

вентильних реактивних двигунів / В.І. Ткачук // Технічна електродинаміка. Науковий журнал. – 1998. – С. 180 – 187. 4. Комплект тягового електропривода ПТ для електротранспорту [Електронний ресурс]: (совместное производство с ООО НПФ «АРС ТЕРМ»). – Режим доступа : [www.npfarstern.ru](http://www.npfarstern.ru). – Название с домашней страницы Интернета. 5. Ткачук В.І. Вентильний реактивний двигун з високою видатністю / В.І. Ткачук, І.Є. Біляковський, В.Г. Гайдук // Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика: Зб. наук. пр. Дніпродзержинського держ. техн. ун-ту. – 2007. – С. 187–188. 6. [http://www.privod-news.ru/june\\_03/26-1.htm](http://www.privod-news.ru/june_03/26-1.htm). 7. <http://www.orionmotor.narod.ru/trans.htm>.

УДК 519.248

С.В. Щербовських

Національний університет “Львівська політехніка”,  
Науково-дослідна група ДБ / ТРИКАФ

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НАДІЙНОСТІ ДЛЯ АНАЛІЗУ ПРИЧИН НЕПРАЦЕЗДАТНОСТІ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНОЇ СИСТЕМИ ІЗ СКЛАДНИМ ЗАГАЛЬНИМ ЗАМІЩУВАЛЬНИМ РЕЗЕРВУВАННЯМ

© Щербовських С.В., 2014

Запропоновано математичну модель надійності електротехнічної системи із складним загальним заміщувальним резервуванням. Така модель адекватно враховує вплив зміни навантаження на ймовірнісні показники мінімальної множини перетинів. Для моделювання застосовані динамічне дерево відмов та марковський аналіз.

*Ключові слова: мінімальна множина перетинів, заміщувальне резервування, модель надійності, динамічне дерево відмов, марковська модель.*

**In the paper mathematical reliability model for electrical system with complex whole standby redundancy is proposed. Such model adequately takes into account load-sharing impact on minimal cut set probability indexes. For modeling dynamic fault tree and Markov analysis is used.**

*Key words: minimal cut set, standby redundancy, reliability model, dynamical fault tree, Markov model.*

### Постановка проблеми

Розробляють рекомендації щодо підвищення надійності електротехнічних систем на основі пошуку та аналізу причин їх непрацездатності. Кожній причині непрацездатності відповідає унікальний набір непрацездатних елементів, який називають перетином. Усій сукупності незалежних причин непрацездатності відповідає мінімальна множина перетинів. Мета аналізу надійності полягає у визначенні ймовірнісних характеристик усіх перетинів із мінімальної множини. Для системи із складним загальним заміщувальним резервуванням необхідно відобразити вплив непрацездатності окремих елементів та підсистем на навантаження решти працездатних елементів. У результаті такого впливу зазнають змін ймовірнісні показники перетинів, для визначення яких необхідно розробити адекватну математичну модель надійності. Ця проблема виникає під час забезпечення заданого рівня надійності електротехнічних та електроенергетичних систем, які застосовують в об'єктах підвищеної безпеки.

## Огляд літературних джерел

Для визначення ймовірнісних характеристик перетинів використовують два підходи: логіко-ймовірнісний аналіз та марковський аналіз. Логіко-ймовірнісний аналіз ґрунтується на складанні логічних умов, які відповідають перетинам, із подальшим їх перетворенням до ймовірнісних виразів [1, 2]. Такий підхід простий у застосуванні, проте на його основі не можна коректно враховувати зміну навантаження, спричинену відмовами елементів. Марковський аналіз зазначених обмежень не має [3], проте під час його застосування виникають складності, пов'язані із високою трудомісткістю та обмеженням розподілу тривалості напрацювання та ремонтування елементів експоненціальним законом. Для зменшення трудомісткості такого аналізу необхідно вдосконалити методи автоматичної побудови марковської моделі [4]. Таку побудову виконують на основі дерева відмов, яке необхідно доповнити параметрами, що математично описують надійнісну поведінку за навантаженням [5]. Для усунення обмеження експоненціальним розподілом необхідно застосувати методи розщеплення простору станів [6–8], які повинні адекватно урахувати запам'ятовування передісторії напрацювання елементів системи за навантаженням.

## Задачі дослідження

- Формалізувати опис надійності системи на основі динамічного дерева відмов.
- Побудувати модель станів і подій системи.
- Сформувати розщеплену однорідну марковську модель системи.
- Визначити ймовірнісні показники мінімальних перетинів системи.

## Виклад основного матеріалу

### Опис системи та її динамічне дерево відмов

Система складена із чотирьох елементів (рис. 1): двох генераторів G1 і G2 та двох трансформаторів TV1 і TV2. Генератор G1 та трансформатор TV1 утворюють основну підсистему, а генератор G2 і трансформатор TV2 – резервну.

Генератор G1 та трансформатор TV1 утворюють основну підсистему, а генератор G2 і трансформатор TV2 – резервну. Резервна підсистема працює за алгоритмом заміщувального резервування, тобто, якщо основна підсистема працездатна, то резервна перебуває у ненавантаженому режимі. Якщо основна система стає непрацездатною, то резервна переходить у навантажений режим. Вважаємо, що засоби технічної діагностики та перемикання ідеальні, а тривалість зміни навантаження резервною підсистемою – миттєва. Функція системи полягає у забезпеченні електричною енергією споживачів, які під'єднані до її виходу.

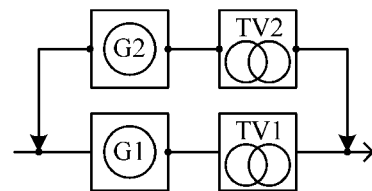


Рис. 1. Функціональна схема системи

Надійність системи формалізовано динамічним деревом відмов, структура якого подана на рис. 2. Динамічне дерево відмов є математичною моделлю, яка описує умову непрацездатності системи та її надійнісну поведінку за навантаженням на основі блоків, що позначають логічні операції та операції відношення. Умову непрацездатності визначають дедуктивним методом, починаючи від вершини подій через оператори до базових подій.

Непрацездатність системи, позначена блоком «вершина подій 1», полягає у тому, що система не здатна забезпечити енергією споживачів, які під'єднані до її виходу. Вважаємо, що така непрацездатність критична, тобто після її появи відновлення системи до уваги не береться. Такий стан системи настає, якщо одночасно непрацездатні основна та резервна підсистеми, що описано блоком «оператор 1», тип якого задано логічною операцією І. Непрацездатність основної підсистеми настає, якщо непрацездатний хоча б один із двох її елементів, що описано блоком «оператор 3», тип якого задано логічною операцією АБО. Непрацездатність резервної підсистеми описуємо за аналогією блоком «оператор 6», тип якого задано логічною операцією АБО. Непрацездатність генератора G1 позначено блоком «базова подія 1», а його напрацювання до відмови розподілено за законом Вейбулла із параметрами  $\alpha = 11\ 000$  год. і  $\beta = 1,1$ . Непрацездатність трансформатора TV1 – блоком «базова подія

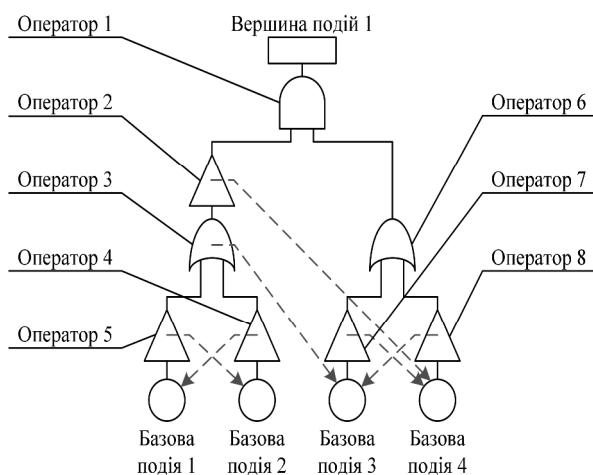


Рис. 2. Динамічне дерево відмов системи

- зміну навантаження елемента основної підсистеми, залежно від стану іншого її елемента;
- зміну навантаження елемента резервної підсистеми, залежно від стану іншого її елемента.

Для опису першого явища введемо у структуру дерева відмов блок «оператор 2», який є повторювачем логічного сигналу, і задамо умови зміни навантаження у ньому та у блоці «оператор 3». Якщо логічний сигнал на виході обох блоків становить ХИБНО, тобто основна підсистема працездатна, то інтенсивність процесу напрацювання елементів резервної підсистеми, які задано у блоках «базова подія 3» та «базова подія 4», множимо на 0.

Для опису другого явища введемо у структуру дерева відмов блоки «оператор 4» та «оператор 5», які є повторювачами логічного сигналу, і задамо у них умови зміни навантаження. Якщо логічний сигнал на виході блока «оператор 4» дорівнює ІСТИННО, тобто трансформатор TV1 непрацездатний, то інтенсивність процесу напрацювання генератора G1, який задано у блоці «базова подія 1», множимо на 0. Відповідно якщо логічний сигнал на виході блока «оператор 5» дорівнює ІСТИННО, тобто генератор G1 непрацездатний, то інтенсивність процесу напрацювання трансформатора TV1, який задано у блоці «базова подія 2», так само множимо на 0.

Для опису третього явища введемо у структуру дерева відмов блоки «оператор 7» та «оператор 8», які є так само повторювачами логічного сигналу, і задамо у них умови зміни навантаження. Якщо логічний сигнал на виході блока «оператор 7» дорівнює ІСТИННО, тобто генератор G2 непрацездатний, то інтенсивність процесу напрацювання трансформатора TV2, який задано у блоці «базова подія 4», множимо на 0. Відповідно, якщо логічний сигнал на виході блока «оператор 8» дорівнює ІСТИННО, тобто трансформатор TV2 непрацездатний, то інтенсивність процесу напрацювання генератора G2, який задано у блоці «базова подія 3», так само множимо на 0.

### Модель станів та подій системи

На підставі наведеного вище динамічного дерева відмов системи із складним загальним заміщувальним резервуванням, згідно із формалізованими правилами [8, с. 67] складена модель станів та подій. Така модель є математичним описом станів, в яких може перебувати система, та подій, які у ній можуть відбуватися, у проєкційному зв'язку до процесів, що у ній відбуваються. Граф станів та переходів такої моделі подано на рис. 3, а її параметри наведено у таблиці.

У моделі станів та подій процеси напрацювання і ремонтування для генератора G1 позначено як P<sub>1</sub> і P<sub>5</sub>, для трансформатора TV1 – P<sub>2</sub> і P<sub>6</sub>, для генератора G2 – P<sub>3</sub> та для трансформатора TV2 – P<sub>4</sub>. Система перебуває у семи станах, із яких три працездатні – S<sub>7</sub>–S<sub>5</sub> та чотири непрацездатні – S<sub>4</sub>–S<sub>1</sub>. У системі відбувається вісім подій, із яких чотири відмови – T<sub>3</sub>, T<sub>4</sub>, T<sub>6</sub>, і T<sub>7</sub>, два пошкодження – T<sub>1</sub> і T<sub>2</sub> та два відновлення – T<sub>5</sub> і T<sub>8</sub>.

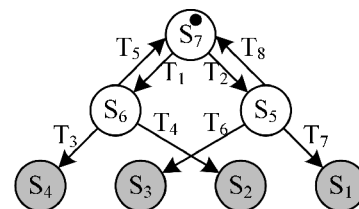


Рис. 3. Граф станів та переходів моделі станів та подій системи

Параметрами станів є значення коефіцієнтів масштабування для процесів  $P_1-P_6$  та логічна функція  $y$ , яка набуває значення «1», якщо система працездатна, та «0» – якщо ні. Параметрами подій є назва початкового стану, назва процесу, який завершився та назва кінцевого стану.

### Параметри моделі станів та подій системи

№	Опис станів									Опис подій		
	Поч. стан	Графічний опис стану	Коефіцієнти масштабування						$y$	Назва події	Заверш. процес	Кінц. стан
			$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$				
1	$S_7$		1	1	0	0	0	0	1	$T_1$	$P_1$	$S_6$
2			$T_2$	$P_2$	$S_5$							
3	$S_6$		0	0	1	1	1	0	1	$T_3$	$P_3$	$S_4$
4			$T_4$	$P_4$	$S_2$							
5			$T_5$	$P_5$	$S_7$							
6	$S_5$		0	0	1	1	0	1	1	$T_6$	$P_3$	$S_3$
7			$T_7$	$P_4$	$S_1$							
8			$T_8$	$P_6$	$S_7$							
9	$S_4$		0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
10	$S_3$		0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
11	$S_2$		0	0	0	0	0	0	0	—	—	—
12	$S_1$		0	0	0	0	0	0	0	—	—	—

### Марковська модель системи

Грунтуючись на моделі станів та подій системи із складним загальним заміщувальним резервуванням, згідно із формалізованими правилами [8, с. 78], сформована розщеплена однорідна марковська модель. Таку модель подають системою диференціальних рівнянь Колмогорова – Чепмена вигляду:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \mathbf{A}\mathbf{p}(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{p}(t).$$

де  $t$  – час;  $\mathbf{p}(t)$  – вектор, що містить функції ймовірності фаз;  $\mathbf{y}(t)$  – вектор, який містить функції ймовірності перетинів.

Марковська модель є множиною матриць, які задають інтенсивності переходів між фазами  $\mathbf{A}$ , початкові ймовірності фаз  $\mathbf{p}(0)$ , а також зв'язок  $\mathbf{C}$  функцій ймовірності фаз із характеристиками надійності системи. Вказані матриці формуємо так:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(0) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix}.$$

Компоненти марковської моделі системи формуємо на основі марковських моделей процесів. Параметри марковських моделей процесів визначаємо згідно із критерієм рівності першого і центрованого другого моментів фактичного розподілу процесу та його марковської моделі. Вважаємо, що для процесу  $P_1$  параметри його марковської моделі становлять  $\{A_1, p_1(0), C_1\}$ , для  $P_2 - \{A_2, p_2(0), C_2\}$ , для  $P_3 - \{A_3, p_3(0), C_3\}$  та для  $P_4 - \{A_4, p_4(0), C_4\}$ ,  $P_5 - \{A_5, p_5(0), C_5\}$  та  $P_6 - \{A_6, p_6(0), C_6\}$ . Відповідно до вказаних параметрів для початкового працездатного стану  $S_7$ :

$$A_{S_7} = A_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6 + E_1 \otimes A_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6,$$

$$p_{S_7}(0) = p_1(0) \otimes p_2(0) \otimes p_3(0) \otimes p_4(0) \otimes p_5(0) \otimes p_6(0),$$

де  $\otimes$  – оператор тензорного множення;  $E_1$ – $E_6$  – одиничні матриці, розмірність яких дорівнює розмірності матриць  $A_1$ – $A_6$ .

Для працездатного стану  $S_6$ :

$$A_{S_6} = E_1 \otimes E_2 \otimes A_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6 + E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes A_4 \otimes E_5 \otimes E_6 + \\ + E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes A_5 \otimes E_6.$$

Для працездатного стану  $S_5$ :

$$A_{S_5} = E_1 \otimes E_2 \otimes A_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6 + E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes A_4 \otimes E_5 \otimes E_6 + \\ + E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes A_6.$$

Для непрацездатних станів  $S_1$ – $S_4$ :

$$C_{S_1} = C_{S_2} = C_{S_3} = C_{S_4} = I,$$

де  $I$  – одиничний вектор-рядок, розмірність якого дорівнює добутку розмірностей усіх матриць інтенсивності переходів  $A_1$ – $A_6$ .

Для події  $T_1$ , спричиненої завершенням процесу  $P_1$ :

$$A_{T_1} = p_1 C_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6.$$

Для події  $T_2$ , спричиненої завершенням процесу  $P_2$ :

$$A_{T_2} = E_1 \otimes p_2 C_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6.$$

Для подій  $T_3$  та  $T_6$ , спричинених завершенням процесу  $P_3$ :

$$A_{T_3} = A_{T_6} = E_1 \otimes E_2 \otimes p_3 C_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6.$$

Для подій  $T_4$  та  $T_7$ , спричинених завершенням процесу  $P_4$ :

$$A_{T_4} = A_{T_7} = E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes p_4 C_4 \otimes E_5 \otimes E_6.$$

Для події  $T_5$ , спричиненої завершенням процесу  $P_5$ :

$$A_{T_5} = E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes p_5 C_5 \otimes E_6.$$

Для події  $T_8$ , спричиненої завершенням процесу  $P_6$ :

$$A_{T_8} = E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes p_6 C_6.$$

Одержана марковська модель містить 112 диференціальних рівнянь.

### ***Ймовірнісні характеристики мінімальних перетинів***

Застосовуючи розщеплену однорідну марковську модель системи із складним загальним заміщувальним резервуванням на основі методу Розенброка, обчислюємо ймовірнісні характеристики мінімальних перетинів системи. Використання методу Розенброка обумовлено тим, що марковська модель системи жорстка. Така її властивість зумовлена розкидом параметрів для процесів напрацювання та ремонтування, а також розщепленням простору станів.

Склад мінімальної множини перетинів системи із загальним заміщувальним резервуванням такий: перетин «G1–G2», якому відповідає непрацездатний стан  $S_4$ , «TV1–G2» –  $S_3$ , «G1–TV2» –  $S_2$  та «TV1–TV2» –  $S_1$ . Криві ймовірнісних характеристик мінімальних перетинів системи  $P(t)$  подані на рис. 4, зокрема, суцільна крива 1 відповідає функції ймовірності перетину «TV1–TV2», штрихова крива 2 – «G1–TV2», штрих-пунктирна крива 3 – «TV1–G2» та пунктирна крива 4 – «G1–G2». Отже, на підставі даних про перетини робимо висновок, що для зменшення ймовірності

відмови системи для моменту часу 10 000 год. необхідно вжити заходів щодо підвищення безвідмовності трансформатора TV1 із основної підсистеми та генератора G2 із резервної підсистеми, оскільки їх одночасна непрацездатність є найімовірнішою причиною непрацездатності досліджуваної системи із відносною вагою 33.75 %.

### Висновки

Розроблено математичну модель надійності електротехнічної системи із складним загальним заміщувальним резервуванням, призначену для визначення ймовірнісних показників перетинів. Формалізацію надійності системи виконано на основі динамічного дерева відмов, а визначення ймовірнісних показників – за розщепленою однорідною марковською моделлю. Одержана модель забезпечила адекватне урахування зміни навантаження елементів, тривалість напрацювання яких розподілена за законом Вейбулла. За вказаною моделлю адекватно визначено ймовірнісні показники перетинів та показано, надійність яких елементів необхідно покращувати першочергово, щоб зменшити ймовірність відмови системи.

Подальші дослідження скеровані на розроблення математичних моделей надійності, які призначені для аналізу причин непрацездатності електротехнічних систем із роздільним резервуванням елементів.

1. Wei-Chang Yeh. A new algorithm for generating minimal cut sets in  $k$ -out-of- $n$  networks / Wei-Chang Yeh // *Reliability Engineering & System Safety*. – 2006. – Vol. 91, No 1. – P. 36–43. 2. Vega M. Algorithm to evaluate substation reliability with cut and path sets / M. Vega, H. G. Sarmiento // *Industry Applications, IEEE Transactions on*. – 2008. – Vol. 44, No 6. – P. 1851–1858. 3. Yong Liu. Reliability evaluation of composite power systems using Markov cut-set method / Yong Liu, C. Singh // *Power Systems, IEEE Trans. on* – 2010. – Vol. 25, No. 2. – P. 777–785. 4. Haitao Guo. Automatic creation of Markov models for reliability assessment of safety instrumented systems / Haitao Guo, Xianhui Yang // *Reliability Engineering & System Safety*. – 2008. – Vol. 93, No 6. – P. 829–837. 5. Codetta-Raiteri D. Integrating several formalisms in order to increase Fault Trees' modeling power / D. Codetta-Raiteri // *Reliability Engineering & System Safety*. – 2011. – Vol. 96, No 5. – P. 534–544. 6. Juan Eloy Ruiz-Castro. Modelling a reliability system governed by discrete phase-type distributions / Juan Eloy Ruiz-Castro, Rafael Pérez-Ocón, Gemma Fernández-Villodre // *Reliability Engineering & System Safety*. – 2008. – Vol. 93, No 11. – P. 1650–1657. 7. Chryssaphinou O., Limnios N. Malefaki S. Multi-state reliability systems under discrete time semi-markovian hypothesis / O. Chryssaphinou, N. Limnios, S. Malefaki // *Reliability, IEEE Trans. on*. – 2011. – Vol. 60, No 1. – P. 80–87. 8. Щербовських С. В. Математичні моделі та методи для визначення характеристик надійності багатотермінальних систем із урахуванням перерозподілу навантаження: монографія / С. В. Щербовських. – Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2012. – 296 с.

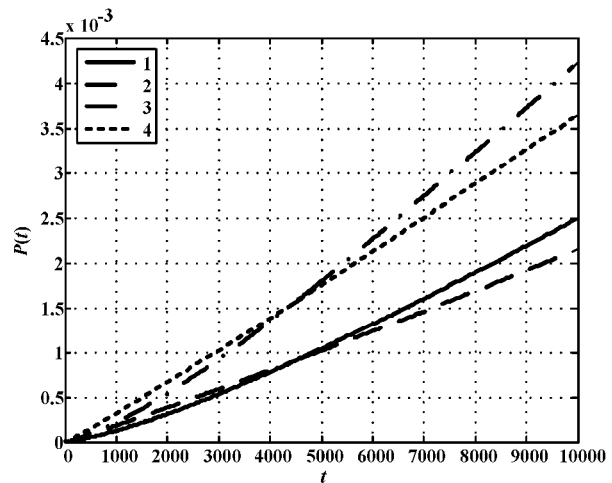


Рис. 4. Криві ймовірнісних характеристик множини мінімальних перетинів системи