

## ДИНАМІКА КОЛОНИ ОБСАДНИХ ТРУБ З ВРАХУВАННЯМ ЖОРСТКОСТІ МУФТ

© Дівеєв Б. М., 2017

Розглянуто методи розрахунку напружено-деформованого стану в трубопроводах, що містять конічні різьові муфти. Наведено дискретно-континуальні моделі динаміки таких конструкцій як подовгасті труби з компактними з'єднаннями. Отримано адаптивні алгоритми моделювання трубопроводів, що ґрунтуються на МСК та уточненій теорії оболонки, а також розподіли напружень в околі їх найбільшої концентрації в муфтах.

**Ключові слова:** обсадні труби, напружено-деформований стан, конічні муфти, теорія оболонки, динаміка конструкцій.

B. Diveiev

## DYNAMICS OF COLUMNS OF PIPES WITH GIVEN THE STIFFNESS OF THE COUPLERS

The paper deals with the methods of stress-strain calculation of pipelines containing cone-shaped thread coupler. The discrete-continue model of constructions dynamics such as elongated pipes connected with compact joints is offered. The adaptive algorithms for pipeline modeling based on FEM and refined shell theory are received. Stress distributions in the region of maximum concentration, in coupler are presented.

**Key words:** pipelines, stress-strain, cone-shaped coupler, shell theory, constructions dynamics.

**Вступ.** Багатоланкові трубчасті з'єднання поширені в машинобудуванні, енергетиці, гірничій справі. Окрім зварних з'єднань труб (наземне транспортування нафти, газу) широко використовуються і муфтові з'єднання труб. Зокрема у нафто- і газовидобуванні використовують колони насосно-компресорних труб, з'єднаних за допомогою різьових конусних муфт. Основними критеріями працездатності колони насосно-компресорних труб є її монолітність (щільність різьових з'єднань) і міцність труб та з'єднувальних муфт. Небезпечним є явище розкручування з'єднання за впливу циклічних навантажень. Тому аналіз напружено-деформованого стану і щільності різі з'єднання є необхідною умовою забезпечення надійності роботи колони.

Розглянуто розрахункові схеми (РС) для складних вібронавантажених конструкцій. Розвинуто методи декомпозиції та синтезу РС на основі нових методів модального синтезу. Розроблено комплексну РС дискретно-континуального типу, яка уможливає в адаптивному режимі вираховування напружень не тільки в континуальних елементах, але й у місцях найбільшої їх концентрації – у з'єднаннях. Традиційні методи конструювання, основані на дискретних моделях, неефективні в області високочастотних коливань. Це дослідження розвиває сучасну прогностичну та контролювальну методологію, що основана на адаптивному моделюванні колони труб.

**Аналіз останніх досліджень.** Є багато розрахункових методів декомпозиції та синтезу конструкцій машин [1,2]. Можна умовно виділити такі три великі групи цих методів: метод передавальних матриць [2,3], метод модального синтезу [4], статистичний енергетичний аналіз [5]. Зазначимо також аналітичні методи дослідження дискретно-континуальних механічних систем [6]. Проте останні ще недостатньо апробовані в інженерній практиці. Раніше для розрахунку різьових з'єднань застосовували формули Н. Е. Жуковського, І. А. Біргера та інших авторів [7–9]. Вони ґрунтувалися на теорії оболонки з окремим виділенням крайових ефектів. Це доволі копітке дослідження не можна вважати достатньо точним, оскільки, як показують наведені нижче результати, зона загасання крайових ефектів доволі значна, а в переважній більшості випадків

складний характер розподілу НДС поширюється на всю різь і за її межі. Отже, існуючі рішення не дають можливості визначити закономірність зміни напруги в деталях різьбового з'єднання при різних способах навантаження. Нижче наведено рішення, яке ґрунтується базується на трьохвимірній теорії пружності та вараційно-аналітичному методі довільної ступені точності, без обмежень.

**Дискретно-континуальне моделювання.** Застосуємо такий метод декомпозиції: розіб'ємо множини елементів  $A_i$  конструкції машини на дві множини: множини вузлів з'єднань  $A_i^n$  та множини континуальних елементів  $A_i^c$ . Для кожного континуального елемента  $A_i^c$  виберемо систему координатних функцій  $\phi_i$  з довільного ряду ортогональних за кінетичною енергією функцій. Тоді переміщення довільної точки елемента  $A_i^c$  будуть

$$x_i(t, X) = \begin{bmatrix} q_{xli}(t)j_{xli}(X) \\ \dots \\ q_{xni}(t)j_{xni}(X) \end{bmatrix}, \quad y_i(t, X) = \begin{bmatrix} q_{yli}(t)j_{yli}(X) \\ \dots \\ q_{yni}(t)j_{yni}(X) \end{bmatrix}, \quad z_i(t, X) = \begin{bmatrix} q_{zli}(t)j_{zli}(X) \\ \dots \\ q_{zni}(t)j_{zni}(X) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де  $q_i$  – довільні часові функції, а  $j$  – функції просторових координат тіл  $A_i^c$ . Це можуть бути тригонометричні функції, поліноми, наприклад, поліноми Лежандра. Ці функції потрібно вибирати з таких міркувань, щоб вони давали змогу з потрібним ступенем точності апроксимувати як довільні (зазвичай достатньо гладкі) поля переміщень всередині елемента, так і довільні граничні значення – як кінематичні, так і силові. Визначимо варіації кінетичної та пружної енергій у континуальних елементах:

$$dU_i^c = (K_i^{uc} \cdot q_i^c)^T \cdot dq_i^c, \quad dK_i^c = (M_i^{kc} \cdot q_i^c)^T \cdot dq_i^c, \quad (2)$$

У дискретних елементах:

$$dU_i^n = (K_i^{un} \cdot q_i^n)^T \cdot dq_i^n, \quad dK_i^n = (M_i^{kn} \cdot q_i^n)^T \cdot dq_i^n. \quad (3)$$

За вараційним принципом Гамільтона–Остроградського, згрупувавши члени при незалежних варіаціях  $dq_i^c$  та  $dq_i^n$ , отримуємо

$$M \frac{d^2 q}{dt^2} + C \frac{d q}{dt} + K q = F, \quad (4)$$

де  $q = [q_{x11}, q_{x12}, \dots, q_{zmm}]^T$  – вектор невідомих часових функцій;  $M$  – матриця мас;  $C$  – матриця демпфування,  $K$  – матриця жорсткості.

У [10–13] наведено алгоритми декомпозиції складених конструкцій, що дають змогу діагоналізувати матрицю мас. За цією матрицею можна записати рівняння динамічної рівноваги в нормальній формі і надалі застосовувати відомі алгоритми розв'язання систем диференціальних рівнянь з початковими умовами, розв'язані відносно старших похідних. На основі цих співвідношень можна аналізувати динамічну поведінку машин на основі стійких алгоритмів розв'язання задач з початковими умовами. Наступним кроком є побудова моделі континуальних елементів та визначення пружних характеристик дискретних з'єднувальних елементів.

**Дискретно-континуальна модель колони труб.** На рис. 1 показано схему колони.

На рис. 2 показано схему розрахунку колони.

На рис. 2  $T_i$  – ділянки труб, які розглядаються як континуальні елементи,  $M$  – муфти, які розглядаються як дискретні масивні елементи, що приєднуються до труб за допомогою пружин  $C_e$ , в'язких демпферів  $C_d$  та елементів сухого тертя  $C_t$ . Згідно з типовою конструкцією муфт, тертя  $C_t$  починає діяти у муфті не при нульових зміщеннях, а лише при деяких достатньо великих крутних моментах. Це зображено на рис. 2 деяким зазором  $d$ .

Застосуємо методу дискретно-континуального моделювання (1–4). Згрупувавши члени при незалежних варіаціях переміщень на основі (3, 4) отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь [7–10]

$$M \frac{d^2 Y}{dt^2} + C_N \left( \frac{d Y}{dt} \right) + KY = F . \quad (5)$$

де  $M$  – матриця мас;  $C_N \left( \frac{d Y}{dt} \right)$  – матриця нелінійного демпфування;  $K$  – матриця жорсткості;  $Y$  – вектор переміщень;  $F$  – вектор зовнішніх сил.

Цю систему прийнято записувати в нормальній формі (розв'язаній відносно других похідних)

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + M^{-1} \left( C_N \left( \frac{d Y}{dt} \right) + KY - F \right) = 0 . \quad (6)$$

**Основні співвідношення.** Стратегія розгляду задачі складатиметься з таких кроків (рис. 3).

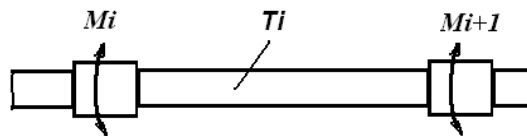


Рис. 1. Схема колони

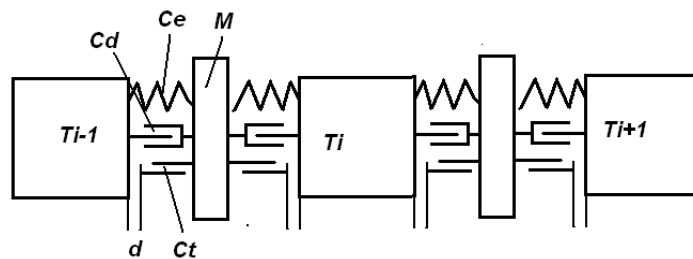


Рис. 2. Схема розрахунку колони

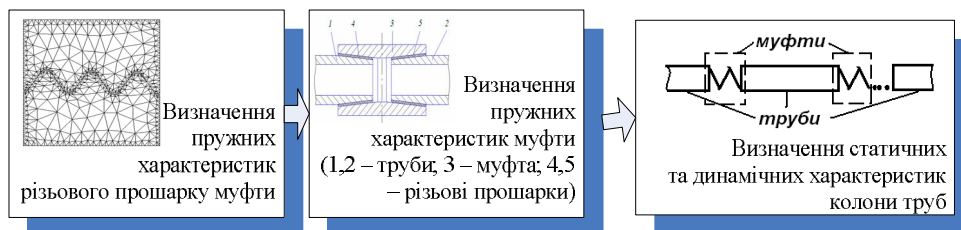


Рис. 3. Послідовність розв'язання задачі

А. Визначаємо уточнений напружено-деформований стан у зоні різі та ефективні пружні характеристики різьового шару (метод скінченних елементів)

Б. Розглядаємо напружено-деформований стан у з'єднанні при закручуванні та пружні властивості з'єднання (варіаційно-аналітичний метод).

В. Визначаємо динамічні та статичні характеристики колони труб у реальних умовах експлуатації (дискретно-континуальне моделювання)

**Визначення жорсткісних характеристик пружного прошарку між муфтою і трубою, яким моделюється різь.** Вважатимемо, що деформація відбувається тільки в одному напрямі і оцінимо  $e_y$  з'єднання як для суцільного матеріалу:  $e_{y,max} = u_{y,max} / H$ , де  $H = 10$  мм – сумарна товщина з'єднання (труба+муфта).

Граничні умови включали затиснення нижньої поверхні, що відповідає внутрішній стінці труби, умови симетрії  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$  по боках  $x=0$ ,  $x=L$  та переміщення донизу верхньої частини з'єднання  $-u_y$ , що визначав притиск зовнішньої стінки муфти. Величину такого зміщення вибрана за умови, що досягнутий рівень напружень у трубі та муфті не перевищує величини границі текучості, яку взято так:  $s_T > 240$  МПа. Модуль Юнга матеріалу труби і муфти – однаковий  $E = 210000$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,25$ . Повне притискання  $u_{y,max} = -0,0076$  мм здійснюємо за послідовність з 20 рівномірних кроків з величиною  $\Delta u_y = -0,00038$  мм. Розглянуто два види контакту: контакт з проковзуванням на нахилених поверхнях зубів з коефіцієнтом тертя  $\mu = 0,2$  та ідеальний контакт (без проковзування). Для виявлення впливу контактного з'єднання на жорсткість конструкції (труба+муфта) розраховано також коефіцієнт постелі для еквівалентного суцільного елемента (сумарної товщини) без різьового з'єднання.

Тоді напруження наприкінці навантаження оцінимо за формулою  $s_{y,max} = \bar{E} e_{y,max}$ , де  $\bar{E} = \frac{E}{(1-\nu)(1+\nu)}$ ,  $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$  – як для плоскої деформації. Через лінійність задачі для суцільного матеріалу (без з'єднання) на 1 з 20 кроків розбиття навантаження приріст напруження складатиме  $\Delta s_y = 9,6$  МПа, що відповідає притиску  $\Delta u_y = -0,00038$  мм.

Коефіцієнт постелі визначали за формулою

$$k = \frac{\Delta s_{yy}}{\Delta u_y}, \quad (7)$$

де  $\Delta s_{yy} = \bar{s}_{yy}^{(i+1)} - \bar{s}_{yy}^{(i)}$ ,  $\bar{s}_{yy}^{(i)} = \frac{1}{L} \int_0^L s_{yy}^{(i)} ds$  – усереднене за довжиною з'єднання напруження;  $L$  – довжина контактного з'єднання (фрагмент);  $i$  – крок навантаження. Тому для суцільного матеріалу оцінка коефіцієнта постелі  $k = 25200 = \bar{E} / H$ . Справді,  $k = \frac{\Delta s_{yy}}{\Delta u_y} = \frac{\bar{E}(u_{max}/20)/H}{u_{max}/20} = \frac{\bar{E}}{H}$ .

Зауважимо, що числовий розрахунок методом скінченних елементів напружень у суцільному матеріалі практично без похибки визначив напруження  $\Delta s_y = -9,576$  МПа на першому кроці навантаження. На рис. 4 показано еквівалентні за Мізесом – Губером напруження при 5-му кроці навантаження (враховуючи симетрію, розглядали лише половину зубця).

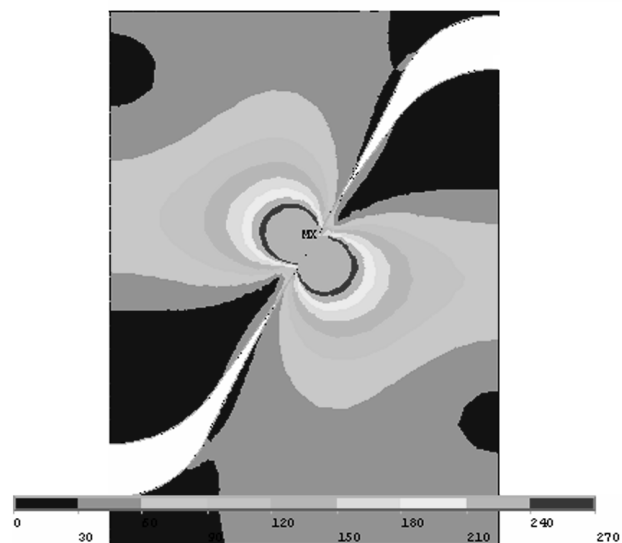


Рис. 4. Еквівалентні за Мізесом–Губером напруження на початковий момент контакту (5-й крок з 20-ти)

Зауважимо, що хоча визначені чисельно коефіцієнти постелі для різних кроків навантаження дещо коливаються, однак ця різниця не перевищує 5 % значення  $k$  для суцільного матеріалу (рис. 5). Розіб'ємо НДС муфти на дві складові, які можна розглядати послідовно: розтяг-стиск і кручення.

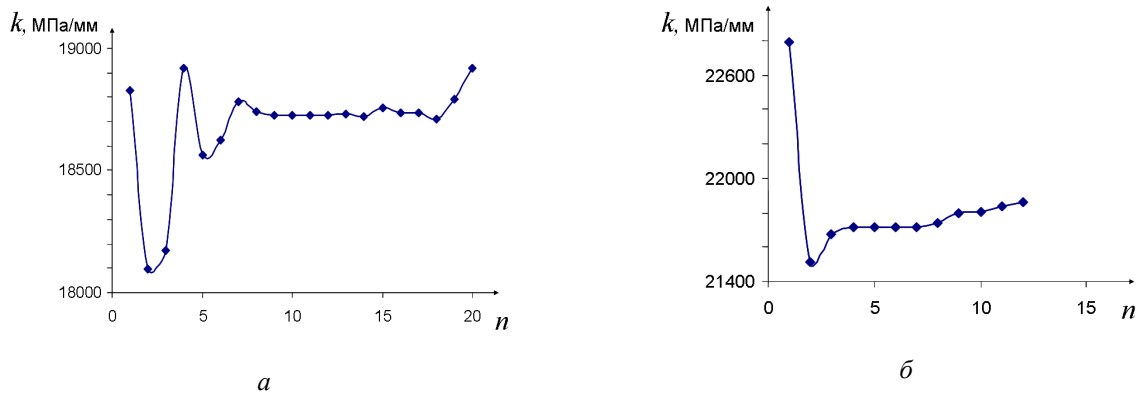


Рис. 5. Залежність коефіцієнта постелі від умов на поверхнях контакту:  
 а – з проковзуванням; б – без проковзування

**Осесиметричний розтяг-стиск.** У першому випадку мають місце лише переміщення  $u_z$ ,  $u_r$ , деформації  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_{zr}$  та напруження  $\sigma_z$ ,  $\sigma_r$ ,  $\tau_{zr}$ . Всі ці величини вважаємо незалежними від колової координати  $\varphi$ . Цей випадок відповідає таким різновидам деформації з'єднання: розтягу поздовжнім зусиллям (наприклад, вагою колони труб) та осесиметричному розпиранню радіальними зусиллями, що виникають під час загвинчування деталей з конічною різьбою чи внаслідок зміни їхньої температури.

Варіаційне рівняння рівноваги у цьому випадку (динамічні члени не враховуємо) можна записати у такому вигляді для кожного елемента з'єднання

$$\begin{aligned}
 dI_k = & \int_0^t \int_0^{2p} \int_{R^-}^{R^+} \int_0^L \left[ -s_j + \frac{\partial t_{rj}}{\partial j} + R \frac{\partial t_{rz}}{\partial z} - rR \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right] du_r - r s_r \frac{\partial du_r}{\partial r} + \\
 & + \left[ \frac{\partial s_j}{\partial j} + t_{rj} + r \frac{\partial t_{jz}}{\partial z} - rR \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right] du_j - r t_{rj} \frac{\partial du_j}{\partial r} + \\
 & + \left[ r \frac{\partial s_z}{\partial z} + \frac{\partial t_{jz}}{\partial j} - rR \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right] du_z - r t_{rz} \frac{\partial du_z}{\partial r} \Big] dz dr dj - \int_S (\vec{s}_n - \vec{P}) d\vec{U} dS \Big] dt = 0. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Тут  $\delta I_k$  – варіація енергії  $k$ -частини  $k$  конструкції (сума енергії деформації та кінетичної енергії);  $t$  – час;  $R^-$ ,  $R^+$  – поточні значення внутрішнього та зовнішнього радіусів елемента;  $L$  – довжина елемента;  $u_z$ ,  $u_r$ ,  $u_\varphi$  – переміщення у напрямках відповідних осей;  $\sigma_z$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  – нормальні напруження на відповідних площинах, ортогональних осям;  $\tau_{zr}$ ,  $\tau_{z\varphi}$ ,  $\tau_{r\varphi}$  – дотичні напруження на цих площинах;  $S$  – навантажена поверхня тіла;  $\vec{s}_n$  – вектор напружень на поверхні тіла;  $\vec{P}$  – вектор зовнішнього поверхневого навантаження;  $\vec{U}$  – вектор переміщень. В останньому інтегралі наведено скалярний добуток двох векторів – різниці напружень і варіації переміщень. Ця динамічна контактна задача достатньо складна. Тому проведемо на основі деяких гіпотез декомпозицію загальної задачі на ряд часткових.

Співвідношення закону Гука для ортотропного матеріалу труби або муфти разом з виразами деформацій через переміщення складуть замкнену систему рівнянь у переміщеннях. Ці співвідношення разом з крайовими умовами становлять замкнуту систему остаточних рівнянь. Нижче ці рівняння та граничні умови будуть конкретизуватися для окремих видів навантаження.

Для осесиметричної деформації розглянемо такі апроксимації переміщень:  
для муфти

$$u_z^M = u_{zij}^M (R-r)^{(i-1)} z^j, \quad u_r^M = u_{rij}^M (R-r)^{(i-1)} z^j, \quad (9)$$

для труби

$$u_z^T = u_{zij}^T (R-r)^{(i-1)} z^j, \quad u_r^T = u_{rij}^T (R-r)^{(i-1)} z^j \quad (10)$$

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Оскільки процес деформування з'єднання вважаємо квазістационарним та у зв'язку з осьовою симетрією напружено-деформівного стану, необхідність інтегрування у варіаційному рівнянні (7) за часом та за кутовою координатою відпадає. Використовуючи симетрію задачі, розглядаємо половину з'єднання (рис. 6), для якої варіаційне рівняння рівноваги запишеться як

$$dl = dl_T + dl_M \quad (11)$$

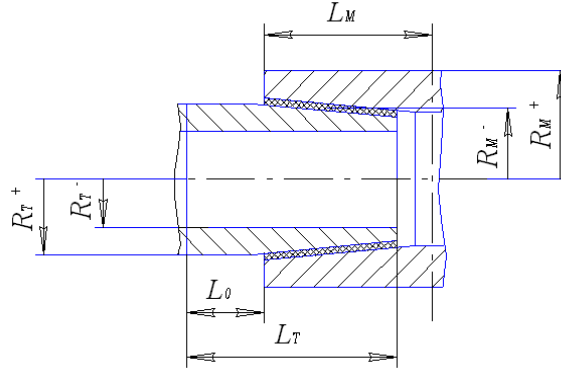


Рис. 6. Редукована розрахункова схема

У механічній системі залишилися дві основні складові: трубчастий елемент ( $T$ ) та половина муфти ( $M$ ), спряження яких здійснюється через проміжний прошарок типу Вінклера. Для згаданого прошарку виконується залежність

$$s_n^+ - s_n^- = K_n (u_n^+ - u_n^-), \quad (12)$$

тобто, різниця напружень на поверхнях прошарку є пропорційною до різниці відповідних переміщень з коефіцієнтом пропорційності  $K_n$ . З урахуванням (7–9) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь на вектор невідомих  $Q = (u_{zij}^M, u_{rij}^M, u_{zij}^T, u_{rij}^T)$

$$[A]Q^T = f. \quad (13)$$

**Кручення.** Аналогічно як і для розтягу-стиску отримуємо варіаційне рівняння

$$\delta I_k = \int_0^l \int_0^{R^+} \int_0^{R^-} \int_0^L \left[ \left[ -\sigma_\varphi + R \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - r\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right] \delta u_r - r\sigma_r \frac{\partial \delta u_r}{\partial r} + \right. \\ \left. + \left[ r \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - r\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \right] \delta u_z - r\tau_{rz} \frac{\partial \delta u_z}{\partial r} \right] dz dr d\varphi + \int_{S_k} (\vec{P}) \delta \vec{U} dS \Big| dt = 0. \quad (14)$$

Аналогічно як для розтягу отримуємо систему вирішуючих рівнянь

$$[B]Q_j^T = f \quad (15)$$

**Числовий приклад.** Розглянемо трубу  $4^{1/4}$  дюймів. Розпираючі зусилля визначаємо за алгоритмом аналітичного підходу на основі (7–16). Розглядалося з'єднання з такими стандартними розмірами (труба  $4^{1/4}$  дюйма, рис.7, а, б).

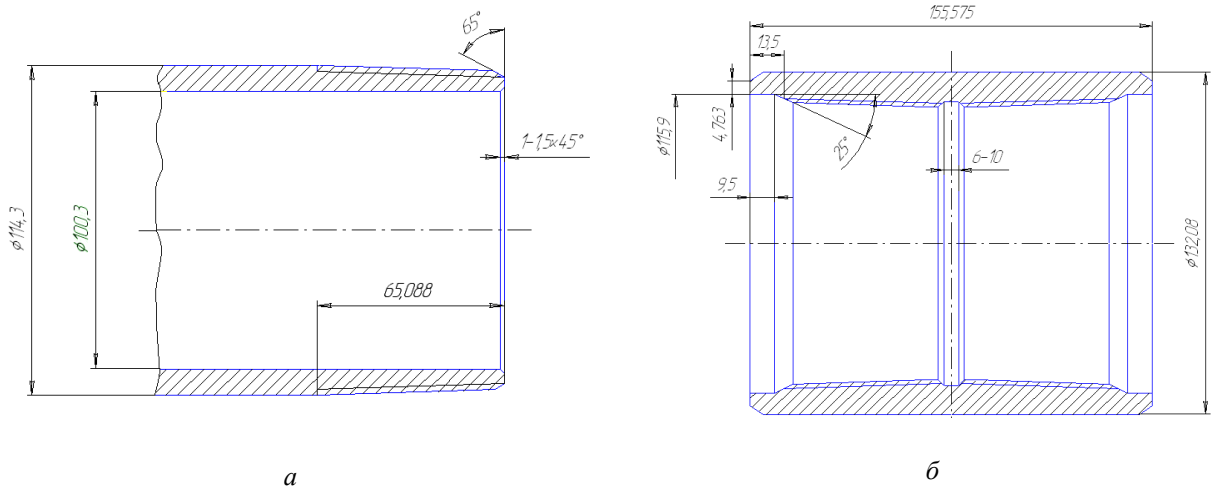


Рис. 7. Труба (а) та муфта (б)

Використовуючи значення жорсткості зони різьби, отримані вище на основі (7–14) визначимо розподіл напружень. Напруження в муфті мають такі самі величини, лише вони дзеркально симетричні відносно лінії контакту до напружень у трубі. На рис. 8 наведено розподіл нормальних зусиль  $s_r$  вздовж контактної зони (зони зубців) на різній відстані  $H$  від зони контакту.

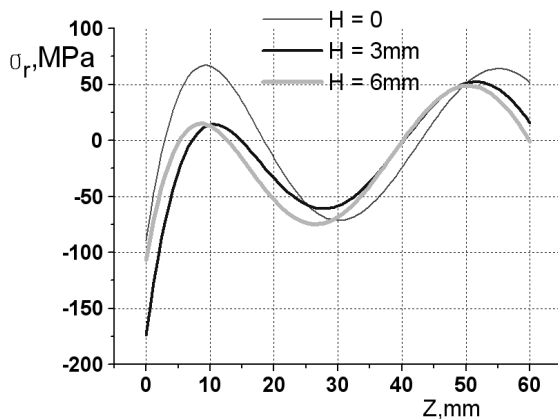


Рис. 8. Радіальні напруження  $s_r$  у трубі (натяг 12 мм)

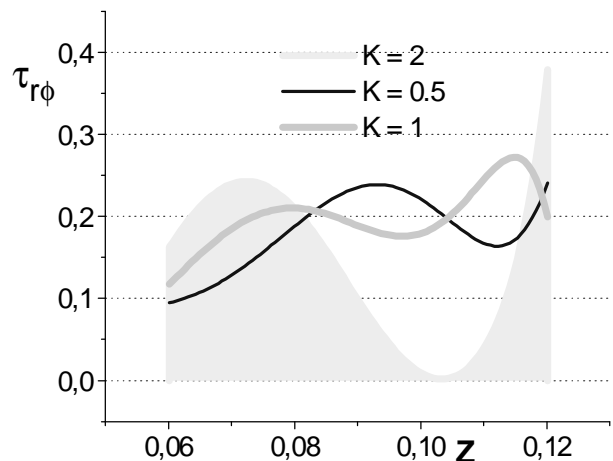


Рис. 9. Розподіли дотичних напружень  $t_{rj}$  в зоні контакту муфти з ніпелем труби

Тепер, маючи напруження у муфті при заданих переміщеннях на її краях, можна вирахувати її пружні властивості. Дійсно, наприклад, крутна жорсткість муфти дорівнюватиме крутному моменту при заданому одиничному куті повороту на лівому краї (рис. 4):

$$M_j = \iint_S t_{rj} r dS = 2p \int_{R^-}^{R^+} t_{rj} r dr \quad (19)$$

При зростанні моменту необхідно перевіряти умову в зоні контакту  $t_{rj} < fs_r$ . Якщо ж  $t_{rj} \geq fs_r$ , то з'єднання треба розбити на зони з проковзуванням та без. Із збільшенням жорсткості різі на кручення  $K$  напруження локалізуються на краях і зростають, що проілюстровано на рис. 9.

Момент кручення тепер матиме як пружну  $M_j$ , так і фрикційну складову  $M_T$

$$M_K = \sum_i M_{ji} + \sum_j M_{Tj} \quad (20)$$

Тут сумування ведеться окремо по всіх нерухомих ділянках різі та по ділянках з проковзуванням. У динаміці перший доданок матиме пружно-демпфувальний вигляд  $C \frac{d q}{dt} + Kq$ , а на ділянках з проковзуванням – вид  $C_T \text{sign} \left( \frac{d q}{dt} \right)$ . Визначивши динамічні параметри муфти, тепер на основі дискретно-континуальної схеми розрахунку (1–6) можна визначити динамічний напружено-деформований стан у трубах колони. Маючи цей напружено-деформований стан, ми можемо визначити зусилля на кожній муфті і дослідити такі питання, як міцність з’єднання, умови його функціонування (запобігання саморозкручуванню тощо).

**Висновки.** Запропоновано адаптивний спосіб розрахунку багатоланкового з’єднання труб. Як з’єднувальний елемент розглядали муфту з конічною різьовою поверхнею. На першому етапі визначається характер розподілу напружень у зоні різі. На основі отриманих інтегральних пружних властивостей різьового прошарку побудовано модель з’єднання на основі уточнених оболонкових теоріях. Отримано характери розподілу напружень в з’єднанні та його жорсткість. Надалі цю розрахункову схему можна використати як для розрахунку характеру динамічних процесів у колонах труб, так і для визначення міцності та суцільності (відсутність саморозкручування).

1. Тимошенко С. П. *Колебания в инженерном деле.* – М.: Наука, 1967. – 444 с. 2. *Вибрації в техніці. Т. 6. Захита от вибрації и ударов.* – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с. 3. Богомолов С. И., Журавлева А. М. *Колебания сложных механических систем.* – Харьков, 1979. – 136 с. 4. Hurty W. C. *Dynamic Analysis of Structural System Using Component Modes // AIAA Journal, Vol. 3, No.4, 1965.* – P. 678–685. 5. F.J. Fahy, "Statistical Energy Analysis : a Critical Overview Review", *Phil. Trans. R. Soc. London, A 346 (1994), 431–447.* 6. Гащук П., Зорій Л.–М. *Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем.* – Львів: Українські технології, 1999. – 372с. 7. Мочернюк Д. Ю. *Исследование и расчет резьбовых соединений труб, применяемых в нефтедобывающей промышленности.* – М.: Недра, 1970. – 137с. 8. Якушев А. И., Мустаев Р. Х., Мавлютов Р. Р. *Повышение прочности и надежности резьбовых соединений.* – М.: Машиностроение, 1979. – 356 с. 9. Биргер И. А., Иосилевич Г. Б. *Резьбовые и фланцевые соединения.* – М.: Машиностроение, 1990. – 368 с. 10. Гащук П., Вікович І., Дівеєв Б. *Застосування дискретно-континуальних дискретних схем для визначення вібронапружень в механічних конструкціях. Труды Одесского политехн. университета, Вып. 2(8), 1999, С. 34–41.* 11. Дівеєв Б.М., Дорош І.Р. *Проблеми оптимального проектування штанг штангових обприскувачів // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка" Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2006. – № 40. – С.105–111.* 12. Дівеєв Б. М. *Раціональне моделювання динамічних процесів у складних конструкціях // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка" Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2007. – № 41. – С. 103–108.* 13. Дівеєв Б. М., Грицай В. Я., Коваль Т. Б. *Розрахунок та оптимізація вібраційних властивостей машин з гнучкими подовгастими елементами з динамічними гасниками коливань // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. – 2008. – № 614. – С. 82–87.*