

## РОЗРАХУНОК БАГАТОПРОГОНОВОЇ ВИСОТНОЇ КОНСТРУКЦІЇ НА СТІЙКІСТЬ

© Кузьо І. В., Кунта О. Є., 2016

Побудовано математичну модель напружено-деформованого стану та узагальнено алгоритм розрахунку багатопрогону висотної конструкції на стійкість. Прийнято, що споруда заземлена в основі і додатково прикріплена на межах прогонів до стіни будівлі. На верхньому кінці висотна конструкція навантажена статичною осьюовою силою. Момент інерції поперечного перерізу і поздовжня сила змінюються за ступінчастим законом по висоті. Розрахунок виконується з урахуванням податливості елементів кріпильних вузлів із застосуванням матричного методу початкових параметрів. Наводяться результати досліджень впливу висоти споруди, кількості і характеристик проміжних опор на критичне навантаження.

**Ключові слова:** багатопрогону висотна конструкція, стійкість, матричний метод початкових параметрів, узагальнений алгоритм розрахунку.

The mathematical model of stress-strain state and generalized algorithm based on stability high-rise construction is built. The structure fixed at the base and attached to an additional runs within the wall of the building. At the upper end of the high-rise construction loaded static axial force. The moment of inertia of the cross-sectional and longitudinal strength changing by the law stepped in height. The calculation is performed with taking into account compliance of fastening element nodes, using the matrix method of initial parameters. The results of studies of the impact of high-rise construction, number and characteristics of intermediate supports a critical load are shown.

**Key words:** high-rise construction, stability, matrix method of initial parameters, generalized calculation algorithm.

**Постановка проблеми.** Для забезпечення працездатності висотних конструкцій та споруд постає потреба в їх розрахунку на стійкість. Найпростіший підхід до аналізу стійкості довговимірних конструкцій полягає у застосуванні розрахункових моделей зі скінченною кількістю ступенів вільності, у яких конструкція розглядається як система жорстких елементів, що пов'язані між собою за допомогою пружних шарнірів [7, 9]. Класичні задачі стійкості пружних однопрогонних і багатопрогонних систем зводяться до знаходження і аналізу фундаментальних розв'язків диференціальних рівнянь зігнутої осі стрижня і розглядаються у [1–3, 5–8]. Для дослідження стійкості висотних довговимірних конструкцій застосовують також енергетичні та динамічний критерії [9, 10]. Вивчається вплив особливостей прикладення навантажень, зокрема дії слідкуючих сил, на стійкість однопрогонних конструкцій [5, 9, 10]. Досліджуються особливості розрахунку складених довговимірних конструкцій [6, 8], а також конструкцій змінного поперечного перерізу [7]. Розглядається вплив власної ваги на стійкість висотних конструкцій [8, 11], а також вплив дії пружного середовища на критичне осьове навантаження стрижнів [1–3, 8]. У зв'язку з однотипністю задач про вільні коливання та про стійкість пружних систем, ці задачі нерідко розв'язують у спільній постановці [4, 11–15] та розробляють спільні алгоритми розрахунку власних частот та критичних навантажень, а також власних форм коливань та форм деформування на межі стійкості. Особлива увага приділяється розробленню комп'ютерних методів і алгоритмів розрахунку довговимірних конструкцій на стійкість [1, 2, 6]. Проводяться дослідження статичної і

динамічної стійкості стрілових конструкцій машин [3, 17]. Вивчається також стійкість довговимірних конструкцій, що перебувають під дією динамічних навантажень [2, 3, 9, 11]. Зауважимо, що у дослідженнях стійкості і коливань висотних або довговимірних конструкцій застосовують як технічну теорію згину [5, 6, 9], так і неklasичну теорію балок С. Тимошенка [2, 8, 14, 15]. Для проведення розрахунків багатопрогонових конструкцій застосовується матричний метод початкових параметрів [1, 6]. До того ж існує потреба у розробленні математичної моделі і узагальненого алгоритму комп'ютерного розрахунку на стійкість багатопрогонових висотних конструкцій з урахуванням особливостей їх закріплення, а також дії технологічного навантаження і сил власної ваги.

**Мета роботи** – розробити математичну модель і узагальнений алгоритм розрахунку багатопрогонової висотної конструкції на стійкість з урахуванням ступінчастої зміни згинної жорсткості споруди і поздовжньої сили по висоті, податливості елементів кріплення конструкції до стіни будівлі або відтяжок, сумісної дії статичного осевого навантаження та сил власної ваги споруди. Для спрощення і систематизації обчислювального процесу алгоритм розрахунку ґрунтується на застосуванні матричного методу початкових параметрів.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Механічну систему багатопрогонової висотної конструкції подаємо на розрахунковій схемі (рис. 1) у вигляді вертикально складеного стрижня, що включає  $n$  ділянок з довжинами  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , погонними масами  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ , площами і осевими моментами інерції поперечних перерізів  $A_1, A_2, \dots, A_n$  і  $I_1, I_2, \dots, I_n$ . Умовну густину матеріалу для кожної з ділянок визначаємо як  $\rho_i = \mu_i/A_i$ . Модуль Юнга матеріалу споруди позначаємо як  $E$ . На межах ділянок передбачаємо наявність кріпильних вузлів масами  $m_1, m_2, \dots, m_n$  і податливих зв'язків з основою, коефіцієнти жорсткості яких у поперечному напрямку становлять  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , а в обертальному –  $c_{\phi 1}, c_{\phi 2}, \dots, c_{\phi n}$ . Прогини багатопрогонової висотної конструкції позначаємо як  $w_1, w_2, \dots, w_n$ ; поздовжні осі ділянок з початком у їхніх нижніх крайніх перерізах як  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

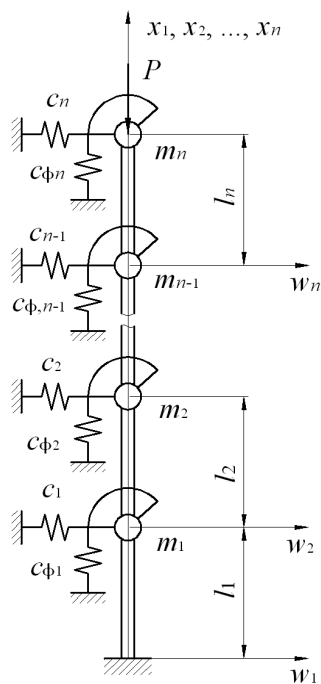


Рис. 1. Розрахункова схема багатопрогонової висотної конструкції

Диференціальні рівняння зігнутої осі багатопрогонової конструкції запишемо у вигляді

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} + b_i^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

де

$$b_i^2 = \frac{P_i}{EI_i},$$

$P_i$  – усереднена поздовжня сила у поперечному перерізі відповідної ділянки:

$$P_i = \left( \frac{m_i l_i}{2} + \sum_{j=i+1}^n m_j l_j + \sum_{j=i}^n m_j \right) g + P \quad (i = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$P_n = \left( \frac{m_n l_n}{2} + m_n \right) g + P. \quad (2)$$

Кут повороту поперечного перерізу, згинальний момент і внутрішню силу у горизонтальному перерізі конструкції визначаємо за такими формулами:

$$j_i = \frac{dw_i}{dx_i}; \quad M_i = -EI_i \frac{d^2 w_i}{dx_i^2}; \quad V_i = -EI_i \frac{d^3 w_i}{dx_i^3} - P_i \frac{dw_i}{dx_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Поперечну силу, на відміну від внутрішньої сили у горизонтальному перерізі, знаходимо як

$$Q_i = -EI_i \frac{d^3 w_i}{dx_i^3}. \quad (4)$$

Крайові умови, яким повинні відповідати розв'язки диференціального рівняння (1) на нижньому кінці споруди, запишемо у вигляді

$$w_1(0) = 0; \quad j_1(0) = 0. \quad (5)$$

Крайові умови для стиків сусідніх ділянок багатопрогової конструкції мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} w_{i+1}(0) &= w_i(l_i); \quad j_{i+1}(0) = j_i(l_i); \\ M_{i+1}(0) &= -c_j j_i(l_i) + M_i(l_i); \quad V_{i+1}(0) = c_i w_i(l_i) + V_i(l_i) \quad (i=1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (6)$$

Крайовими умовами для верхнього крайнього перерізу висотної споруди будуть залежності:

$$-c_j j_n(l_n) + M_n(l_n) = 0; \quad c_n w_n(l_n) + V_n(l_n) = 0. \quad (7)$$

Розв'язки однорідних диференціальних рівнянь (1) подаємо у матричному вигляді:

$$Y_i(x_i) = S_i(x_i) \cdot Y_i(0) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (8)$$

де

$$Y_i(x_i) = \text{col}[w_i(x_i), w_i'(x_i), w_i''(x_i), w_i'''(x_i)]; \quad (9)$$

$$S_i(x_i) = \begin{pmatrix} 1 & x_i & \frac{1}{b_i^2}(1 - \cos b_i x_i) & \frac{1}{b_i^3}(b_i x_i - \sin b_i x_i) \\ 0 & 1 & \frac{1}{b_i} \sin b_i x_i & \frac{1}{b_i^2}(1 - \cos b_i x_i) \\ 0 & 0 & \cos b_i x_i & \frac{1}{b_i} \sin b_i x_i \\ 0 & 0 & -b_i \sin b_i x_i & \cos b_i x_i \end{pmatrix}. \quad (10)$$

З урахуванням диференціальних залежностей (3) утворимо матричні співвідношення взаємозв'язків між функцією  $w_i(x_i)$ , з одного боку, та фізичними величинами, що характеризують напружено-деформований стан конструкції у цьому перерізі, – з іншого.

$$F_i(x_i) = A_i Y_i(x_i); \quad Y_i(x_i) = B_i F_i(x_i) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (11)$$

де

$$F_i(x_i) = \text{col}[w_i(x_i), j_i(x_i), M_i(x_i), V_i(x_i)]; \quad (12)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EI_i & 0 \\ 0 & -P_i & 0 & -EI_i \end{pmatrix}; \quad B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EI_i} & 0 \\ 0 & -\frac{P_i}{EI_i} & 0 & -\frac{1}{EI_i} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Крайові умови (6), (7) подамо у матричному вигляді:

$$F_{i+1}(0) = H_i F_i(l_i) \quad (i=1, 2, \dots, n-1); \quad F_{n+1} = H_n F_n(l_n), \quad (14)$$

де

$$F_{n+1} = \text{col}(w_n(l_n), j_n(l_n), 0, 0); \quad (15)$$

$$H_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_j i & 1 & 0 \\ c_i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad H_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_j n & 1 & 0 \\ c_n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

З урахуванням матричних співвідношень (8)–(16) одержимо матричний зв'язок геометричних і силових параметрів на кінцях споруди:

$$F_{n+1} = \left( \prod_{i=n}^1 H_i A_i S_i(l_i) B_i \right) \cdot F_1(0), \quad (17)$$

де матриця-колонка  $F_1(0)$ , згідно з крайовими умовами (5), має такий вигляд:

$$F_1(0) = \text{col}(0, 0, M_1(0), V_1(0)). \quad (18)$$

Задаючи по чергово матрицю-колонку (18) у вигляді

$$F_1(0) = \text{col}(0, 0, 1, 0) \text{ або } F_1(0) = \text{col}(0, 0, 0, 1), \quad (19)$$

за допомогою матричної залежності (17), визначаємо реакції третього і четвертого елементів матриці-колонки  $F_{n+1}$  на одиничні значення третього і четвертого елементів матриці-колонки  $F_1(0)$ . Реакції поступального переміщення  $w_n(l_n)$  на одиничні значення згинального моменту  $M_1(0)$  і внутрішньої сили  $V_1(0)$  позначаємо як  $r_{33}$  і  $r_{34}$ ; реакції обертального переміщення  $\varphi_n(l_n)$  на одиничні значення відповідних елементів матриці-колонки  $F_1(0)$  – як  $r_{43}$  і  $r_{44}$ . Тоді з урахуванням крайових умов (7) одержимо систему алгебричних рівнянь:

$$r_{33}M_1(0) + r_{34}V_1(0) = 0; \quad r_{43}M_1(0) + r_{44}V_1(0) = 0. \quad (20)$$

Для існування ненульових розв'язків системи (20) необхідно, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто:

$$\begin{vmatrix} r_{33} & r_{34} \\ r_{43} & r_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

Оскільки коефіцієнти алгебраїчних рівнянь (20) є функціями осьового навантаження споруди  $P$ , співвідношення (21) можна розглядати як характеристичне рівняння для знаходження критичних значень навантаження  $P_{k1}, P_{k2}, P_{k3}, \dots$ . У процесі виконання розрахунку багатопрогової висотної конструкції на стійкість значення поздовжніх сил на її ділянках визначаємо за формулами (2).

Для кожного з критичних значень осьового навантаження обчислюємо початкові параметри напружено-деформованого стану ділянок багатопрогової висотної конструкції за допомогою залежності

$$F_i(0) = \left( \prod_{j=i}^1 H_j A_j S_j(l_j) B_j \right) F_1(0) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (22)$$

яка безпосередньо впливає із співвідношень (8), (11), (14), і обчислюємо форми прогинів, кутів повороту поперечних перерізів і згинальних моментів за формулами

$$F_i(x_i) = A_i S_i(x_i) B_i F_i(0) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (23)$$

які є наслідком співвідношень (8), (11).

Отже, для визначення спектра критичних сил спочатку за допомогою залежностей (17), (19) визначаємо коефіцієнти алгебраїчних рівнянь (20), після чого знаходимо корені трансцендентного рівняння (21). Форми геометричних і силових параметрів поперечних перерізів конструкції одержуємо із застосуванням співвідношень (21), (22). Зауважимо, що сила у горизонтальному перерізі  $V_i(x_i)$  кожної з ділянок споруди дорівнює нулю. Графіки форм поперечних сил  $Q_i(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) можна побудувати, застосовуючи співвідношення (4).

**Результати досліджень.** Розглянемо результати розрахунків на стійкість щогли будівельного підйимального пристрою ZREMB-Gniezno-1000, призначеного для підймання кабіни масою 1200 кг з вантажем до 1000 кг на висоту близько 150 м. Підймання вантажу здійснюється за допомогою електромеханічного приводу, розташованого у кабіні, та зубчастій передачі шестерня-рейка. Для зменшення енергії, що повинна витратитися на підймання вантажу, а також зусиль, що виникають в елементах привідної системи, підйимальний пристрій оснащений противагою масою 1000 кг, яка

з'єднана з кабіною за допомогою каната, перекинутого через блоки, встановлені на верху щогли. Отже, номінальне осьове навантаження висотної конструкції становить 3200 кг. Геометричні і жорсткісні характеристики щогли наведені у табл. 1

Таблиця 1

**Параметри багатопрогової висотної конструкції**

Параметр	Одиниця виміру	Числове значення
$l_1$	м	12,00
$l_2 \dots l_{n-1}$	м	9,00
$l_n$	м	3,00
$E_1 \dots E_n$	Н/м <sup>2</sup>	$2,10 \cdot 10^{11}$
$A_1 \dots A_n$	м <sup>2</sup>	$3,34 \cdot 10^{-3}$
$I_1 \dots I_n$	м <sup>4</sup>	$3,26 \cdot 10^{-4}$
$\rho_1 \dots \rho_n$	кг/м <sup>3</sup>	$1,25 \cdot 10^4$
$\mu_1 \dots \mu_n$	кг/м	41,68
$m_1 \dots m_{n-1}$	кг	10,00
$m_n$	кг	35,00
$c_1 \dots c_n$	Н/м	$3,50 \cdot 10^6$
$c_{\phi 1} \dots c_{\phi n}$	Н·м/рад	$2,50 \cdot 10^3$

Результати визначення характеристик стійкості щогли заввишки від 15 до 60 м наведені у табл. 2. На рис. 2 і 3 показано приклади форм геометричних і силових факторів поперечних перерізів споруди.

Як бачимо з табл. 2, із збільшенням висоти споруди істотно зростає її гнучкість і спадають розрахункові значення критичної сили і критичного напруження. Застосування бокових кріплень значно підвищує жорсткість конструкції, переводячи її з області великих в область середніх або малих гнучкостей. За відсутності таких кріплень для споруди значної висоти критичне напруження може виявитися меншим, ніж напруження, викликане номінальним навантаженням і силами власної ваги споруди. Під час розв'язання задачі обчислено значення коефіцієнтів зведеної довжини багатопрогової висотної конструкції з урахуванням кількості, розташування та значень коефіцієнтів жорсткості проміжних опор.

Форми прогинів (рис. 2, а) ілюструють зменшення поступального переміщення перерізу, розташованого навпроти опори. У цьому ж перерізі згинальний момент набуває максимального значення (рис. 2, в).

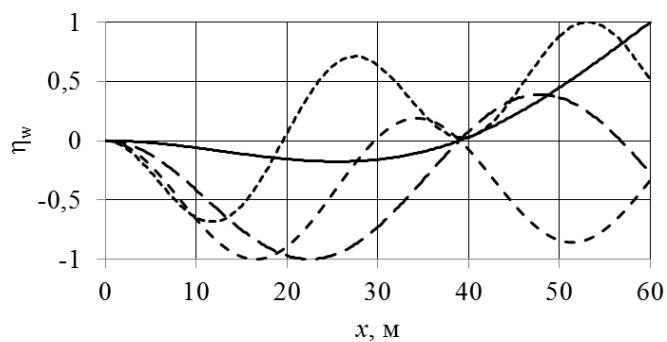
За наявності усіх бокових кріплень щогли, що передбачені її проектом, прогини і кути повороту поперечних перерізів нижньої і середньої частин щогли, згідно з основними формами деформування конструкції, є значно меншими від відповідних параметрів для верхньої частини щогли (рис. 3, а і б). Це свідчить про можливість збільшення критичного навантаження за рахунок додаткового закріплення верхньої частини споруди.

Таблиця 2

**Розрахункові значення характеристик стійкості висотної конструкції**

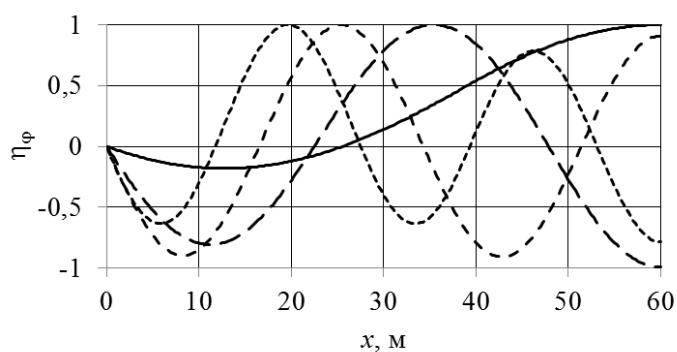
Висота щогли $l$ , м	Кількість ділянок $n$	Номери наявних опор	Гнучкість $\lambda$	Коефіцієнт зведеної висоти, $\mu$	Значення критичної сили, кН				Критичне напруження $\sigma_k$ , МПа
					1	2	3	4	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15,00	2	–	96,025	2,0000	747,85	6753,6	18765	36783	225,14
24,00	3	–	153,64	2,0000	289,58	2633,8	7326,6	14364	86,702
33,00	4	–	211,25	2,0000	150,42	1388,7	3870,4	7593,7	45,037
42,00	5	–	268,87	2,0000	89,991	852,81	2384,7	4683,0	26,943

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
51,00	6	–	326,48	2,0000	58,064	573,75	1612,5	3171,1	17,385
60,00	7	–	384,10	2,0000	38,906	409,80	1160,1	2286,1	11,649
60,00	7	5	200,23	1,0426	167,74	1141,9	2278,1	3550,3	57,112
60,00	7	5, 7	77,464	0,4033	1141,8	2023,8	3179,4	5490,0	348,74
60,00	7	3, 5, 7	63,823	0,3323	1694,6	3179,3	5443,5	7894,5	514,26
60,00	7	2, 3, ..., 7	42,770	0,2227	3782,4	4377,0	8835,3	9218,2	1139,4



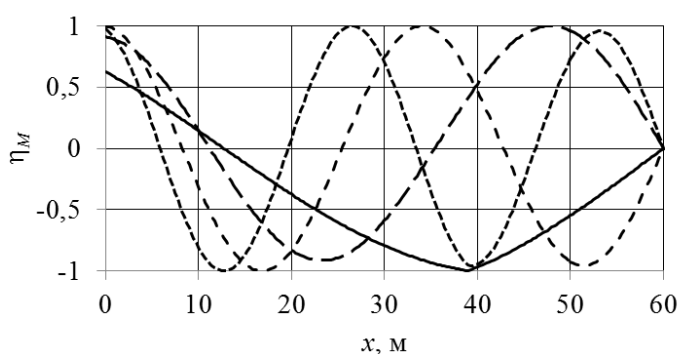
— - 1; - - - 2; - · - · - 3; ····· 4

а



— - 1; - - - 2; - · - · - 3; ····· 4

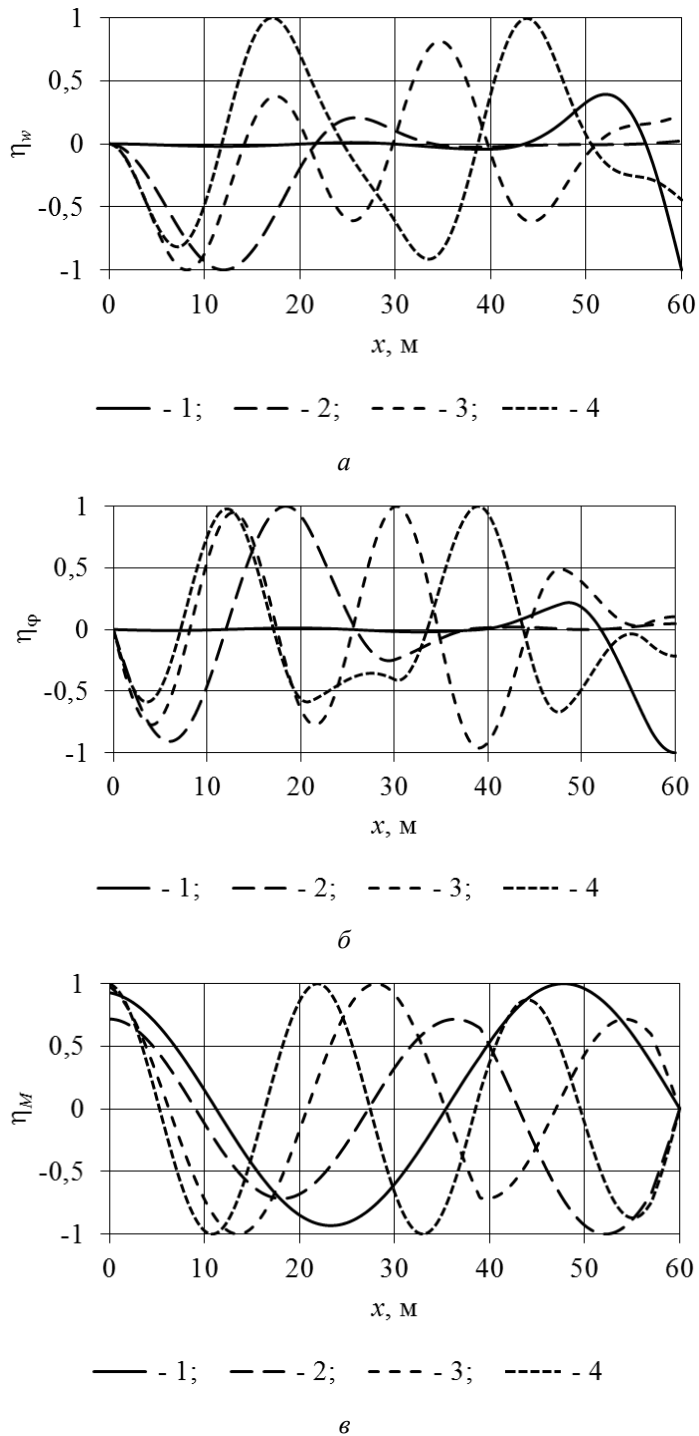
б



— - 1; - - - 2; - · - · - 3; ····· 4

в

Рис. 2. Форма прогинів (а), кутів повороту поперечних перерізів (б) і згинальних моментів (в), зацмєлєних в оснєві семипрогєновї висотнєї конструкцї заввишки 60 м з п'ятю пружною опорою (позначєння кривих вїдповїдають порядковим значєнням критичнєї сили)



*Рис. 3. Форма прогинів (а), кутів повороту поперечних перерізів (б) і згинальних моментів (в), защемлених в основі семипрогової висотної конструкції заввишки 60 м з третьою, п'ятою та сьомою пружними опорами (позначення кривих відповідають порядковим значенням критичної сили)*

**Висновки.** Розроблені у цій роботі математична модель і узагальнений алгоритм розрахунку багатопрогових довговимірних конструкцій на стійкість із застосуванням матричного методу початкових параметрів дають можливість підвищити ефективність проведення проектних розрахунків щогл будівельних підймальних пристроїв та інших висотних споруд. Як показали дослідження, щоглова конструкція підймального пристрою ZREMB-Gniezno-1000 має велику гнучкість. Ефективним способом підвищення стійкості споруди потрібно вважати її додаткове кріплення до стіни

будівлі. За допомогою запропонованих математичної моделі і алгоритму можна добирати раціональну кількість опорних вузлів багатопрогонової несучої конструкції залежно від її висоти.

1. Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шишов О. В. *Будівельна механіка. Комп'ютерні технології: підруч. / за заг. ред. д. т. н., проф. В. А. Баженова.* – К.: Каравела, 2009. – 696 с.
2. Баженов В. А., Дащенко А. Ф., Коломиец Л. В., Оробей В. Ф. *Строительная механика. Специальный курс: Применение метода граничных элементов.* – Одесса: Астропринт, 2001. – 286 с.
3. Вольмир А. С. *Устойчивость упругих систем.* – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 880 с.
4. Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. *Статика и динамика стержня при продольном нагружении // Вестник ЮУрГУ. Серия “Математическое моделирование и программирование”.* – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 76–89.
5. Пановко Я. Г., Губанова И. И. *Устойчивость и колебания упругих систем.* – М.: Наука, 1967. – 420 с.
6. Пономарев К. К. *Расчет элементов конструкций с применением электронных цифровых вычислительных машин.* – М.: Машиностроение, 1972. – 424 с.
7. *Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников / под ред. А. Ф. Смирнова.* – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
8. Тимошенко С. П. *Устойчивость стержней и оболочек.* – М.: Наука, 1971. – 808 с.
9. Филин А. П. *Прикладная механика твердого деформируемого тела: Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики.* – М.: Наука, 1981. – Т. III. – 480 с.
10. Drgania i statecznosc ukladow smuklych. *Praca zbiorowa pod kierunkiem naukowym i redakcja Lecha Tomskiego.* – Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2004. – 344 s.
11. J. Dario Aristizabal-Ochoa. *Static and dynamic stability of uniform shear beam-columns under generalized boundary conditions // Journal of Sound and Vibration.* – 307. – 2007. – P. 69–88.
12. Monsalve-Cano J. F., Dario J. Aristizabal-Ochoa. *Stability and free vibration analyses of an orthotropic singly symmetric Timoshenko beam-column with generalized end conditions // Journal of Sound and Vibration.* – 2009. – 328. – P. 467–487.
13. Lech Tomski, Janusz Szmidla, Maria Goleblowska-Rozanow. *Vibrations and stability of two-rod column loaded by a sector of a rolling bearing // Journal of Theoretical and Applied Mechanics.* – 2004. – 42. – P. 905–926.
14. Luis G. Arboleda-Monsalve, David G. Zapato-Medina, J. Dario Aristizabal-Ochoa. *Stability and natural frequencies of a weakend Timoshenko beam-column with generalized and conditions under constant axial load // Journal of Sound and Vibration.* – 2007. – 307. – P. 89–112.
15. S. H. Farchaly, M. G. Shebl. *Exact frequency and mode shape formulae for studying vibration and stability of Timoshenko beam system // Journal of Sound and Vibration.* – 1995. – 180. – P. 205–227.
16. Wojciech Sochacki. *The dynamic stability of a simply supported beam with additional discrete elements // Journal of Sound and Vibration.* – 2008. 314. – P. 180–193.
17. Wojciech Sochacki, Lech Tomski. *Free and parametric vibration of the system: telescopic boom-hydraulic cylinder (changing the crane radius) // The archive of Mechanical Engineering.* – 1999. – Vol. 16. – P. 257–271.