial u}{\partial t} - r \frac{\partial w}{\partial t} d \frac{\partial w}{\partial t}) dV + \int_{S_K} k U dU dS - \int_{S_P} P dU dS \right) dt = 0, \quad (4)$$

і застосувавши метод Бубнова–Гальоркіна, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення амплітуд переміщень:

$$-w^2 [M] \bar{U} + iw [C] \bar{U} + [K] \bar{U} = \bar{p}, \quad (5)$$

де  $e_{ii}$  – поздовжні деформації;  $g_{ij}$  – деформації зсуву;  $s_{ii}$  – нормальні напруження;  $t_{ij}$  – дотичні напруження;  $V$  – об’єм балки;  $S_k$  – поверхня пружного затиснення;  $S_p$  – поверхня з відомими зусиллями;  $\bar{U}$ ,  $\bar{p}$  – вектори амплітуд переміщень і зовнішніх зусиль;  $k$  – жорсткість затиснення (основа Вінклера);  $[M]$  – матриця мас;  $[C]$  – матриця в’язко-пружного демпфування;  $[K]$  – матриця жорсткості;  $[t_1, t_2]$  – часовий інтервал;  $w$  – частота коливань.

Як числовий приклад, розглянемо пластину, виготовлену з алюмінію та наповнену з обох боків керамічним сплавом. Модуль Юнга алюмінію – 70 ГПа, а сплаву – 270 ГПа. Розглянемо випадок, коли концентрація домішки змінюється за степеневим законом. Отже, зміна усіх пружних констант і густина по товщині пластини:

$$E(z) = E_A + (E_C - E_A) \frac{z^n}{H^n}, \quad G(z) = G_A + (G_C - G_A) \frac{z^n}{H^n}, \quad r(z) = r_A + (r_C - r_A) \frac{z^n}{H^n}, \quad (6)$$

де наведені технічні модулі пружності:

$$C_{xx} = \frac{E_1}{1 - n^2 E_2 / E_1}, \quad C_{zz} = \frac{E_2}{1 - n^2 E_2 / E_1}, \quad C_{xz} = \frac{n E_1}{1 - n^2 E_2 / E_1}, \quad G_{xz} = G,$$

через які виражаються модулі у (2).

**Числові результати.** На рис. 2 показані АЧХ-пластини для різних  $n$  в (6).

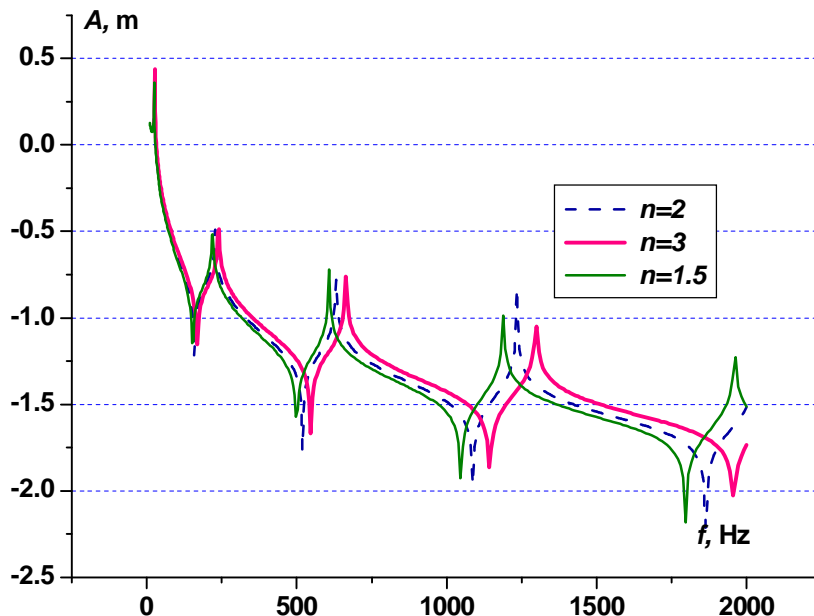


Рис. 2. АЧХ-пластини для різних  $n$

На рис. 3, 4 показані змінні по товщині пластини модулі Юнга та напруження для різних значень  $n$  в (6).

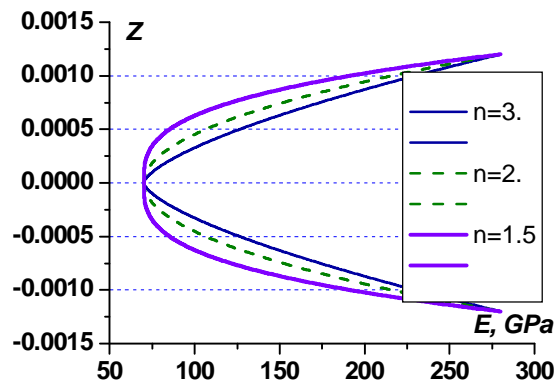


Рис. 3. Змінні по товщині пластини модулі Юнга для різних значень  $n$

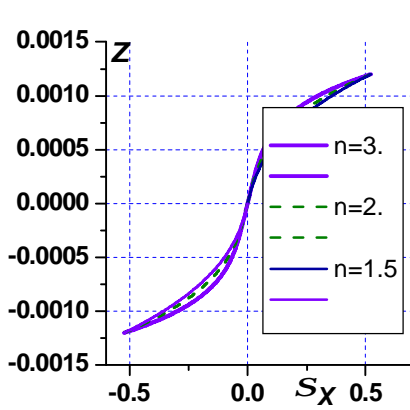


Рис. 4а. Змінні по товщині пластини напруження  $S_{xx}$  для різних значень  $n$

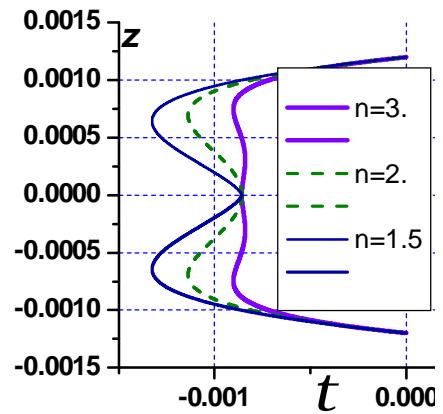


Рис. 4б. Змінні по товщині пластини напруження  $t$

На рис. 4а показані змінні по товщині пластини напруження для різних значень  $n$  у (6). Товщина пластини – 0.012 м. Тут наведені безрозмірні значення напружень за частоти 200 Гц.

Розглянемо як другий числовий приклад пластину, виготовлену з алюмінію та наповнену з обох боків керамікою. Модуль ядра Юнга – 70 ГПа, а кераміки (алюміна) – 370 ГПа. Густина, відповідно, 2700 та 3700 кг/м<sup>3</sup>. На рис. 5 показані АЧХ пластини для різних  $n$ .

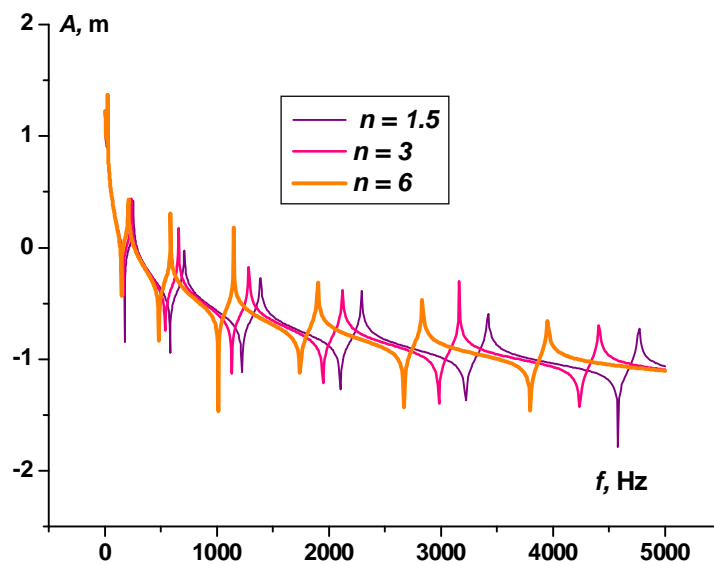


Рис. 5. АЧХ пластини для різних  $n$

На рис. 6, 7а, 7б показані змінні по товщині пластини модуля Юнга та напруження для різних значень  $n$ .

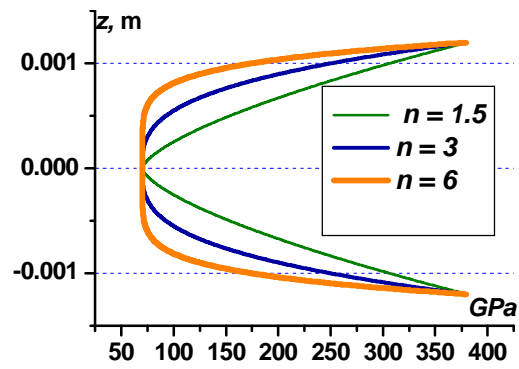


Рис. 6. Змінні по товщині пластини модулі Юнга для різних значень  $n$

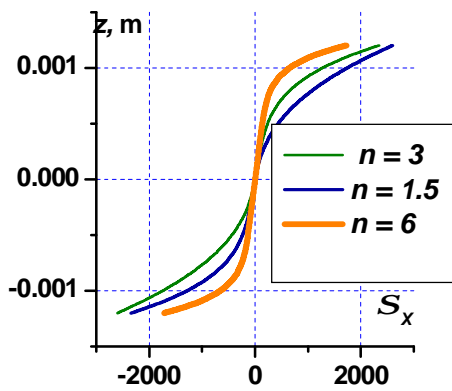


Рис. 7а. Змінні по товщині пластини напруження  $S_{xx}$  для різних значень  $n$

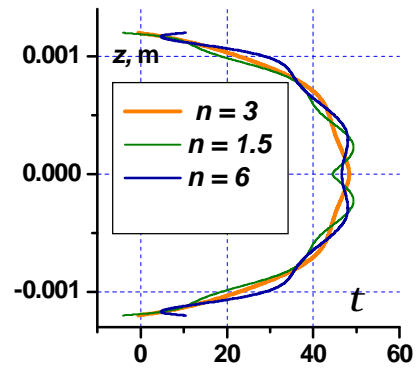


Рис. 7б. Змінні по товщині пластини напруження  $t$

На рис. 8 показані величини демпфування у пластині.

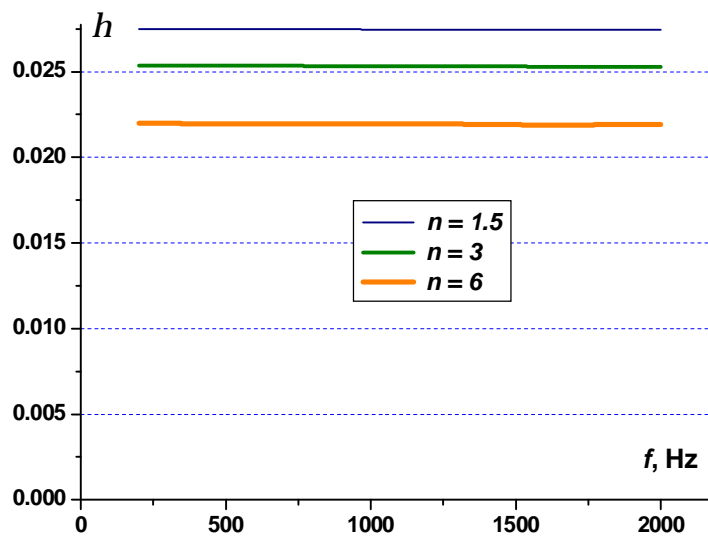


Рис. 8. Величини демпфування у пластині

Величини демпфування підраховані за формулою (7). Для неоднорідних матеріалів відома формула для демпфування у пакеті:

$$h = \frac{h_1 [q_1]^T [K_1] [q_1] + h_2 [q_2]^T [K_2] [q_2] + \dots + h_N [q_N]^T [K_N] [q_N]}{[q]^T [K] [q]}, \quad (7)$$

де  $[K_i]$  – компоненти матриці жорсткості, для  $i$ -у прошарку  $i$ ;  $h_i$  – демпфування у прошарку  $i$ ;  $|q|$  – вектор рішення; Т – індекс транспонування. Вважаємо, що матриця демпфування пропорціональна до матриці жорсткості  $C_i = h_i [K_i]$ . Це формула для шаруватої пластини. Для неперервно змінних по товщині модулів пружності та демпфуванню аналогічно, як у (7), можна записати:

$$h = \frac{\int h(z) [K] [q] dz [q]}{[q]^T [K] [q]}, \quad (8)$$

де гіпотетично вважаємо степеневий розподіл демпфування за тією самою формулою, що і жорсткість:

$$h(z) = h_A + (h_C - h_A) \frac{z^n}{H^n}. \quad (9)$$

Задавалися такі значення для демпфування складників:  $h_A = 0.003$ ,  $h_C = 0.03$ . Показник зміни  $n = 3$  такий, як для жорсткості.

**Порівняння ФГ-пластини з тришаровою пластиною.** Порівняємо напруження у пластині з ФГ-матеріалу ( $n=3$ ) та деякої еквівалентної їй тришарової. Зовнішні шари цієї пластини (сандвіча) мають механічні властивості жорсткого шару у ФГМ-пластині. Підберемо таку товщину цих шарів, щоб АЧХ цих пластин збігались (рис. 9).

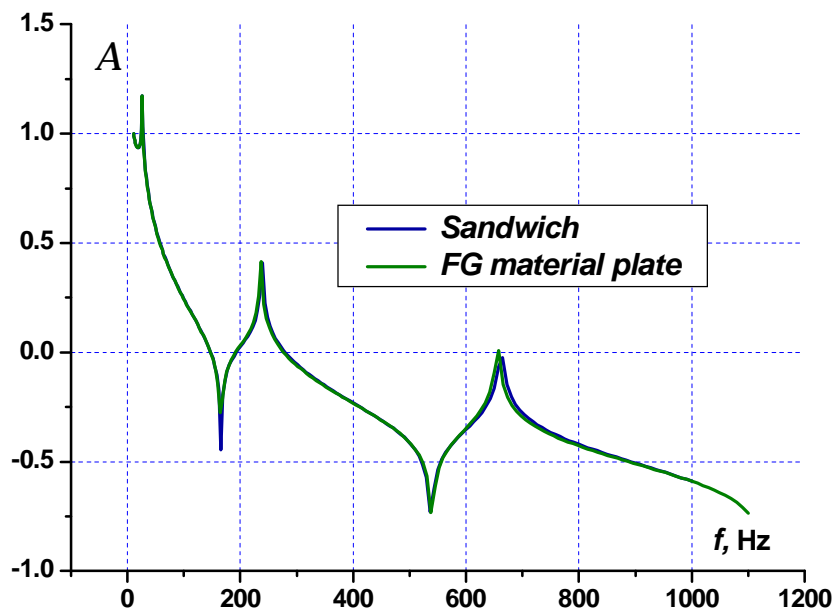


Рис. 9. АЧХ-пластини ( $n=3$ ) та еквівалентної їй тришарової пластини

На рис. 10, 11 показані змінні по товщині модуль Юнга та напруження для цих пластин. Для дотичних напружень розподіли подібні. Нормальні напруження на порядок менші, ніж дотичні і тут не наводяться. Відрізняються лише поздовжні нормальні напруження  $\sigma_{xx}$ .

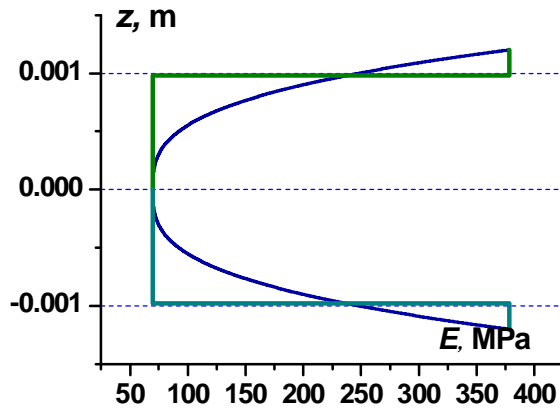


Рис. 10. Змінні по товщині пластин модулі Юнга

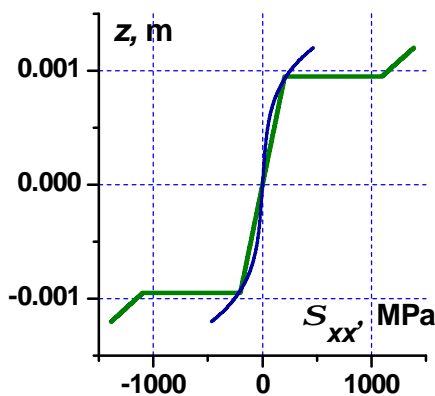


Рис. 11а. Змінні по товщині пластин напруження  $\sigma_{xx}$

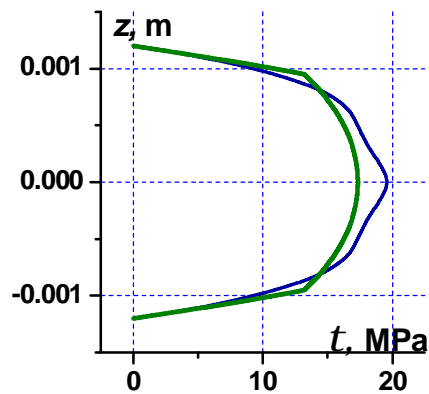


Рис. 11б. Змінні по товщині пластин напруження  $\tau$

**Висновки.** На основі уточнених співвідношень згину шаруватих пакетів отримані динамічні характеристики циліндричного згину функціонально градієнтних пластин. Досліджений вплив глибини проникнення жорсткої поверхневої компоненти на частотні властивості пластини.

Наведено розподіли напружень по товщині пластини для різного ступеня концентрації поверхневої речовини. Наведено розподіл цих напружень порівняно з розподілом напружень у тришаровій пластині з жорсткими поверхневими шарами з підбраною товщиною для одержання ідентичних частотних характеристик до функціонально градієнтної пластини. Основна відмінність виявлена лише для поздовжніх нормальних напружень, які у тришаровій пластині значно більші. На противагу розповсюдженій думці, міжшарові дотичні напруження відрізняються мінімально. Отримані значення демпфування у ФГ-пластині. Закон розповсюдження величини демпфування по товщині пластин приймався гіпотетичним степеневим, як і для модуля Юнга. Зауважимо, що не вдалося знайти у літературі показників демпфування суміші матеріалу основи – алюмінію та кераміки – алюмни. Для визначення цих показників, як зрештою і для жорсткості суміші, можна запропонувати схеми ідентифікації, розроблені раніше, для ідентифікації модулів пружності композитів [6–10], що і планується здійснити у майбутньому.

1. Elishakoff I, Guede Z (2004) Analytical polynomial solutions for vibrating axially graded beams. *Mech Adv Mater Struct* 11:517–533. 2. Cheng ZQ, BatraRC(2000) Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates. *J Sound Vib*

229:879–895. 3. Loy CT, Lam KY, Reddy JN (1999) *Vibration of functionally graded cylindrical shells*. *Int J Mech Sci* 41:309–324. Vel SS, Batra RC (2004) *Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates*. *J Sound Vib* 272:703–730. 4. Heng Hu, Salim Belouettar, Michel Potier-Ferry, El Mostafa Daya. *Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites // Composite Structures*. – 2008. – 84. – P. 282–292. 5. Carrera E. *Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells // Appl. Mech. Rev.* – 2003. – 56. – P. 287–308. 6. Diveyev B., Butyter I., Shcherbyna N. *High order theories for elastic modules identification of composite plates. Part 1. Theoretical approach // Mechanics of Composite Materials*. – Vol.44, No.1. – 2008. – P. 25–36. 7. Diveyev B., Butyter I., Shcherbyna N. *High order theories for elastic modules identification of composite plates. Part 2. Theoretical-experimental approach // Mechanics of Composite Materials*. – 2008. – Vol. 44. – No.2. – P. 139–144. 8. Diveyev B., Butyter I., Shcherbyna N. *Combined evolutionary non-deterministic methods for layered plates mechanical properties identification. // Proceeding of 16<sup>th</sup> International Congress on Sound and Vibration (ICSV-16), July 5–9, 2009, Krakow, Poland. (electronic edition, 8p.)* 9. Дівеев Б. М., Козут І. С., Бутитер І. Б., Черчик Г. Т. *Ідентифікація модулів пружності шаруватих балок на основі уточнених моделей розрахунку та статичних експериментальних досліджень. // Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2012. – Т. 48. – № 3. – С. 24–30. 10. Дивеев Б., Бутитер И, Козут И., Щербина Н. *Идентификация модулей упругости слоистых балок на основе уточненных моделей расчета и комбинированных экспериментальных исследований // Механика композитных материалов*. – 2012. – Т. 48, №6. – С. 1–14.