

# ДИНАМІКА ТА МІЦНІСТЬ МАШИН

УДК 621.923.7

О. В. Гаврильченко, В. М. Корендій, В. М. Захаров\*  
Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра механіки та автоматизації машинобудування  
\* ПАТ “Іскра”

## ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТРИ- І ЧОТИРИМАСОВИХ КОЛИВНИХ СИСТЕМ ВІБРОВИКІНЧУВАЛЬНИХ ВЕРСТАТІВ

© Гаврильченко О. В., Корендій В. М., Захаров В. М., 2017

Розглянуто конструктивні та функціональні особливості вібровикінчувальних верстатів. Побудовано розрахункові схеми коливних систем верстата у режимі правки “притир по притиру та в процесі притирання деталей. Сформовано відповідні математичні моделі руху три- і чотиримасової коливних систем верстата. Виведено аналітичні залежності амплітудних значень відхилень коливних мас.

Ключові слова: притир, вібровикінчувальний верстат, доводка, колювання, колювна система, амплітуда колювань.

O. Havrylchenko, V. Korendiy, V. Zakharov

## FORMATION MATHEMATICAL MODEL THREE- AND FOUR MASS OSCILLATORY SYSTEMS OF VIBRATING FINISHING MACHINES

Structural and operational peculiarities of vibrating finishing machines are considered. Calculation diagrams of the machine oscillating systems at the mode of correction “lap over lap” and during the parts lapping are developed. Corresponding mathematical models of motion of three- and four-mass oscillating systems of the machine are formed. Analytical dependencies of amplitude values of oscillating masses displacements are deduced.

Key words: lap, vibrating finishing machine, lap finishing (lapping), oscillation, vibrating system, amplitude of oscillations.

**Постановка проблеми.** Із застосуванням плоскопаралельної доводки на вібровикінчувальних верстатах з круговими колюваннями притирів досягають високої точності форми та якості оброблювальних поверхонь деталей, отримують шорсткість поверхні від 0,04 до 0,02 мкм з відхиленням площинності від 0,1 до 0,01 мкм. Ця задача передбачає дослідження коливних систем верстатів із застосуванням динамічного аналізу, розроблення та модернізації існуючих конструкцій викінчувальних верстатів з застосуванням енергоощадних і ефективних способів обробки деталей та правки робочих поверхонь притирів.

Головними зовнішніми факторами при викінчувальній обробці є швидкість руху деталей по притиру та величина тиску на поверхню деталей, що обробляються. Швидкість руху деталей по притиру та питомий тиск на поверхні деталей визначають енергетичні витрати викінчувального обладнання, пов'язані зі зношуванням матеріалів притирів та деталей, що обробляються.

Вплив швидкості руху та питомого тиску під час викінчувальної обробки зазвичай оцінюють за законом та довжиною траєкторії відносного руху усіх точок деталі по робочій поверхні притирів.

У літературних джерелах відсутні ґрунтовні дослідження впливу величини питомого тиску та швидкості руху притирів з деталями на основні показники викінчувальної притирки деталей з різних матеріалів. Вважають, що збільшення швидкості руху притирів призводить тільки до

значного збільшення продуктивності викінчувального процесу внаслідок більшого зношування матеріалу деталей, а із збільшенням питомого тиску знижуються параметра шорсткості робочих поверхонь внаслідок втрати властивостей зерен абразиву під час обробки та їх подрібнення.

Дослідження конструкцій високопродуктивних та енергоощадних вібровикінчувальних верстатів з використанням динамічного аналізу, який забезпечує глибинний аналіз процесів, що відбуваються у механічних коливних системах, дає можливість зрозуміти ці процеси та змодельовати їх з використанням диференціальних рівнянь.

Моделювання роботи механічних коливних систем забезпечує можливість визначення інерційних параметрів мас та параметрів жорсткості пружних систем, а також механічних характеристик коливних систем, що описують рухи окремих елементів верстата.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Висвітленню питань дослідження вібровикінчувальних верстатів присвячено цілу низку робіт, зокрема [1–4]. В них розглянуто питання підвищення точності та ефективності процесу притирання, забезпечення рівномірного зношування робочих поверхонь деталей і притирів та розроблення різноманітних сучасних конструкцій і технологічних процесів із застосуванням динамічного аналізу, що ґрунтується на диференціальних рівняннях руху коливних мас. У цих працях не повністю розкрито питання моделювання роботи вібровикінчувальних верстатів та визначення механічних параметрів коливних систем.

Крім особливої уваги до підтримання необхідної площинності та рівномірності зношування робочої поверхні притирів вікінчувальних верстатів останнім часом приділяють значну увагу глибшому дослідженню приводів вібровикінчувальних верстатів із застосуванням динамічного аналізу, що дає змогу визначити нові механічні параметри та значно підвищити ефективність вікінчувальних верстатів. У зв'язку з цим необхідно проаналізувати конструктивні особливості і принципи функціонування вібровикінчувальних верстатів з електромагнітним приводом та круговими траєкторіями коливальних притирів.

**Формулювання мети і завдань дослідження.** З метою подальшого аналізу динаміки перехідних процесів у роботі вібровикінчувального верстата, побудови амплітудно-частотних характеристик та обґрунтування інерційно-жорсткісних параметрів коливної системи і силових параметрів приводу у цій статті наведено розрахункові схеми коливних систем вібровикінчувального верстата і сформовано диференціальні рівняння руху коливних мас.

**Конструктивні особливості та принципи функціонування вібровикінчувальних верстатів.** Викінчувальну обробку деталей виконують на верстатах, які складаються з одного або двох притирів (у разі односторонньої або двосторонньої обробки деталей, відповідно). Механізми приводів притирів вікінчувальних верстатів виконують за різноманітними кінематичними схемами.

Траєкторію (закон руху) притирів та водила з деталями задають конструкцією приводів вікінчувальних верстатів та залежно від співвідношення кутових швидкостей притирів та деталей подають у вигляді різних циклоїд. Ці складні траєкторії рухів притирів та деталей забезпечують різні швидкості точок контакту деталей з притирами – від центра притира до його периферії, що приводить до нерівномірного зношення робочої поверхні притирів та деталей. Такий вікінчувальний процес притирки погіршує якість вікінчувальної обробки та передбачає проведення заходів з відновлення точності робочих поверхонь притирів, тобто їх правки.

Особливістю вібровикінчувальних верстатів з круговими траєкторіями коливальних притирів є те, що швидкості переміщення всіх точок робочої поверхні є однакові, тому зношування як робочої поверхні притирів, так і деталей, які обробляються, може залежати тільки від часу їх контакту.

Це спонукало провести аналітичні дослідження вікінчувального устаткування для подальшого удосконалення технологічних процесів вікінчувальної притирки. Поставлене завдання автори вирішують у вібровикінчувальному верстаті, розрахунок якого виконаний з використанням теорії синфазних коливальних [5]. При цьому конструкція вібровикінчувального верстата може бути представлена у вигляді тримасової механічної коливної системи (рис. 1, а) у випадку правки “притир по притиру” або чотиримасової механічної коливної системи (рис. 1, б) у випадку притирання деталей, розміщених у водилі.

Тримасовий вібраційний вікінчувальний верстат з електромагнітним приводом містить активну масу  $m_a$ , яка складається з верхнього притира 1, одного пружного стрижня 4, кінці якого

зафіксовані у верхньому 5 та нижньому 6 фланцях, з'єднаних нерухомо між собою порожнистим циліндром 7. Середину пружного стрижня защемлено по центру у проміжній масі  $m_n$ , функцію якої виконує нижній притир 2.

Електромагнітний привід тримасового викінчувального верстату складається з шести пар електромагнітних віброзбудників зі збудувальним зусиллям  $p(t)$ , осердь з котушками, закріпленими симетрично по колу між нижнім притиром 2 та кільцеподібною реактивною масою 3 ( $m_p$ ), яку за допомогою гумових пружних кілець 8 концентрично підвішено до нижнього притира 2. Конструкція викінчувального верстату через віброізолятори 9, прикріплені знизу до нижнього притира 2, опирається на основу 10.

Чотиримасовий вібраційний викінчувальний верстат з електромагнітним приводом (рис. 1, б) відрізняється від тримасового тим, що між верхнім 1 та нижнім 2 притирами розміщено водило 8 з оброблюваними деталями, що утворюють четверту масу.

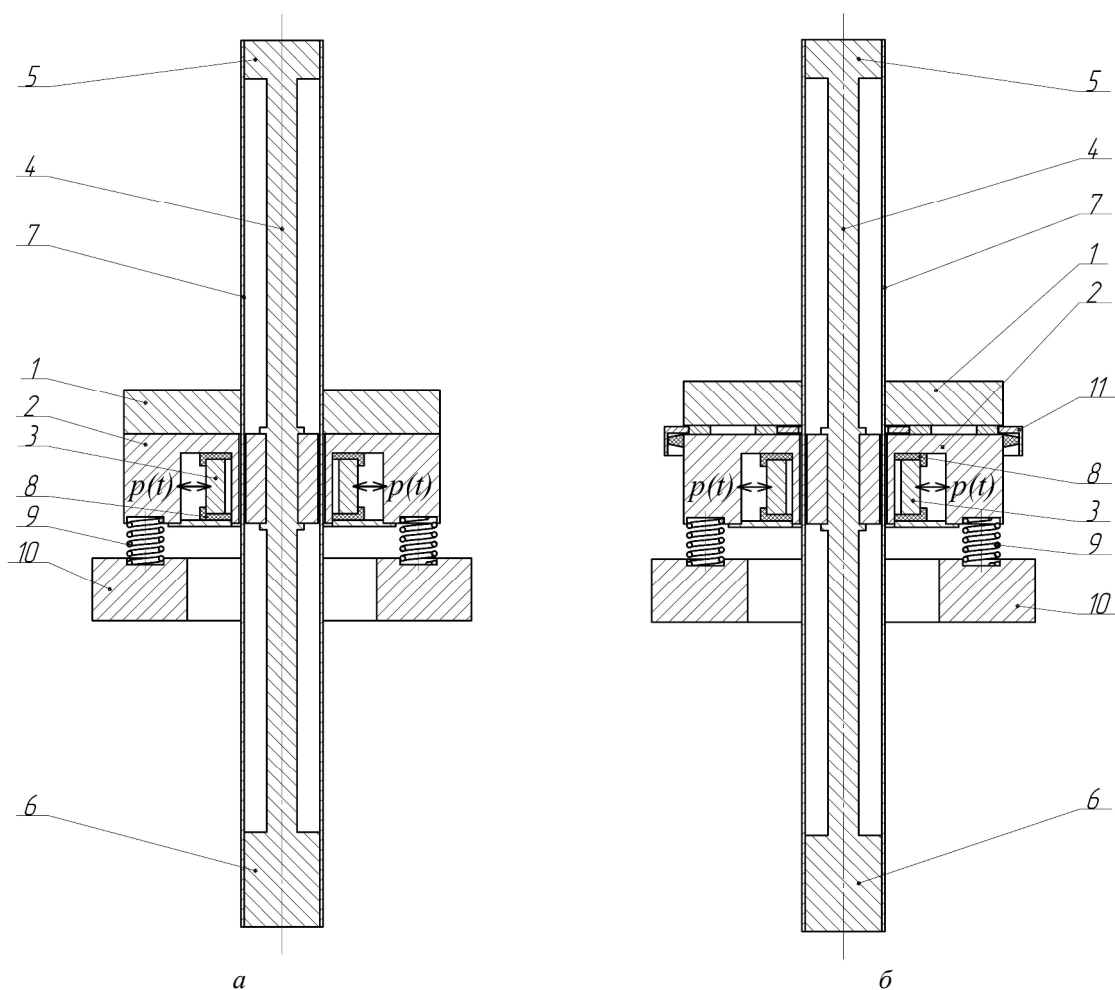


Рис. 1. Принципові схеми вібровикінчувальних верстатів з тримасовою (а) та чотиримасовою (б) механічними коливними системами

**Побудова розрахункових схем коливних систем вібровикінчувальних верстатів.** Як досліджувану механічну коливну систему розглянемо тримасову [5–7] (рис. 2, а) та чотиримасову (рис. 2, б) конструкції вібровикінчувального верстата, в яких реалізовано прямолінійні коливання. У тримасовій системі (рис. 2, а) активна 1, проміжна 2 та нижня реактивна 3 маси з інерційними параметрами (у даному випадку – масами), відповідно,  $m_a$ ,  $m_n$  та  $m_p$  здійснюють прямолінійні коливання вздовж горизонтальної осі  $x$  за узагальненими координатами, відповідно,  $x_1$ ,  $x_2$  та  $x_3$ . У чотиримасовій системі (рис. 2, б) додатково враховано масу  $m_8$  водила 8 з деталями, що

обробляються, яка здійснює прямолінійні коливання вздовж горизонтальної осі  $x$  за узагальненою координатою  $x_4$ .

Активна маса 1 приводиться в рух завдяки кінематичному збуренню від проміжної 2 маси. Збурення вимушених коливань відбувається завдяки синусоїдальному зусиллю  $P(t) = P \cdot \sin(\omega t + e)$  (тут  $P$  – амплітудне значення збурювального зусилля;  $t$  – час;  $e$  – зсув фаз між силою і переміщенням;  $\omega$  – колова частота збурювального зусилля), що прикладається між проміжною 2 та реактивною 3 масами. Активна 1 та проміжна 2, проміжна 2 та реактивна 3 маси попарно з'єднані між собою пружними системами відповідно 5 та 4 із жорсткостями  $c_1$  та  $c_2$  у напрямку їх руху, які на рисунку схематично зображено у вигляді витих пружин. Конструкції вібровикінчувальних верстатів опираються через проміжну масу на віброізолятори 6 жорсткістю  $c_{i3}$ . Приймаємо, що в системі діють дисипативні сили, для чого в динамічну модель у вигляді демпферів вводяться коефіцієнти в'язкого опору  $m_1, m_2, m_3$ , які є пропорційні швидкості руху відповідних мас і відображають явище гістерезису в пружних системах 4, 5, 6, відповідно, та коефіцієнти  $m_a, m_n$  і  $m_p$ , що описують в'язкий опір руху коливних мас, відповідно, 1, 2 та 3 і спричинені в'язким тертям між їх поверхнями у відносному русі.

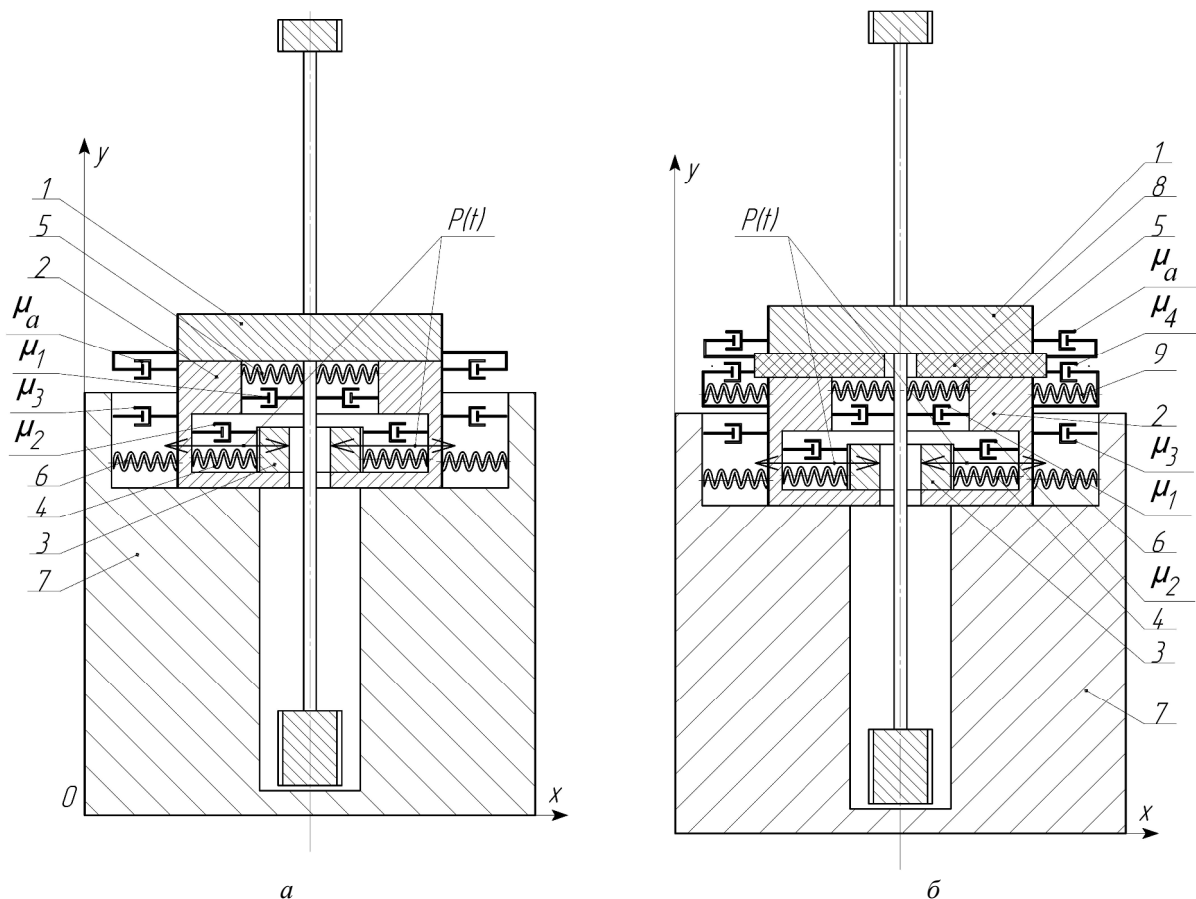


Рис. 2. Розрахункові схеми вібровикінчувальних верстатів з тримасовою (а) та чотиримасовою (б) коливними системами

Оскільки маси 2 ( $m_n$ ) та 3 ( $m_p$ ) між собою не взаємодіють, то згідно з [8] можна знехтувати коефіцієнтами дисипації  $m_n, m_p$ , тоді як коефіцієнт  $m_a$ , що описує в'язкий опір руху активної 1 та проміжної 2 коливних мас, між якими знаходиться робоча зона для завантаження оброблюваних на вібровикінчувальному верстаті деталей, необхідно залишити. У такому випадку вся енергія від віброзбудників перетворюється на теплову енергію притирання деталей.

Додатково для чотиримасової системи (рис. 2, б) беремо до уваги коефіцієнт в'язкого опору  $m_4$ , який є пропорційним до швидкості руху водила 8 відносно нижнього притира 2 і відображає явище гістерезису в пружному елементі 9. Коефіцієнт  $m_4$  у цьому випадку описує в'язкий опір руху маси 1 по масі 8, спричинений в'язкістю середовища завантаження.

**Формування математичної моделі тримасової коливної системи вібровикінчуального верстата.** Математичну модель вібровикінчуального верстата, розрахункову схему якого зображено на рис. 2, а, буде побудовано на основі тримасової коливної системи, у якій реалізовані прямолінійні коливання мас у горизонтальній площині. Активна 1 ( $m_a$ ), проміжна 2 ( $m_n$ ) та реактивна 3 ( $m_p$ ) маси здійснюють прямолінійні коливання вздовж горизонтальної осі  $x$  за узагальненими координатами  $x_1$ ,  $x_2$  та  $x_3$  у результаті дії збурювального зусилля  $p(t)$ .

Для отримання рівнянь малих коливань динамічної моделі вібровикінчуального верстата за трьома ступенями вільності використаємо систему узагальнених рівнянь руху – трьох диференціальних рівнянь Лагранжа II роду у вигляді [8–10]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + Q_{x_i}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (1)$$

де  $T$ ,  $\Pi$ ,  $\Phi$  та  $Q_{x_i} = Q_{x_i}(t)$  – відповідно кінетична і потенціальна енергії механічної коливної системи, функція дисипації (розсіювання енергії) та узагальнені збурювальні зусилля, що відповідають незалежним узагальненим координатам  $x_i$ .

Кінетична енергія тримасової механічної коливної системи складається з суми кінетичних енергій активної  $T_1$ , проміжної  $T_2$  та реактивної  $T_3$  мас. Оскільки ці маси здійснюють прямолінійний рух, то їхні кінетичні енергії, відповідно, становлять:

$$T_1 = \frac{m_a \cdot \dot{x}_1^2}{2}; \quad T_2 = \frac{m_n \cdot \dot{x}_2^2}{2}; \quad T_3 = \frac{m_p \cdot \dot{x}_3^2}{2}, \quad (2)$$

а сумарна кінетична енергія механічної коливної системи дорівнює:

$$T = \frac{m_a \cdot \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_n \cdot \dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_p \cdot \dot{x}_3^2}{2}. \quad (3)$$

Потенціальну енергію  $\Pi$  для механічної коливної системи знайдемо як суму робіт відновлювальних сил у пружних елементах:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_{i3} \cdot x_2^2. \quad (4)$$

Дисипативну функцію  $\Phi$  для механічної коливної системи вираховуємо за виразом:

$$\Phi = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2. \quad (5)$$

Узагальнені збурювальні зусилля визначаємо за виразами  $Q_{x_2} = \frac{dA_{Px_2}}{dx_2}$  та  $Q_{x_3} = \frac{dA_{Px_3}}{dx_3}$ , де  $dA_{Px_2}$ ,  $dA_{Px_3}$  – елементарні роботи збурювального зусилля  $P$  на переміщеннях механічної системи, спричинені приростом узагальнених координат, відповідно,  $x_2$  та  $x_3$ . Отже:

$$dA_{Px_2} = Pd \cdot x_2 \cdot \sin (wt + e); \quad Q_{x_2} = P \cdot \sin (wt + e); \quad (6)$$

$$dA_{Px_3} = -Pd x_3 \sin (wt + e); \quad Q_{x_3} = -P \sin (wt + e).$$

Використовуючи (3)–(6), знаходимо складові системи рівнянь Лагранжа II роду (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_a \cdot \dot{x}_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_a \cdot \ddot{x}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0;$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} &= c_1 \cdot (x_1 - x_2); & \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{X}_1} &= (m_a + m_1) \cdot (\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2); \\
\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{X}_2} &= m_n \cdot \mathfrak{X}_2; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{X}_2} \right) &= m_n \cdot \dot{\mathfrak{X}}_2; & \frac{\partial T}{\partial x_2} &= 0; \\
\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} &= c_1 \cdot (x_2 - x_1) + c_2 \cdot (x_2 - x_3) + c_{i3} \cdot x_2; \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{X}_2} &= (m_a + m_1) \cdot (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1) + m_2 \cdot (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_3) + m_3 \cdot \mathfrak{X}_2; \\
\frac{\partial T}{\partial \mathfrak{X}_3} &= m_p \cdot \mathfrak{X}_3; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{X}_3} \right) &= m_p \cdot \dot{\mathfrak{X}}_3; & \frac{\partial T}{\partial x_3} &= 0; \\
\frac{\partial \Pi}{\partial x_3} &= c_2 \cdot (x_3 - x_2); & \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{X}_3} &= m_2 \cdot (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_2).
\end{aligned} \tag{7}$$

Підставляємо вирази (6) і (7) до системи рівнянь Лагранжа II роду (1). Система диференціальних рівнянь руху за лінійними координатами для тримасової механічної коливної системи набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned}
& m_a \cdot \ddot{\mathfrak{X}}_1 + c_1 \cdot (x_1 - x_2) + (m_a + m_1) \cdot (\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2) = 0; \\
& m_n \cdot \ddot{\mathfrak{X}}_2 + c_1 \cdot (x_2 - x_1) + c_2 \cdot (x_2 - x_3) + c_{i3} \cdot x_2 + (m_a + m_1) \cdot (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_1) + m_2 \cdot (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_3) + \\
& \quad + m_3 \cdot \mathfrak{X}_2 = P \cdot \sin(\omega t + e); \\
& m_p \cdot \ddot{\mathfrak{X}}_3 + c_2 \cdot (x_3 - x_2) + m_2 \cdot (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}_2) = -P \cdot \sin(\omega t + e).
\end{aligned} \right. \tag{8}$$

**Формування математичної моделі чотиримасової коливної системи вібровикінчуального верстата.** Математичну модель вібровикінчуального верстата (рис. 2, б) побудовано на основі чотиримасової коливної системи, у якій реалізовані прямолінійні коливання мас у горизонтальній площині. Вона відрізняється від тримасової коливної системи, яку зображено на рис. 2, а, тим, що між верхнім 1 та нижнім 2 притирами розміщено водило 8 з оброблюваними деталями, які утворюють четверту масу.

Аналогічно для отримання рівнянь малих коливань динамічної моделі вібровикінчуального верстата з чотирма ступенями вільності використаємо систему узагальнених рівнянь руху – чотирьох диференціальних рівнянь Лагранжа II роду у вигляді [8–10]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathfrak{X}}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{X}_i} + Q_{x_i}, \quad i = \overline{1,4}. \tag{9}$$

Кінетична енергія чотиримасового вікінчуального верстата складається з суми кінетичних енергій активної  $T_1$ , проміжної  $T_2$  та реактивної  $T_3$  мас, які обчислюють за виразом (2.2), до якого додається кінетична енергія водила з оброблюваними деталями  $T_e$ , яка становить:

$$T_e = \frac{m_e \cdot \dot{\mathfrak{X}}_4^2}{2}. \tag{10}$$

Отже, сумарна кінетична енергія механічної коливної системи дорівнює:

$$T = \frac{m_a \cdot \dot{\mathfrak{X}}_1^2}{2} + \frac{m_n \cdot \dot{\mathfrak{X}}_2^2}{2} + \frac{m_p \cdot \dot{\mathfrak{X}}_3^2}{2} + \frac{m_e \cdot \dot{\mathfrak{X}}_4^2}{2}. \tag{11}$$

Потенціальну енергію  $\Pi$  для механічної коливної системи знайдемо як суму робіт відновлювальних сил жорсткості у пружних елементах:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_{i3} \cdot x_2^2 + \frac{1}{2} \cdot c_3 \cdot (x_4 - x_2)^2. \tag{12}$$

Дисипативну функцію  $\Phi$  для механічної коливної системи вираховуємо за виразом:

$$\Phi = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_a \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_4)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot (\dot{x}_4 - \dot{x}_2)^2. \quad (13)$$

Узагальнені сили розраховуємо аналогічно як і для тримасової коливної системи за формулами (6).

Використовуючи (11)–(13), знаходимо складові системи рівнянь Лагранжа II роду (9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} &= c_1 \cdot (x_1 - x_2); & \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_1} &= m_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + m_a \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_4); \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} &= c_1 \cdot (x_2 - x_1) + c_2 \cdot (x_2 - x_3) + c_{i3} \cdot x_2 + c_3 \cdot (x_2 - x_4); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_2} &= m_1 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + m_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + m_3 \cdot \dot{x}_2 + m_4 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_4); \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} &= c_2 \cdot (x_3 - x_2); & \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_3} &= m_2 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_2); \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4} &= m_6 \cdot \dot{x}_4; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4} \right) &= m_6 \cdot \ddot{x}_4; & \frac{\partial T}{\partial x_4} &= 0; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_4} &= c_3 \cdot (x_4 - x_2); & \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_4} &= m_4 \cdot (\dot{x}_4 - \dot{x}_2) + m_a \cdot (\dot{x}_4 - \dot{x}_1). \end{aligned} \quad (14)$$

Підставляємо вирази (6) і (14) до системи рівнянь Лагранжа II роду (1). Система диференціальних рівнянь руху за лінійними координатами для чотиримасової механічної коливної системи набуде вигляду:

$$\begin{cases} m_a \cdot \ddot{x}_1 + c_1 \cdot (x_1 - x_2) + m_a \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_4) + m_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0; \\ m_n \cdot \ddot{x}_2 + c_1 \cdot (x_2 - x_1) + c_2 \cdot (x_2 - x_3) + c_{i3} \cdot x_2 + c_3 \cdot (x_2 - x_4) + \\ + m_1 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + m_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + m_3 \cdot \dot{x}_2 + m_4 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_4) = P \cdot \sin(\omega t + e); \\ m_p \cdot \ddot{x}_3 + c_2 \cdot (x_3 - x_2) + m_2 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) = -P \cdot \sin(\omega t + e); \\ m_6 \cdot \ddot{x}_4 + c_3 \cdot (x_4 - x_2) + m_4 \cdot (\dot{x}_4 - \dot{x}_2) + m_a \cdot (\dot{x}_4 - \dot{x}_1) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

**Визначення амплітудних значень відхилень коливних мас.** Користуючись загальними методами розв'язання отриманої системи диференціальних рівнянь (8), аналітичні вирази руху мас за трьома незалежними ступенями вільності шукаємо у вигляді  $x_1 = X_1 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$ ,  $x_2 = X_2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$  та  $x_3 = X_3 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$ ,  $x_4 = X_4 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$ , де  $X_1, X_2, X_3, X_4$  – амплітудні значення лінійних вимушених коливань відповідно за узагальненими координатами  $x_1, x_2, x_3$  та  $x_4$ . Підставляючи ці вирази до (8) або (15) і скоротивши в кожній частині системи рівнянь член  $e^{i \omega t}$ , де  $i = \sqrt{-1}$ , після деяких перетворень можна отримати залежності для визначення значень  $X_1, X_2, X_3, X_4$ . У матричному записі це рішення матиме вигляд:

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}, \quad (16)$$

де  $\mathbf{x}$  – матриця-стовпець невідомих (матриця переміщень);  $\mathbf{C}^{-1}$  – матриця коефіцієнтів при невідомих (матриця жорсткості);  $\mathbf{P}$  – матриця-стовпець збудувальних зусиль електромагнітних вібробудників.

Розписуючи рівняння (16) для випадку тримасової схеми, маємо:

$$\begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} c_1 - m_a \cdot w^2 + \\ +i \cdot (m_a + m_1) \cdot w \end{array} \right) & -c_1 - i \cdot (m_a + m_1) \cdot w & 0 \\ -c_1 - i \cdot (m_a + m_1) \cdot w & \left( \begin{array}{c} c_1 + c_2 + c_{i3} - m_n \cdot w^2 + \\ +i \cdot (m_1 + m_2 + m_3 + m_a) \cdot w \end{array} \right) & -c_2 - i \cdot m_2 \cdot w \\ 0 & -c_2 - i \cdot m_2 \cdot w & \left( \begin{array}{c} c_2 - m_p \cdot w^2 + \\ +i \cdot m_2 \cdot w \end{array} \right) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ -P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Позначаємо:

$$\begin{aligned} k_{11} &= c_1 - m_a \cdot w^2 + i \cdot (m_a + m_1) \cdot w; \quad k_{31} = 0; \quad k_{13} = 0; \\ k_{22} &= c_1 + c_2 + c_{i3} - m_n \cdot w^2 + i \cdot (m_1 + m_2 + m_3 + m_a) \cdot w; \quad k_{12} = k_{21} = -c_1 - i \cdot (m_a + m_1) \cdot w; \\ k_{23} &= k_{32} = -c_2 - i \cdot m_2 \cdot w; \quad k_{33} = c_2 - m_p \cdot w^2 + i \cdot m_2 \cdot w. \end{aligned}$$

Розв'язок системи (17) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{P \cdot k_{12} \cdot (k_{23} + k_{33})}{k_{12} \cdot k_{21} \cdot k_{33} - k_{11} \cdot k_{22} \cdot k_{33} + k_{11} \cdot k_{23} \cdot k_{32}}; \\ X_2 &= \frac{-P \cdot k_{11} \cdot (k_{23} + k_{33})}{k_{12} \cdot k_{21} \cdot k_{33} - k_{11} \cdot k_{22} \cdot k_{33} + k_{11} \cdot k_{23} \cdot k_{32}}; \\ X_3 &= \frac{P \cdot (k_{11}k_{32} - k_{12}k_{21} + k_{22}k_{11})}{k_{12} \cdot k_{21} \cdot k_{33} - k_{11} \cdot k_{22} \cdot k_{33} + k_{11} \cdot k_{23} \cdot k_{32}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Розписуючи рівняння (16) для випадку чотиримасової схеми, маємо:

$$\begin{bmatrix} c_1 - m_a w^2 + \\ +i(m_a + m_1) w & -c_1 - i \cdot m_1 \cdot w & 0 & -i \cdot m_a \cdot w \\ -c_1 - i m_1 w & c_1 + c_2 + c_{i3} - m_n w^2 + \\ +i \cdot \left( \begin{array}{c} m_1 + m_2 + \\ +m_3 + m_4 \end{array} \right) \cdot w & -c_2 - i \cdot m_2 \cdot w & -c_3 - i \cdot m_4 \cdot w \\ 0 & -c_2 - i \cdot m_2 \cdot w & c_2 - m_p \cdot w^2 + \\ +i \cdot m_2 \cdot w & 0 & \\ -i m_a w & -c_3 - i \cdot m_4 \cdot w & 0 & c_3 - m_6 \cdot w^2 + \\ +i \cdot (m_a + m_4) \cdot w \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ -P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Позначаємо:

$$\begin{aligned} k_{11} &= c_1 - m_a \cdot w^2 + i \cdot (m_a + m_1) \cdot w; \quad k_{12} = k_{21} = -c_1 - i \cdot m_1 \cdot w; \quad k_{14} = k_{41} = -i \cdot m_a \cdot w; \\ k_{22} &= c_1 + c_2 + c_{i3} - m_n \cdot w^2 + i \cdot (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \cdot w; \quad k_{23} = k_{32} = -c_2 - i \cdot m_2 \cdot w; \\ k_{33} &= c_2 - m_p \cdot w^2 + i \cdot m_2 \cdot w; \quad k_{24} = k_{42} = -c_3 - i m_4 w; \quad k_{44} = c_3 - m_6 \cdot w^2 + i \cdot (m_a + m_4) \cdot w; \\ k_{34} &= k_{43} = k_{31} = k_{13} = 0. \end{aligned}$$



Розв'язок системи (19) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -\frac{P \cdot (k_{12} \cdot k_{44} - k_{14} \cdot k_{42}) \cdot (k_{23} + k_{33})}{\left( k_{11} \cdot k_{22} \cdot k_{33} \cdot k_{44} - k_{11} \cdot k_{23} \cdot k_{32} \cdot k_{44} - k_{11} \cdot k_{24} \cdot k_{33} \cdot k_{42} - k_{12} \cdot k_{21} \cdot k_{33} \cdot k_{44} + \right. \\
 &\quad \left. + k_{12} \cdot k_{41} \cdot k_{33} \cdot k_{24} + k_{21} \cdot k_{14} \cdot k_{33} \cdot k_{42} - k_{22} \cdot k_{14} \cdot k_{33} \cdot k_{41} + k_{14} \cdot k_{23} \cdot k_{32} \cdot k_{41} \right)}; \\
 X_2 &= \frac{P \cdot (k_{11} \cdot k_{44} - k_{14} \cdot k_{41}) \cdot (k_{23} + k_{33})}{\left( k_{11} \cdot k_{22} \cdot k_{33} \cdot k_{44} - k_{11} \cdot k_{23} \cdot k_{32} \cdot k_{44} - k_{11} \cdot k_{24} \cdot k_{33} \cdot k_{42} - k_{12} \cdot k_{21} \cdot k_{33} \cdot k_{44} + \right. \\
 &\quad \left. + k_{12} \cdot k_{41} \cdot k_{33} \cdot k_{24} + k_{21} \cdot k_{14} \cdot k_{33} \cdot k_{42} - k_{22} \cdot k_{14} \cdot k_{33} \cdot k_{41} + k_{14} \cdot k_{23} \cdot k_{32} \cdot k_{41} \right)}; \\
 X_3 &= -\frac{\left[ P \cdot \left( k_{11} \cdot k_{22} \cdot k_{44} - k_{11} \cdot k_{24} \cdot k_{42} - k_{12} \cdot k_{21} \cdot k_{44} + k_{12} \cdot k_{41} \cdot k_{24} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + k_{21} \cdot k_{14} \cdot k_{42} - k_{22} \cdot k_{14} \cdot k_{41} + k_{11} \cdot k_{32} \cdot k_{44} - k_{14} \cdot k_{32} \cdot k_{41} \right) \right]}{\left( k_{11} \cdot k_{22} \cdot k_{33} \cdot k_{44} - k_{11} \cdot k_{23} \cdot k_{32} \cdot k_{44} - k_{11} \cdot k_{24} \cdot k_{33} \cdot k_{42} - k_{12} \cdot k_{21} \cdot k_{33} \cdot k_{44} + \right. \\
 &\quad \left. + k_{12} \cdot k_{41} \cdot k_{33} \cdot k_{24} + k_{21} \cdot k_{14} \cdot k_{33} \cdot k_{42} - k_{22} \cdot k_{14} \cdot k_{33} \cdot k_{41} + k_{14} \cdot k_{23} \cdot k_{32} \cdot k_{41} \right)}; \\
 X_4 &= -\frac{P \cdot (k_{11} \cdot k_{42} - k_{12} \cdot k_{41}) \cdot (k_{23} + k_{33})}{\left( k_{11} \cdot k_{22} \cdot k_{33} \cdot k_{44} - k_{11} \cdot k_{23} \cdot k_{32} \cdot k_{44} - k_{11} \cdot k_{24} \cdot k_{33} \cdot k_{42} - k_{12} \cdot k_{21} \cdot k_{33} \cdot k_{44} + \right. \\
 &\quad \left. + k_{12} \cdot k_{41} \cdot k_{33} \cdot k_{24} + k_{21} \cdot k_{14} \cdot k_{33} \cdot k_{42} - k_{22} \cdot k_{14} \cdot k_{33} \cdot k_{41} + k_{14} \cdot k_{23} \cdot k_{32} \cdot k_{41} \right)}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

## Висновки

1. Порівняно з традиційними механічними коливними системами в запропонованих системах побудовано плоскі принципіві та розрахункові схеми вібровикінчувального верстата, які графічно описують картину руху коливних мас, що перебувають у силовому збуренні. Отримані схеми дають змогу суттєво спростити наявні конструкції коливних систем вібровикінчувальних верстатів та реалізувати їхні просторові моделі.

2. Сформовані математичні моделі три- та чотиримасової коливних систем дають змогу на етапі проектування визначити амплітудні значення відхилень коливних мас вібровикінчувального верстата відповідно до заданих режимів притирання.

3. Також на основі отриманих математичних моделей у подальших дослідженнях динаміки нестационарних процесів у роботі вібровикінчувальних верстатів буде перевірено умови стійкості положення рівноваги і руху коливних мас, побудовано амплітудно-частотні характеристики відповідних систем та обґрунтовано їхні інерційно-жорсткісні параметри.

1. Третько В. В. Оптимизация технических процессов виброционной доводки // *Вібрації в техніці та технології*. – № 2. – 2005. – С. 100–103. 2. Повидайло В. А., Сорочак О. 3. Пути повышения точности плоскопараллельной обработки деталей на вибродоводочных станках // *Вібрації в техніці та технології*. – № 1(3). – 1986. – С. 17–20. 3. А. с. 1759609 СССР. Способ доводки деталей / В. А. Повидайло, В. Н. Захаров, В. Ф. Завадская. – И. – № 33. – 1992. 4. Технологическое обеспечение качества деталей методом доводки / П. Н. Орлов, А. А. Савелова, В. А. Полухин, Ю. И. Нестеров; под. ред. Г. М. Ипполитова. – М.: Машиностроение, 1978. – С. 131–134. 5. Теорія синфазних коливань у вібраційних машинах з електромагнітним приводом. / О. С. Ланець // *Вібрації в техніці та технології*. – 2005. – № 2 (40). – С. 46–59. 6. Гаврильченко О. В., Ланець О. С., Шпак Я. В. Теорія вібраційних машин з електромагнітним приводом та синфазним рухом коливальних мас з врахуванням жорсткості віброізоляторів // *Машинознавство*. – 2005. – № 9. – С. 19–26. 7. Ланець О. С. Динаміка тримасової вібраційної площадки з електромагнітним приводом для ущільнення бетону // *Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні: Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”*. – 2003. – № 480. – С. 101–108. 8. Бидерман В. Л. Теорія механічних коливань. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с. 9. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкість руху: підручник. – К.: Вища шк., 2004. – 525 с. 10. Чабан А. Математичне моделювання коливних процесів в електромеханічних системах. – Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2007. – 312 с.